FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Antoni Chronowski, Joanna Major, Zbigniew Powązka

O różnych sposobach definiowania wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

Abstract. In this article we present some didactic ideas of introducing the absolute value of a real number by means of functional equations and an inequality. The basic properties of the absolute value of a real number are written as functional equations and an inequality. The function "absolute value" is a solution of a suitable functional equation or an inequality.

Niniejsza praca stanowi kontynuację rozważań nad pogłębieniem rozumienia pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej na różnych poziomach kształcenia matematycznego. W artykule (Major, Powązka, 2006) przedstawiono problemy dotyczące istnienia rozwiązań równań z wartością bezwzględną oraz warunków koniecznych i wystarczających istnienia tych rozwiązań. Obecny artykuł zawiera przykłady koncepcji dydaktycznych wprowadzenia definicji wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. W koncepcjach tych wykorzystano równania i nierówności funkcyjne jednej albo dwu zmiennych. Podane tu propozycje dydaktyczne przeznaczone są zarówno dla nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych, jak i nauczycieli akademickich oraz studentów kierunków nauczycielskich studiów matematycznych.

W czasie nauki uczniowie poznają różne definicje wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Definicje te bazują na pojęciu odległości punktów na osi liczbowej, maksimum dwóch liczb rzeczywistych czy pierwiastka stopnia drugiego liczby nieujemnej. Za pomocą wartości bezwzględnej liczb rzeczywistych możemy określić funkcję „wartość bezwzględna" wzorem: $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$. W szkole ponadgimnazjalnej uczniowie poznają podstawowe własności wartości bezwzględnej liczb rzeczywistych, które w symbolice funkcyjnej możemy zapisać następująco:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$\phi(\phi(x)) = \phi(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$\phi(a \cdot x) = a \cdot \phi(x) \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}; \tag{3}$$

$$\phi(x + y) \leqslant \phi(x) + \phi(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Pokażemy, że przy pewnych założeniach można scharakteryzować funkcję $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\phi(x) = |x| \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

jako jedyne rozwiązanie równań funkcyjnych (1), (2), (3) lub nierówności funkcyjnej (4).

Poniżej przedstawiamy osiem propozycji wprowadzenia funkcji „wartość bezwzględna". Propozycje 1, 2 i 8 wykorzystują multyplikatywne równanie Cauchy'ego, w propozycji 3 rozważa się równanie iteracyjne funkcji jednej zmiennej, propozycja 4 oparta jest na pojęciu jednorodności funkcji, a w propozycji 5 zakłada się warunek naturalnej jednorodności funkcji podaddytywnej. W propozycjach 6 i 7 dyskutuje się rozwiązania układów dwóch spośród trzech równań (1), (2) i (3).

Propozycja 1

W tej części scharakteryzujemy funkcję (5) przy pomocy równania (1). Wykorzystamy uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego, cytowane tu jako lemat 1.

Lemat 1 (Kuczma[1])
Niech D oznacza jeden ze zbiorów:

$$D = (0,1), \quad D = [0,1), \quad D = (-1,1), \quad D = (-1,0) \cup (0,1),$$

$$D = (1,+\infty), \quad D = (0,+\infty), \quad D = [0,+\infty),$$

$$D = (-\infty,0) \cup (0,\infty), \quad D = \mathbb{R}.$$

Funkcja $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ jest ciągłym rozwiązaniem równania (1) *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\phi(x) = 0 \quad \textit{lub } \phi(x) = 1, \quad \textit{lub } \phi(x) = |x|^c, \quad \textit{lub } \phi(x) = |x|^c \operatorname{sgn}(x), \tag{6}$$

dla $x \in D$, gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą. Ponadto jeżeli $0 \in D$, to $c > 0$.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2
W klasie funkcji $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedynym niestałym, nieujemnym i ciągłym rozwiązaniem równania (1) *spełniającym warunek*

$$\phi(a) = a, \tag{7}$$

gdzie a jest pewną ustaloną liczbą ze zbioru $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, jest funkcja $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

[1]por. (Kuczma, 1985, s. 308)

Dowód. Niech $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie niestałym, nieujemnym i ciągłym rozwiązaniem równania (1). Z lematu 1 wynika, że:

$$\phi(x) = |x|^c \quad \text{lub} \quad \phi(x) = |x|^c \operatorname{sgn}(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Kładąc w (8) $x = a$ z warunku (7), dostajemy:

$$a = \phi(a) = |a|^c \quad \text{lub} \quad a = \phi(a) = |a|^c \operatorname{sgn}(a).$$

Ponieważ $a > 0$ i $a \neq 1$, więc $a^c = a$, a stąd $c = 1$. Zatem z warunku (8) wynika, że:

$$\phi(x) = |x| \quad \text{lub} \quad \phi(x) = |x| \operatorname{sgn}(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Z założenia funkcja ϕ przyjmuje wartości nieujemne, więc ostatecznie zachodzi (5).

Uwaga 1
Zauważmy, że założenie (7) w twierdzeniu 1 jest istotne. Rzeczywiście, rozważmy funkcję $\phi(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niestałym, nieujemnym i ciągłym rozwiązaniem równania (1).

Propozycja 2

Inną charakteryzację wartości bezwzględnej zawiera następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3
W klasie funkcji $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedynym niestałym i ciągłym rozwiązaniem równania (1) *spełniającym warunek*

$$\phi(a) = \phi(-a) = a, \tag{9}$$

gdzie a jest pewną ustaloną liczbą ze zbioru $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, jest funkcja $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Najpierw uzasadnimy, że funkcja ϕ przyjmuje jedynie wartości nieujemne. Jeżeli $x \in [0, +\infty)$, to $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$. Stąd i z (1) otrzymujemy

$$\phi(x) = \phi(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = \phi(\sqrt{x}) \cdot \phi(\sqrt{x}) = \phi(\sqrt{x})^2 \geqslant 0. \tag{10}$$

Przypuśćmy, że istnieje liczba $x_0 < 0$ taka, że

$$\phi(x_0) < 0. \tag{11}$$

Niech $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ będzie liczbą spełniającą warunek (9). Z (1), (9) i (10) wynika, że

$$a\phi(x_0) = \phi(ax_0) = \phi((-a)(-x_0)) = a\phi(-x_0) \geqslant 0. \tag{12}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie 1.

Propozycja 3

Udowodnimy twierdzenie 3 ukazujące kolejną możliwość charakteryzacji funkcji (5).

Twierdzenie 4
Niech $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *będzie funkcją parzystą spełniającą równanie* (2) *i różnowartościową na zbiorze* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. *Wtedy* $\phi(x) = |x|$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Jeżeli $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, to $\phi(x) = x$ na mocy (2). Z parzystości funkcji ϕ wynika, że $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga 2
(a) Z parzystości funkcji ϕ wynika bezpośrednio, że jeżeli w twierdzeniu 3 założymy różnowartościowość funkcji ϕ na zbiorze $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, zamiast różnowartościowości na zbiorze $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, to także twierdzenie będzie prawdziwe.
(b) Jeżeli w twierdzeniu 3 zamiast założenia, że $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ przyjmiemy założenie, że $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to otrzymane twierdzenie jest fałszywe. Istotnie, rozważmy funkcję:

$$\phi(x) = \begin{cases} x \text{ dla } x \geqslant 0 \text{ i } x \in Q, \\ -x \text{ dla } x \geqslant 0 \text{ i } x \in \mathbb{R} \setminus Q, \\ -x \text{ dla } x < 0 \text{ i } x \in Q, \\ x \text{ dla } x < 0 \text{ i } x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ϕ jest parzysta, spełnia równanie (2) i jest różnowartościowa na zbiorze $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Propozycja 4

Poniższa propozycja dotyczy charakteryzowania funkcji (5) poprzez równanie funkcyjne (3).

Twierdzenie 5
W klasie funkcji $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jedynym parzystym rozwiązaniem równania* (3) *spełniającym warunek*

$$\phi(1) = 1 \tag{13}$$

jest funkcja $\phi(x) = |x|$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Kładąc $x = 1$ w równaniu (3), otrzymujemy $\phi(a \cdot 1) = a\phi(1)$, co wobec warunku (13) daje $\phi(a) = a$ dla $a \in R^+$. Niech $x = 0$ i $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Wtedy wobec założenia, że ϕ spełnia (3) otrzymujemy $\phi(0) = \phi(a \cdot 0) = a\phi(0)$, czyli $\phi(0) \cdot (1-a) = 0$, a więc $\phi(0) = 0$. Ostatecznie, $\phi(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, co wobec parzystości funkcji ϕ daje tezę twierdzenia.

Propozycja 5

Jedną z ważnych klas funkcji są funkcje *podaddytywne*, tzn. spełniające warunek (4). Wykorzystamy ten warunek do scharakteryzowania funkcji (5).

Z twierdzenia 3 (Kuczma, 1985, s. 415) otrzymujemy jako wniosek następujące twierdzenie o funkcjach spełniających warunek (4).

Twierdzenie 6
Niech $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją podaddytywną spełniającą warunek

$$\phi(nx) = n\phi(x) \tag{14}$$

dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ i $n \in N$. Wtedy istnieją liczby rzeczywiste a i b takie, że

$$\phi(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \geqslant 0, \\ bx & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

przy czym $a \geqslant b$.

Twierdzenie 7
Niech $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie parzystą funkcją ciągłą spełniającą nierówność (4), *równość* (14) *i następujący warunek:*

$$\phi(1) = 1. \tag{15}$$

Wtedy $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Z twierdzenia 6 wynika, że istnieje liczba rzeczywista a taka, że $\phi(x) = ax$ dla $x \geqslant 0$. Z warunku (15) wynika, że $a = 1$, czyli $\phi(x) = x$ dla $x \geqslant 0$. Stąd i z parzystości funkcji ϕ wynika, że $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Propozycja 6

Niniejsza propozycja podaje charakteryzację funkcji (5) za pomocą dwóch równań funkcyjnych (1) i (2). Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8
Jedyną niestałą i ciągłą funkcją $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ spełniającą równania (1) *i* (2) *jest funkcja $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Przyjmijmy, że $A = \phi(\mathbb{R})$. Stąd $A \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ponieważ spełnione jest równanie (2), więc $\phi(x) = x$ dla każdego $x \in A$. Ponieważ funkcja ϕ nie jest stała, więc $A \neq \{0\}$ i $A \neq \{1\}$. Ponadto $A \neq \{0, 1\}$, gdyż funkcja ϕ jest ciągła. Zatem istnieje liczba rzeczywista $a \in A$ taka, że $\phi(a) = a$ i $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Z twierdzenia 1 wynika, że $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Propozycja 7

Niniejsza propozycja podaje charakteryzację funkcji (5) za pomocą dwóch równań funkcyjnych (1) i (3).

TWIERDZENIE 9
W klasie niestałych i ciągłych funkcji $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *jedynym rozwiązaniem spełniającym równania* (1) *oraz* (3) *jest funkcja* $\phi(x) = |x|$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. Niech $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ będzie niestałym i ciągłym rozwiązaniem równań (1) i (3). Zatem

$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) \quad \text{dla} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\phi(ax) = a\phi(x) \quad \text{dla} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dostajemy stąd

$$\phi(a)\phi(x) = a\phi(x),$$

czyli

$$\phi(x)(\phi(a) - a) = 0 \quad \text{dla} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Z faktu, że funkcja ϕ jest niestałym rozwiązaniem rozważanych równań wynika, że istnieje liczba $x_0 \in \mathbb{R}$ taka, że $\phi(x_0) \neq 0$. Połóżmy w (16) $x = x_0$ i $a \neq 1$. Wtedy z (16) otrzymujemy $\phi(x_0)(\phi(a) - a) = 0$, stąd $\phi(a) = a$. Funkcja ϕ spełnia zatem założenia twierdzenia 1, a więc jest postaci $\phi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

UWAGA 3
Zauważmy, że żadna z trzech par warunków (2) i (3), (2) i (4), (3) i (4) nie charakteryzuje funkcji (5). Świadczą o tym następujące przykłady:
a) Funkcja

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x < 0, \\ x \text{ dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

spełnia każdy z warunków (2), (3) oraz (4) i nie jest postaci (5).
b) Funkcja

$$\phi(x) = \sqrt{|x|}, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R},$$

spełnia warunki (1) i (4), ale nie jest funkcją (5).

Propozycja 8

Pojęcie wartości bezwzględnej można definiować w ogólniejszych strukturach niż zbiór liczb rzeczywistych. Definiujemy moduł liczby zespolonej $z = x + iy$ za pomocą wzoru $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 10
Jedyne ciągłe rozwiązanie $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *równania*

$$\phi(z_1 \cdot z_2) = \phi(z_1) \cdot \phi(z_2) \quad \textit{dla } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{17}$$

spełniające warunki

$$\phi(\varepsilon) = 1, \quad \textit{gdy } |\varepsilon| = 1 \tag{18}$$

oraz

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \;\; \phi(a) = a,$$

jest dane wzorem

$$\phi(z) = |z|$$

dla $z \in \mathbb{C}$.

Dowód. Określamy funkcję

$$\varphi(x) \colon = \phi(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że φ jest niestałym, nieujemnym i ciągłym rozwiązaniem równania (1), a więc z twierdzenia 1 wynika, że $\varphi(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$. Niech $z \in \mathbb{C}$, a więc $z = |z|\varepsilon$. Na podstawie (17) i (18) zachodzą równości $\phi(z) = \phi(|z|\varepsilon) = \phi(|z|)\phi(\varepsilon) = \phi(|z|) = \varphi(|z|) = ||z|| = |z|$, co dowodzi prawdziwości twierdzenia 9.

Podsumowując rozważania prowadzone w pracy, warto zauważyć, że wykazano tu m.in., iż przy pewnych dodatkowych, i jak się nam wydaje, dość naturalnych założeniach każdy z warunków z osobna (1), (2), (3), (4) pozwala charakteryzować funkcję „wartość bezwzględna".

Przedstawione wyżej zagadnienia mogą stać się inspiracją do formułowania i dowodzenia dalszych twierdzeń o wartości bezwzględnej. W tym upatrujemy ich wartość dydaktyczną, praca nad tego typu problemami może bowiem przyczynić się do rozbudzania twórczej aktywności wśród młodzieży szkół ponadgimnazjalnych, jak również studentów kierunków matematycznych. Warto tu zauważyć, że większość z przedstawionych w tej pracy zagadnień można uogólniać.

Literatura

Kuczma, M.: 1985, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN, Warszawa, Kraków, Katowice.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: chron@ap.krakow.pl
e-mail: jmajor@ap.krakow.pl
e-mail: powazka@ap.krakow.pl