ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 189 Prace Matematyczne XIV 1997

EUGENIUSZ WACHNICKI

Sur un développement de la valeur moyenne

Résumé. Dans la présente note on démontre la formule:

$$\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(r,\lambda)L^i u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^p u(t)\,\varphi_{p-1}(|t-x|,r,\lambda)dt$$

où $Lu = u'' - \lambda^2 u$, $L^i u = L(L^{i-1}u)$, $r \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Les coefficients c_i ainsi que les fonctions φ_i sont bien déterminées. On utilise la formule ci-dessus pour caracteriser des solutions de l'équation $L^p u = 0$ et pour caractériser des solutions de certaines équations fonctionnelles. On considère aussi les mêmes probèmes pour l'operateur $L_1 u = u'' + \lambda^2 u$.

Dans cette note on démontre la formule

$$\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(r,\lambda)L^i u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^p u(t)\ \varphi_{p-1}(|t-x|,r,\lambda)dt$$

où u est une fonction de classe C^{2p} dans un intervalle ouvert I, x, $x+r$, $x-r \in I$, $r \geq 0$, $L^0 u = u$, $Lu = u'' - \lambda^2 u$, $L^i u = L(L^{i-1}u)$ $(i = 2, 3, \ldots)$, λ est un nombre non-négatif quelconque. Les coefficients c_i ainsi que les fonctions φ_i sont déterminés (§ 1-3).

La formule ci-dessus nous permet de caractériser des solutions de l'équation $L^p u = 0$. Cette caractéristique est donnée dans le § 4.

Le cas où $p = 1$ nous conduit aux certaines équations fonctionnelles. Ces équations sont considérées dans le § 5. Nous y donnons une généralisation de la notion de la convexité.

AMS (1991) subject classification: Primary 26A24, Secondary 26A51, 39B20.

A la fin on considère les mêmes problèmes pour l'opérateur L_1 défini par $L_1 u = u'' + \lambda^2 u$.

Les problèmes examinés dans cet article sont liés directement avec ceux de la valeur moyenne sphérique pour des fonctions de plusieur variables considérées en nombreux travaux ([1], [3], [4], [5], [6]). Cependant les résultats obtenus ici ne font pas des cas particuliers de ces notes.

§ **1.** Nous allons démontrer le lemme suivant

LEMME 1. *Si u est une fonction de classe C^2 dans I, alors pour tout $x \in I$ et pour tout $r \geq 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$ on a*

$$u(x+r) + u(x-r) = 2u(x) ch\lambda r + Q, \tag{1}$$

où

$$Q = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} (u'' - \lambda^2 u)(t)\ sh(\lambda(r - |t-x|))dt & si\ \lambda > 0, \\ \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} u''(t)\ (r - |t-x|)dt & si\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Si $r = 0$, la formule est évidente. Supposons $r > 0$ et considérons d'abord le cas où $\lambda > 0$. On a

$$\int_{x-r}^{x+r} u''(t) sh(\lambda(r - |t-x|))dt = \int_{x}^{x+r} u''(t) sh(\lambda(r + x - t))dt$$
$$+ \int_{x-r}^{x} u''(t) sh(\lambda(r - x + t))dt.$$

En intégrant ces deux dernières intégrales deux fois par parties on obtient la formule (1).
Si $\lambda = 0$ nous faisons le même raisonnement.

Soient ϱ, $r \geq 0$. Posons

$$\varphi_0(\varrho, r, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} sh(\lambda(r-\varrho)) & \text{si } \lambda > 0, \\ r - \varrho & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi_k(\varrho, r, \lambda) = \int_{\varrho}^{r} \varphi_{k-1}(s, r, \lambda)\varphi_0(\varrho, s, \lambda) ds, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Notons que $\varphi_k(\varrho, r, \lambda) > 0$ si $0 \leq \varrho < r$ et $\lambda \geq 0$.
De plus on a

$$\varphi_k(\varrho, r, 0) = \frac{(r-\varrho)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Posons $c_0(r, \lambda) = ch\lambda r$ et

$$c_k(r,\lambda) = \int_0^r \varphi_{k-1}(s,r,\lambda)c_0(s,\lambda)ds, \;\; k = 1,2\ldots .$$

Remarquons que $c_k(r,0) = \frac{r^{2k}}{(2k)!}$ et que la fonction

$$\lambda \longmapsto c_k(r,\lambda), \;\; \lambda \geq 0$$

ainsi que la fonction

$$\lambda \longmapsto \varphi_k(\varrho,r,\lambda), \;\; \lambda \geq 0$$

sont continues dans $[0,+\infty)$ pour tous ϱ, $r \geq 0$.

THÉORÈME 1. *Si u est une fonction de classe C^{2p} dans I, alors pour tout $x \in I$ et pour tout $r \geq 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$ on a*

$$\begin{aligned} \frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} &= \sum_{k=0}^{p-1} c_k(r,\lambda)L^k u(x) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^p u(t)\; \varphi_{p-1}(|t-x|,r,\lambda)dt, \end{aligned} \tag{2}$$

quelque soit $\lambda \geq 0$.

Démonstration. De la définition de c_k résulte que $c_0(0,\lambda) = 1$ et $c_k(0,\lambda) = 0$ si $k = 1,2,\ldots$. Cela entraîne que (2) est vrai si $r = 0$. Supposons donc $r > 0$. Dans ce cas nous utilisons la récurrence. Du lemme 1 et des définitions de c_0 et φ_0 résulte que le théorème 1 est vrai si $p = 1$.

Supposons maintenant que pour certain $p \in \mathbb{N}^*$ le théorème 1 est vrai. Considérons une fonction u de classe $C^{2(p+1)}$ dans un intervalle I. Soient $x \in I$ et $r > 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$. L'hypothèse de récurrence nous donne

$$\begin{aligned} \frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} &= \sum_{k=0}^{p-1} c_k(r,\lambda)L^k u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^p u(t)\varphi_{p-1}(|t-x|,r\lambda)dt \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} c_k(r,\lambda)L^k u(x) \\ &+ \int_0^r \frac{L^p u(x+s)+L^p u(x-s)}{2}\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)ds. \end{aligned}$$

Du lemme 1 on a

$$\begin{aligned} &\int_0^r \frac{L^p u(x+s)+L^p u(x-s)}{2}\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)ds \\ &\quad = \int_0^r \Big[L^p u(x) ch\lambda s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{x-s}^{x+s} L^{p+1}u(t)\,\varphi_0(|t-x|,s,\lambda)dt \Big] \varphi_{p-1}(s,r,\lambda)ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L^p u(x) \int_0^r \varphi_{p-1}(s,r,\lambda) c_0(s,\lambda) ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^r \left(\int_{x-s}^{x+s} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(|t-x|,s,\lambda)dt \right) ds \\
&= c_p(r,\lambda) L^p u(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^r \left(\int_{x}^{x+s} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(t-x,s,\lambda)dt \right) ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^r \left(\int_{x-s}^{x} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(x-t,s,\lambda)dt \right) ds.
\end{aligned}
$$

En changeant l'ordre d'intégration on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r \left(\int_{x}^{x+s} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(t-x,s,\lambda)dt \right) ds \\
&\quad = \int_x^{x+r} \left(\int_{t-x}^{r} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(t-x,s,\lambda)ds \right) dt \\
&\quad = \int_x^{x+r} \left(L^{p+1}u(t) \int_{|t-x|}^{r} \varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(|t-x|,s,\lambda)ds \right) dt \\
&\quad = \int_x^{x+r} L^{p+1}u(t)\varphi_p(|t-x|,r,\lambda)dt.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r \left(\int_{x}^{x-s} L^{p+1}u(t)\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)\varphi_0(x-t,s,\lambda)dt \right) ds \\
&\qquad = \int_{x-r}^{x} L^{p+1}u(t)\varphi_p(|t-x|,r,\lambda)dt.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r \frac{L^p u(x+s) + L^p u(x-s)}{2}\varphi_{p-1}(s,r,\lambda)ds \\
&\qquad = c_p(r,\lambda)L^p u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^{p+1}u(t)\varphi_p(|t-x|,r,\lambda)dt
\end{aligned}
$$

et

$$
\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} = \sum_{k=0}^{p} c_k(r,\lambda)L^k u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^{p+1}u(t)\varphi_p(|t-x|,r,\lambda)dt
$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.

REMARQUE 1. Pour $\lambda = 0$ on pourra obtenir la formule (2) en partant du résultat de Walter ([6]).

REMARQUE 2. En appliquant la formule de la moyenne pour les intégrales la formule (2) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} &= \sum_{k=0}^{p-1} c_k(r,\lambda)L^k u(x) \\ &+\frac{1}{2}L^p u(\xi)\int_{x-r}^{x+r} \varphi_{p-1}(|t-x|,r,\lambda)dt,\end{aligned} \tag{3}$$

où $\xi \in (x-r, x+r)$.

§ 2. Nous allons donner quelques proprietés des coefficients c_k et φ_k. Tout d'abord remarquons que

$$\varphi_k(r,r,\lambda) = 0,\ k \in N \text{ et } \left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}(\varrho,r,\lambda)\right|_{\varrho=r} = 1 \tag{4}$$

pour tout $r > 0$ et $\lambda \geq 0$.
De la définition de φ_k et de (4) on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\varrho,r,\lambda) &= \varphi_{k-1}(r,r,\lambda)\varphi_0(\varrho,r,\lambda) + \int_\varrho^r \frac{\partial\varphi_{k-1}(s,r,\lambda)}{\partial r}\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= \int_\varrho^r \frac{\partial\varphi_{k-1}(s,r,\lambda)}{\partial r}\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds\end{aligned} \tag{5}$$

et donc

$$\left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(\varrho,r\lambda)\right|_{\varrho=r} = 0 \tag{6}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $r > 0$ et $\lambda \geq 0$.

Posons

$$v_k : r \longmapsto \varphi_k(\varrho,r,\lambda),\ r > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda \geq 0.$$

Nous allons démontrer

LEMME 2. *Pour tout $\varrho > 0$, la fonction v_k est une solution de l'équation*

$$v''(r) - \lambda^2 v(r) = v_{k-1}(r),\ r > 0. \tag{7}$$

Démonstration. De (5) on a

$$v_k'(r) = \int_\varrho^r \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial r}(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds$$

et donc

$$v_k''(r) = \frac{\partial}{\partial r}\varphi_{k-1}(s,r,\lambda)\Big|_{s=r}\varphi_0(\varrho,r,\lambda) + \int_\varrho^r \frac{\partial^2\varphi_{k-1}}{\partial r^2}(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds.$$

En utilisant (4) et (6) on obtient

$$v_k''(r) = \begin{cases} \varphi_0(\varrho,r,\lambda) + \displaystyle\int_\varrho^r \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds & \text{si } k=1, \\ \displaystyle\int_\varrho^r \frac{\partial^2\varphi_{k-1}}{\partial r^2}(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds & \text{si } k=2,3,\dots\,. \end{cases} \tag{8}$$

Raisonnons dans la suite par récurrence.
Si $k=1$ on a

$$\begin{aligned} v_1''(r) - \lambda^2 v_1(r) &= \varphi_0(\varrho,r,\lambda) + \int_\varrho^r \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &\quad -\lambda^2\int_\varrho^r \varphi_0(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= v_0(r) + \int_\varrho^r \left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2} - \lambda^2\varphi_0\right)(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= v_0(r) \end{aligned}$$

car la fonction $r \longmapsto \varphi_0(s,r,\lambda)$ est une solution de l'équation homogène de (7).

Supposons que pour certain $k \geq 1$ la fonction v_{k-1} est une solution de l'équation

$$v''(r) - \lambda^2 v(r) = v_{k-2}(r), \ \ r > 0.$$

Alors, d'après (8) et de l'hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} v_k''(r) - \lambda^2 v_k(r) &= \int_\varrho^r \left(\frac{\partial^2\varphi_{k-1}}{\partial r^2} - \lambda^2\varphi_{k-1}\right)(s,r\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= \int_\varrho^r (v_{k-1}'' - \lambda^2 v_{k-1})(r)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= \int_\varrho^r v_{k-2}(r)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds = \int_\varrho^r \varphi_{k-2}(s,r,\lambda)\varphi_0(\varrho,s,\lambda)ds \\ &= \varphi_{k-1}(\varrho,r,\lambda) \\ &= v_{k-1}(r). \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 2 est donc terminée.

Lemme 3. *Soit $k \in N^*$ et $\lambda \geq 0$. La fonction $c_k : r \longmapsto c_k(r,\lambda)$, $r \geq 0$, est une solution du problème*

$$\begin{cases} v''(r) - \lambda^2 v(r) = c_{k-1}(r), \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Démonstration. Il est évident que $c_k(0) = 0$ pour $k \in N^*$. Par définition de c_k et (4) on a

$$\begin{aligned} c_k'(r) &= ch\lambda r \varphi_{k-1}(r,r,\lambda) + \int_0^r ch\lambda t \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial r}(t,r,\lambda)dt \\ &= \int_0^r ch\lambda t \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial r}(t,r,\lambda)dt. \end{aligned}$$

Alors $c_k'(0) = 0$ et

$$c_k''(r) = \begin{cases} ch\lambda r + \displaystyle\int_0^r ch\lambda t \frac{\partial \varphi_0}{\partial r^2}(t,r,\lambda)dt & \text{si } k = 1, \\ \displaystyle\int_0^r ch\lambda t \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial r^2}(t,r,\lambda)dt & \text{si } k = 2,3,\dots . \end{cases}$$

En raisonnant dans la suite par récurrence et en utilisant le lemme 2 on démontre que c_k vérifie l'équation du problème (9) pour tout $k \in N^*$.

§ **3.** Soient $r \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $k \in N$. Posons

$$\alpha_0(r,\lambda) = ch\lambda r$$

et

$$\alpha_k(r,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{r^{2k}}{(2k)!} & \text{si } \lambda = 0. \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{r^{2k}}{2^k k!} \dfrac{I_{k-\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{k-\frac{1}{2}}} & \text{si} \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

pour $r > 0$ et $\alpha_k(0,\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \geq 0$. La fonction I_ν est la fonction modifiée de Bessel de première espèce d'indice ν ([2]). De la formule asymptotique

$$I_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad \text{si } x \to 0^+,\ \nu > 0 \tag{10}$$

il résulte que la fonction

$$r \longmapsto \alpha_k(r,\lambda),\ r \geq 0$$

est continue dans l'intervalle $[0,+\infty)$ pour tout $\lambda \geq 0$. De même, la fonction

$$\lambda \longmapsto \alpha_k(r,\lambda), \quad \lambda \geq 0$$

est continue dans l'intervalle $[0,+\infty)$ pour tout $r \geq 0$.

La formule de dérivation des fonction I_ν

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu}I_\nu(x)) = x^{-\nu}I_{\nu+1}(x)$$

et la formule (10) nous disent que la fonction $r \longmapsto \alpha_k(r,\lambda)$ est de bonne regularité en $r = 0$ pour tout $\lambda \geq 0$.

En utilisant (10) et la formule

$$\frac{2\nu}{x}I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)$$

on démontre par récurrence le lemme suivant

LEMME 4. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction*

$$\alpha_k : r \longmapsto \alpha_k(r,\lambda),\ r \geq 0$$

est une solution du problème

$$v''(r) - \lambda^2 v(r) = \alpha_{k-1}(r),\ r \geq 0$$
$$u'(0) = u(0) = 0.$$

THÉORÈME 2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\alpha_k(r,\lambda) = c_k(r,\lambda),\ r \geq 0,\ \lambda \geq 0. \tag{11}$$

Démonstration. Par définition $\alpha_0(r,\lambda) = c_0(r,\lambda)$. L'unicité du problème de Cauchy (9), les lemmes 3 et 4 entraîne l'egalité (11).

Dans le cas où $\lambda > 0$, les coefficients c_k s'expriment à l'aide des fonctions *sh* et *ch*. En effet, la formule

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k (chx) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{I_{k-\frac{1}{2}}(x)}{x^{k-\frac{1}{2}}}$$

nous donne

$$c_k(r,\lambda) = \frac{r^{2k}}{2^k k!}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k (chx)\Big|_{x=\lambda r}$$

pour $k = 0, 1, \ldots$.

§ 4. Du théorème 1 découle directement

THÉORÈME 3. *Si une fonction u de classe C^{2p} dans I vérifie l'équation $L^p u(t) = 0$ pour $t \in I$ alors*

$$\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(r,\lambda)L^k u(x) \tag{12}$$

pour tout $x \in I$ et $r \geq 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$.

REMARQUE 3. On pourra obtenir la formule (12) comme un cas particulier da la formule de Schot ([5]) si l'on prend l'espace de dimension 1. Cependant l'auteur de la note [5] a supposé l'espace de dimension $n \geq 2$.

Nous allons démontrer le théorème réciproque au théorème 3.

THÉORÈME 4. *Si une fonction u est de classe $C^{2(p-1)}$ dans un intervalle ouvert I et l'égalité* (12) *a lieu pour tout $x \in I$ et pour r assez petit, alors $L^p u(x) = 0$ pour $x \in I$.*

Démonstration. Avant tout nous démontrerons que la fonction u est de class C^{2p} dans I. De plus nous démontrerons qu'elle est de classe C^∞ dans I.

Soit $x_0 \in I$ et $r > 0$ tel que $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subset I$. En appliquant (12) pour certain $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ on a

$$\frac{u(x+\varrho) + u(x-\varrho)}{2} + \sum_{k=0}^{p-2} \beta_k(\varrho) u^{(2k)}(x) = c_{p-1}(\varrho, \lambda) u^{(2(p-1))}(x) \tag{13}$$

pour tout ϱ, $0 \leq \varrho < r$, où β_k sont des nombres bien définis.

En intégrant l'égalité (13) par rapport à ϱ dans intervalle $[0, r]$ on obtient

$$\int_0^r \frac{u(x+\varrho) + u(x-\varrho)}{2} d\varrho + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r) u^{(2k)}(x) = \gamma_{p-1}(r) u^{(2(p-1))}(x)$$

où $\gamma_k(r) = \int_0^r \beta_k(\varrho) d\varrho$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ et $\gamma_{p-1}(r) = \int_0^r c_{p-1}(\varrho, \lambda) d\varrho$. Il est évident que $\gamma_{p-1}(r) > 0$.

Il en résulte que

$$\int_{x-r}^{x+r} u(t)dt + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r) u^{(2k)}(x) = \gamma_{p-1}(r) u^{(2(p-1))}(x).$$

La fonction

$$\varphi : x \longmapsto \int_{x-r}^{x+r} u(t)dt + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r) u^{(2k)}(x)$$

est bien définie dans $(x_0 - r, x_0 + r)$. Par hypothèse, elle est dérivable dans cet intervalle et

$$\varphi'(x) = u(x+r) - u(x-r) + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r) u^{(2k+1)}(x)$$

et donc la fonction

$$x \longmapsto u^{(2(p-1))}(x)$$

est aussi dérivable dans $(x_0 - r, x_0 + r)$ et

$$\gamma_{p-1}(r)u^{(2p-1)}(x) = \varphi'(x) = u(x+r) - u(x-r) + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r)u^{(2k+1)}(x).$$

Cette dernière égalité nous permet de conclure que la fonction u est de classe C^{2p} dans $(x_0 - r, x_0 + r)$ et

$$\gamma_{p-1}(r)u^{(2p)}(x) = u'(x+r) - u'(x-r) + \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_k(r)u^{(2k+2)}(x).$$

En continuant ce raisonnement on constate que la fonction u est de classe C^∞ dans $(x_0 - r, x_0 + r)$. Puisque x_0 est un point quelconque de I alors u est de classe C^∞ dans I.

Soit de nouveau $x_0 \in I$ et $a > 0$ tel que $[x_0 - a, x_0 + a] \subset I$. En appliquant pour la fonction u le théorème 1 et la remarque 2 et en utilisant l'hypothèse du théorème 4 on obtient l'existence du point $c \in (x_0 - a, x_0 + a)$ tel que

$$L^p u(c) \int_{x_0-a}^{x_0+a} \varphi_{p-1}(|t - x_0|, a, \lambda) dt = 0.$$

Par conséquent

$$L^p u(c) = 0.$$

Passant à la limite quand $a \to 0^+$ on a $L^p u(x_0) = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème 4.

REMARQUE 4. Notons qu'en partant des résultats de Schot, c'est à dire uniquement de la formule (12) il n'est pas claire comment on pourra démontrer le théorème 4. Ce qui est essentiel dans la démonstration ci-dessus est que nous connaissons la formule (2).

§ 5. En posant $x + r = t$, $x - r = s$ la formule (2) s'écrit

$$\frac{u(t) + u(s)}{2} = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \left(\frac{t-s}{2}, \lambda\right) L^k u \left(\frac{t+s}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_s^t L^p u(\theta) \varphi_{p-1} \left(\left|\theta - \frac{t+s}{2}\right|, \frac{t-s}{2}, \lambda\right) d\theta$$

pour tout t et s de I où $s < t$.

Dans le cas où $p = 1$ on a

$$\frac{u(t) + u(s)}{2} = ch\left(\lambda \frac{t-s}{2}\right) u\left(\frac{t+s}{2}\right) + \frac{1}{2\lambda} \int_s^t (u'' - \lambda^2 u)(\theta) sh\left[\lambda\left(\frac{t-s}{2}, \left|\theta - \frac{s+t}{2}\right|\right)\right] d\theta \tag{14}$$

(dans le cas où $\lambda = 0$ au lieu de $\frac{1}{\lambda} sh\lambda\alpha$ on prend valeur limite α).

Des théorème 3 et 4 résulte

THÉORÈME 5. *L'équation fonctionnelle*

$$\frac{u(t)+u(s)}{2} = u\left(\frac{t+s}{2}\right) ch\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right), \quad \lambda \geq 0, \ t,s \in I, \tag{15}$$

dans la famille de fonctions continues dans I ne possède que des solutions de la forme

$$u(t) = c_1 \frac{1}{\lambda} sh\lambda t + c_2 ch\lambda t, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

L'équation (15) est une généralisation de celle de Jensen.

Considérons encore l'équation intégro-fonctionnelle de la forme

$$\begin{aligned} \frac{u(t)+u(s)}{2} &+ \frac{\lambda}{2}\int_s^t u(\theta) sh\left[\lambda\left(\frac{t-s}{2} - \left|\theta - \frac{s+t}{2}\right|\right)\right] d\theta \\ &= u\left(\frac{s+t}{2}\right) ch\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

où $\lambda \geq 0$, $t,s \in I$, $s \leq t$, obtenue de (14) si la fonction u vérfie l'équation $u''(t) = 0$, $t \in I$.

En raisonnant de la même façon qu'à la démonstration du théorème 4 on a

THÉORÈME 6. *L'équation* (16) *dans la famille des fonctions continues dans I ne possède que des solutions de la forme*

$$u(t) = c_1 t + c_2, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De la formule (14) résulte aussi

THÉORÈME 7. *Si la fonction u est définie, convexe et de la classe C^2 dans l'intervalle I, alors*

$$\begin{aligned} \frac{u(t)+u(s)}{2} &\geq ch\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right) u\left(\frac{t+s}{2}\right) \\ &- \frac{\lambda}{2}\int_s^t u(\theta) sh\left[\lambda\left(\frac{t-s}{2} - \left|\theta - \frac{t+s}{2}\right|\right)\right] d\theta \end{aligned} \tag{17}$$

pour tout $t,s \in I$, $s \leq t$ et pour tout $\lambda \geq 0$.

Cette formule nous permet de donner une définition de la convexité de fonctions

DÉFINITION 1. On dit que la fonction u définie et continue dans un intervalle I est H-convexe s'il existe un nombre $\lambda \geq 0$ tel que (17) a lieu pour tout $t,s \in I$, $s < t$.

Il est évident que pour $\lambda = 0$ on obtient la convexité usuelle.

§ **6.** Considérons maintenant l'opérateur L_1 définie par $L_1 u = u'' + \lambda^2 u$, $\lambda > 0$. En répetant le raisonnement fait aux paragraphes 1-5 on pourra démontrer

THÉORÈME 8. *Si u est une fonction de classe C^{2p} dans un intervalle ouvert I, alors pour tout $x \in I$ et pour tout $r \geq 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$ on a*

$$\frac{u(x+r)+u(x-r)}{2} = \sum_{k=0}^{p-1} d_k(r,\lambda) L_1^k u(x) + \frac{1}{2}\int_{x-r}^{x+r} L^p u(t)\ \psi_{p-1}(|t-x|, r, \lambda)dt$$

pour tout $\lambda > 0$ où

$$d_k(r,\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{r^{2k}}{2^k r^k}\frac{J_{k-\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{k-\frac{1}{2}}},$$

J_ν est une fonction de Bessel de première espèce d'indice ν ([2]) et

$$\psi_k(\varrho, r, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda(r-\varrho)) & si\ k = 0, \\ \int_\varrho^r \psi_{k-1}(s,r,\lambda)\psi_0(\varrho, s, \lambda)ds & si\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Il en résulte que les théorèmes 3 et 4 restent valables si l'on y remplace c_k par d_k et l'opérateur L par L_1. Par conséquent on a les théorèmes suivants

THÉORÈME 9. *L'équation fonctionnelle*

$$\frac{u(t)+u(s)}{2} = u\left(\frac{t+s}{2}\right)\cos\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right), \quad t, s \in I,\ \lambda > 0$$

dans la famille de fonctions continues dans I ne posède que des solutions de la forme

$$u(t) = c_1\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t + c_2\cos\lambda t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 10. *L'équation*

$$\frac{u(t)+u(s)}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_s^t u(\theta)\sin\left[\lambda\left(\frac{t-s}{2} - \left|\theta - \frac{s+t}{2}\right|\right)\right]d\theta$$
$$= u\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right),$$

$t, s \in I$, $s < t$, $\lambda > 0$ dans la famille de fonctions continues dans I ne possède que des solutions de la forme

$$u(t) = c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 11. *Si u est une fonction définie, convexe et de classe C^2 dans un intervalle I, alors*

$$\begin{aligned}\frac{u(t)+u(s)}{2} &+ \frac{\lambda}{2}\int_s^t u(\theta)\sin\left[\lambda\left(\frac{t-s}{2} - \left|\theta - \frac{t+s}{2}\right|\right)\right] d\theta \\ &\geq u\left(\frac{t+s}{2}\right)\cos\left(\lambda\frac{t-s}{2}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

pour tout $t, s \in I$ et $0 \leq \lambda(t-s) < \pi$, $\lambda > 0$.

De toute façon on pourra poser aussi une autre définiton de la convexité généralisée à savoir

DÉFINITION 2. On dit qu'une fonction u définie et continue dans un intervalle ouvert est T-convexe s'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que (18) a lieu pour tout $t, s \in I$, $0 \leq \lambda(t-s) < \pi$.

La question bien liée avec les définition 1 et 2 est suivante:
Quelle sont les relation entre H-convexité, T-convexité et la convexité usuelle? Les théorème 7 et 11 ne nous donnent qu'une réponse partielle.

Travaux cités

[1] Górowski J., *The mean value theorem and oscillatory behaviour for solutions of certain elliptic equation,* Math. Nachr. **122** (1985), 259-265.

[2] McLachlan N. W., *Bessel functions for engineers,* 2^{nd} edition, Clarendon Press, Oxford, 1955.

[3] Nicolesco M., *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, 1936.

[4] Poritsky H., *Generalizations of the Gauss law of the spherical mean,* Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 199-225.

[5] Schot S. H., *On spherical mean value theorems,* Comment. Math. **33** (1993), 179-183.

[6] Walter W., *Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Lösung von Randwertaufgaben,* Deutsch. Math.-Verein, **60.1** (1958), 94-131.

Ecole Normale Supérieure
Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Pologne

Manuscript received March 1, 1995