ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 189 Prace Matematyczne XIV 1997

Zbigniew Powązka

Über Hosszúfunktionalungleichung und die Jensenische Integralungleichung

Abstract. In this paper we study Hosszú's functional inequality (1) in the class K of functions $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ which are nonconstant, continuous and integrable over $(0,1)$. We prove that if $f \in K$ satisfies (1) then it is of the form (12). This formula yields inequality (2) which is a special case of Jensen's integral inequality.

1. Vorbemerkungen

Professor Z. Daróczy stellte während der zweiten International Conference on Functional Equations and Inequalities in Szczawnica (Polen) im Jahre 1987 das folgende Problem vor (vgl. [5]):
Es sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, die Ungleichung

$$f(x+y-xy) + f(xy) \leq f(x) + f(y), \qquad x, y \in (0,1), \tag{1}$$

erfüllt. Wie ist die Charakterisierung stetigen Lösungen der Ungleichung (1).

Die Ungleichung (1) nennt man Hosszúfunktionalungleichung. Besonders war interessant, ob jede Jensenische-konkave Funktion die Ungleichung (1) erfüllt. Der Zusammenhang zwischen den Lösungen der Jensenischen Funktionalgleichung und der Hosszúfunktionalgleichung folgt z.B. aus den Arbeiten [4], [7] (s. 333-334) und [8].

Es wurde von Gy. Maksa und Zs. Páles [10] bewiesen, daß:

Satz 1.

(i) Jede konkave an Intervall $(0,1)$ *Funktion erfüllt die Ungleichung* (1).

(ii) Wenn $a \in \left(\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right)$ *gilt, so erfüllt die Funktion*

AMS (1991) subject classification: 39B72.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - ax^2, \qquad x \in (0,1), \tag{2}$$

die Ungleichung (1) *und ist keine konkave Funktion.*

Z. Kominek und K. Nikodem haben die umstetigen Jensenischen-konkaven Funktionen gefunden, derer Lösungen keine Hosszúfunktionalungleichung ist (s. [6], [9]).

In der Arbeit [11] wird folgendes vorausbestimmt.

DEFINITION 1.

a) Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist Wright-konkave Funktion, wenn für $y > x$ und $\delta > 0$, $y + \delta, x \in (0,1)$, die Bedingung

$$f(x+\delta) - f(x) \geq f(y+\delta) - f(y). \tag{3}$$

gilt.

b) Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist Wright-konvexe Funktion, wenn die Ungleichung in (3) entgegengesetzt ist.

J. E. Pecarić bewies in [11] den folgenden Satz.

SATZ 2. *Wenn $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine Wright-konkave Funktion ist, so erfüllt sie die Ungleichung* (1).

In Arbeiten [1] und [2] befindet sich der folgende Satz.

SATZ 3. *Die Klasse der stetigen, definierten an Intervall $I \subset \mathbb{R}$, reellen, Wright-konkaven Funktionen ist identisch mit der Klasse der stetigen und konkaven Funktionen an I.*

Daraus folgt direkt:

BEMERKUNG 1. *Wenn $a \in \left(\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right)$ gilt, so ist die Funktion* (2) *keine Wright-konkave Funktion.*

Also hat die Ungleichung (1) neben konkaven und Wright-konkaven Funktionen auch andere Lösungen. Weiter geben wir eine Charakterisierung der stetigen Lösungen der Ungleichung (1) (Satz 5) und schätzen das Integral $\int_0^1 f(t)dt$, wobei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Ungleichung (1) bezeichnet. Das wird in der Bemerkung 2 gezeigt, daß die Ungleichung (20) sich in die Jensenische Integralungleichung, für die Lösung von (1) verwandelt. Der Satz 6 gibt eine Verallgemeinerung Jensenischer Integralungleichung für die beliebige, stetige und konkave Funktion bei nicht notwendig begrenzten Intervall reeller Zahlen.

2. Folgerungen

Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein Gebiet $S \subset I \times \mathbb{R}$ und eine gegebene Funktion $F : S \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x)), \qquad x \in I, \tag{4}$$

wobei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ die suchende differenzierbare Funktion ist. In der Theorie über Differentialgleichungen benutzt man die folgende

DEFINITION 2. Die stetige Funktion $R : S \to \mathbb{R}$, mit den stetigen partialen Ableitungen R'_x, R'_y ist das erste Integral der Gleichung (4), wenn für jede Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Gleichung (4) die Funktion $R(x, \varphi(x))$, $x \in I$, konstant ist.

Weiter nehmen wir die folgende Voraussetzung an:

H: Das Anfangswertproblem hat für die Gleichung (4) im Gebiet S genau eine Lösung. Es existiert das erste Integral $R : S \to \mathbb{R}$ der Gleichung (4) und R'_y ist positiv für $x \in I$.

D. Brydak bewies in der Arbeit [3] den folgenden

SATZ 4. *Es sei die Voraussetzung* H *zu erfüllen. Eine beliebige Funktion* $\psi : I \to \mathbb{R}$, *deren Graph im Gebiet* S *liegt, ist die Lösung der Ungleichung*

$$\varphi'(x) \geq F(x, \varphi(x)), \qquad x \in I, \tag{5}$$

dann und nur dann, wenn die Funktion

$$n(x) := R(x, \psi(x)), \qquad x \in I, \tag{6}$$

echt monoton wachsende ist.

Mit der Hilfe dieses Satzes beweisen wir

HILFSATZ 1. *Die allgemeine Lösung der Ungleichung*

$$\varphi'(x) \geq f(x)\varphi(x) + g(x), \qquad x \in I, \tag{7}$$

wobei $f, g : I \to \mathbb{R}$ *die gegebenen Funktionen sind,* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *eine suchende, differenzierbare Funktion ist, hat Gestalt*

$$\psi(x) = n(x)\varphi_0(x) + \varphi_1(x), \qquad x \varepsilon I, \tag{8}$$

wobei $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ *eine positive Lösung der homogenen Gleichung*

$$\varphi'(x) = f(x)\varphi(x), \qquad x \in I, \tag{9}$$

ist, $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ *eine beliebige Lösung der Gleichung*

$$\varphi'(x) = f(x)\varphi(x) + g(x), \qquad x \in I, \tag{10}$$

ist, $n : I \to \mathbb{R}$ eine wachsende Funktion bedeutet.

Beweis. Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, ein Gebiet $S \subset I \times \mathbb{R}$, und die gegebenen, stetigen Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$. Legend in die Formel (4)

$$F(x, y) = f(x)y + g(x), \qquad x \in I,\ y \in \mathbb{R},$$

bekommen wir die Differentialgleichung (10). Das Anfangwertproblem hat für diese Gleichung im Gebiet S eine und nur eine Lösung. Es exiestiert auch das erste Integral $R : S \to \mathbb{R}$ der Gleichung (10) in der Form

$$R(x, y) = \frac{y - y_1}{y_0}, \qquad (x, y) \in S, \tag{11}$$

wobei $y_0 > 0$ und $y_1 \in \mathbb{R}$. Die Voraussetzung H ist also erfüllt. Weiter stellt sich die Ungleichung (7) wie ein Spezialfall der Ungleichung (5) vor. Die Gestalt (8) der Lösug $\psi : I \to \mathbb{R}$ der Ungleichung (7) ist also die Konsequenz der Formel (6), wobei $y_0(x) = \varphi_0(x)$, $x \in I$, φ_0 eine positive Lösung der Gleichung (9) ist, $y_1(x) = \varphi_1(x)$, $x \in I$, φ_1 die Gleichung (10) erfüllt.

3. Ergebnisse

Es wird folgende Definition eigeführt.

Definition 3. Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ gehört zur Klasse K, wenn sie eine stetige, nicht konstante Funktion ist, und das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ existiert.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 5. *Für jede Lösung $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ der Hosszúfunktionalungleichung aus der Klasse K, existiert die differenzierbare, echt monoton wachsende Funktion $n : (0, 1) \to \mathbb{R}$, so gilt*

$$f(x) = n'(x)(x - x^2) + n(x)(1 - 2x) + a, \qquad x \in (0, 1), \tag{12}$$

wobei $n' : (0, 1) \to \mathbb{R}$ die Ableitung der Funktion $n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ ist und

$$a = \int_0^1 f(x)dx. \tag{13}$$

Beweis. Weil $f \in K$, so können wir die Ungleichung (1) bezüglich y integrieren (s. [3]). Dann bekommen wir

$$\int_0^1 f(x + y - xy)dy + \int_0^1 f(xy)dy \le \int_0^1 f(x)dy + \int_0^1 f(y)dy. \tag{14}$$

Legend in das erste Integral der Formel (14) $u := x+y-xy$, und in das zweite Integral dieser Formel $v := xy$, bekommen wir die Ungleichung

$$\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(u)du + \frac{1}{x}\int_0^x f(v)dv \leq f(x) + a, \tag{15}$$

wobei a die Formel (13) erfüllt. Es sei

$$h(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Aus der Stetigkeit der Funktion f folgt die Differenzierbarkeit der Funktion h und gilt die Gleichheit

$$h'(x) = f(x), \qquad x \in (0,1). \tag{16}$$

Weiter haben wir

$$a - h(x) = \int_x^1 f(t)dt.$$

Daraus und (15) bekommen wir die Differentialungleichung

$$h'(x) \geq \frac{1-2x}{x(1-x)}h(x) + \frac{ax}{1-x}, \qquad x \in (0,1). \tag{17}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\varphi'(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}\varphi(x) + \frac{ax}{1-x}, \qquad x \in (0,1),$$

wobei a durch (13) definiert ist, hat Gestalt

$$\varphi(x) = ax + c(x - x^2), \qquad x \in (0,1),\ c \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Bezeichnen wir

$$\varphi_0(x) = x - x^2, \qquad \varphi_1(x) = ax, \qquad x \in (0,1).$$

Dann ist φ_0 positiv in I. Wegen des Hilfsatzes 1 bekommen wir die Formel

$$h(x) = n(x)(x - x^2) + ax, \qquad x \in (0,1), \tag{19}$$

wobei $n : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine echt monoton wachsende Funktion ist. Aus (6), (11), und (18) folgt die Differentialbarkeit der Funktion n in (19). Die Formel (12) bekommen wir aus (19) und (16).

Legend in (12) $x = 0,5$ haben wir wegen (13):

BEMERKUNG 2. *Wenn $f \in K$ und f die Ungleichung* (1) *erfüllt, so gilt*

$$\int_0^1 f(t)dt \leq f(0,5). \tag{20}$$

Die Ungleichung *(20)* ist ein besonderer Fall der Jensenischen Integralungleichung (21) (s. [1], [2]).

Beachten wir auch, daß in der Arbeit [2] der folgende Satz bewiesen wurde:

HILFSATZ 2. *Es seien* $x : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *eine wachsende Funktion, und* $G : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit* $G(a) = 0$. *Jede stetige, Wright-konvexe Funktion erfüllt die Jensenische Integralungleichung*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))dG(t) \geq f\left(\int_{\alpha}^{\beta} x(t)dG(t)\right) \tag{21}$$

dann und nur dann, wenn $G(b) = 1$ *und die Ungleicheiten*

$$\int_{\alpha}^{\tau} G(t)dx(t) \geq 0, \quad \textit{für jedes} \quad [\alpha, \tau) \subset [\alpha, \beta\},$$

$$\int_{\alpha}^{\tau} 1 - G(t)dx(t) \geq 0, \quad \textit{für jedes} \quad [\tau, \beta\} \subset [\alpha, \beta)$$

gelten.

Wir nehmen in (21) $\alpha = 0, \beta = 1, x(t) := G(t) := t,\ t \in [0, 1]$, an, dann bekommen wir die Ungleichung (20) für beliebige stetige Wright-konkave Funktionen $f : [\alpha, b) \to \mathbb{R}$. Also (20) gilt nicht nur für stetige, konkave Funktionen, aber auch für die stetigen Lösungen von (1), die keine konkave Funktionen sind. Daraus folgt der folgende Satz:

SATZ 6. *Jede stetige Lösung der Hosszúfunktionalungleichung erfüllt Jensenische Integralungleichung.*

Für die am Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ definierten, konkaven Funktionen haben wir die folgende Verallgemeinerung der Ungleichung (20).

SATZ 7. *Wenn* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *eine konkave, stetige Funktion ist, und das Integral* $\int_a^b f(x)dx$ *existiert, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \tag{22}$$

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle:

(i) f ist die beschränkte Funktion im Intervall (a, b),

(ii) f ist unbeschränkte Funktion im Intervall (a, b).

Im Fall (i) nehmen wir die Transformation

$$t \in (0, 1) \to (b - a)t + a \in (a, b).$$

Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f((b-a)t+a)(b-a)dt.$$

Es sei $g(t) := f((b-a)t+a)$, $t \in (0,1)$. Wegen der Voraussetzungen ist die Funktion $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ die konkave, stetige und beschränkte Funktion, die die Ungleichung (1) erfüllt (Satz 1), und das Integral $\int_0^1 g(t)dt$ existiert. Also gilt es wegen der Bemerkung 2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f((b-a)t+a)(b-a)dt = (b-a)\int_0^1 g(t)dt.$$

Daraus und aus der Ungleichung (20) bekommen wir weiter

$$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)g(0,5) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Im Fall (ii) nehmen wir an, daß die Funktion f in der Umgebung der Zahl b unbeschränkt ist. Dann betrachten wir die Folge der Intervallen $I_n = (a, b_n]$, wobei $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Dann ist die Funktion f in jedem Intervall I_n beschränkt und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(x)dx$$

Wegen (22) haben wir weiter

$$\int_a^{b_n} f(x)dx \le (b_n-a)f(0,5(b_n+a)), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Es sei $n \to +\infty$, dann $b_n \to b$ und aus (23) bekommen wir die Ungleichung (22). Wenn die Funktion f in der Ungebung der Zahl a umbeschränkt ist, so ist der Beweis ähnlich.

Literatur

[1] Brunk H. D., *On an inequality for convex functions,* Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 817-824.

[2] Brunk H. D., *Integral inequaqlities for functions with nondecreasing incremens,* Pacific J. Math. **14** (1964), 783-793.

[3] Brydak D., *Applications of generalized convex functions to second order differential inequalities,* General Inequalities 4 (Proceedings of the Symposium, Oberwolfach, 1983), W. Walter (ed.), International Series of Numerical Mathematics Vol. 71, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1984, 297-305.

[4] Daróczy Z., *Über die Funktionalgleichung $f(xy) + f(x+y-xy) = f(x) + f(y)$,* Publicationes Math. **16** (1969), 129-132.

[5] Daróczy Z., *Problem 2*, Proceedings of II International Conference on Functional Equations and Inequalities, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **12** (1987), 223.

[6] Kominek Z., *Remark on the Hosszú's inequality,* Procedings of II International Conference on Functional Equations and Inequalities, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **12** (1987), 232-233.

[7] Kuczma M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauch's Equation and Jensens Inequality,* PWN, Uniwersytet Śląski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.

[8] Lajko K., *Remarks on the Hosszú functionsl equation,* Procedings of II International Conference on Functional Equations and Inequalities, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **12** (1987), 192-193.

[9] Nikodem K., *Remark to Z. Daróczy's Problem 2,* Procedings of II International Conference on Functional Equations and Inequalities, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **12** (1987), 233-234.

[10] Maksa Gy., Páles Zs., *On Hosszú's functional inequality,* Publicationes Math. **36** (1985), 187-189.

[11] Pecaric J. E., *Two remarks on Hosszú's funktionl inequality,* Publicationes Math. **40** (1992), 243-244.

Institut der Mathematik
Pädagogische Hochschule
Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Polen

Manuscript received Mai 22, 1996