FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Maciej Klakla, Renata Liszka, Vladimir Mityushev

Wprowadzenie funkcji trygonometrycznych przez szeregi Eisensteina

Abstract. In the paper we describe how to introduce the trigonometric functions using their functional characteristics and the Eisenstein series.

1. Wprowadzenie

W programie analizy matematycznej studiów nauczycielskich wprowadza się funkcje trygonometryczne za pomocą szeregów potęgowych. Znane są także inne sposoby wprowadzania funkcji trygonometrycznych, o których student — przyszły nauczyciel matematyki powinien wiedzieć.

W niniejszym artykule funkcje trygonometryczne są wprowadzone za pomocą szeregów Eisensteina. Fakt, że jednowymiarowe szeregi Eisensteina są związane z funkcjami trygonometrycznymi, jest znany (Weil, 1976). Ale pytanie, czy można wprowadzić funkcje trygonometryczne poprawnie wyłącznie przez szeregi Eisensteina, zostało dopiero rozwiązane w niniejszym artykule.

W punkcie 2. krótko opisujemy teorię Nowosiołowa funkcji trygonometrycznych (Nowosiołow, 1956) opartą na równaniach funkcyjnych. W punkcie 3. są podane podstawy teorii jednowymiarowych szeregów Eisensteina. Dowód poprawności wprowadzenia funkcji trygonometrycznych przez szeregi Eisensteina, oparty na rezultatach Nowosiołowa (Nowosiołow, 1956) został przeprowadzony w punkcie 4.

2. Funkcje trygonometryczne a równania funkcyjne

S. I. Nowosiołow (1956, s. 419-421) określa aksjomatycznie funkcje trygonometryczne jako: „funkcje mające pewne ściśle sformułowane własności charakterystyczne, na podstawie których mogą być ustalone wszystkie pozostałe własności tych funkcji”, w następujący sposób.

Definicja 2.1
Cosinusem $C(x)$ i *sinusem* $S(x)$ nazywamy funkcje, które spełniają następujące warunki:

1) są określone dla wszystkich rzeczywistych wartości x,
2) spełniają równanie funkcyjne

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$,
3) są dodatnie w przedziale $(0, \lambda)$, gdzie λ jest pewną liczbą dodatnią, tzn.

$$C(x) > 0, \qquad S(x) > 0, \quad \text{gdy} \quad x \in (0, \lambda),$$

4) w punktach końcowych przedziału $(0, \lambda)$ zachodzą następujące równości:

$$C(0) = S(\lambda) = 1.$$

Jak pokazano w pracy (Nowosiołow, 1956), na podstawie warunków podstawowych 1-4 można aksjomatycznie wprowadzić funkcje trygonometryczne. Wartość $\lambda = \frac{\pi}{2}$ w teorii Nowosiołowa odpowiada standardowym funkcjom sinus i cosinus.

3. Jednowymiarowe szeregi Eisensteina

Definicja 3.1
Jednowymiarowym szeregiem Eisensteina nazywa się następujący szereg funkcyjny

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\mu)^n}, \quad n = 1, 2, 3... \tag{1}$$

gdzie $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ oraz $x \notin \mathbb{Z}$.

Definicja 3.2
Sumowaniem według Eisensteina nazywamy następujący sposób obliczenia sumy nieskończonej

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} = \lim_{M \to +\infty} \sum_{\mu=-M}^{+M}.$$

Jeżeli szereg sumujemy według Eisensteina i jest on zbieżny, to mówimy, że szereg jest zbieżny według Eisensteina. Dalej będziemy korzystać z następujących twierdzeń przedstawionych szczegółowo w książce (Weil, 1976).

Twierdzenie 3.3
i) Szereg (1) *przy* $n = 1$ *jest zbieżny według Eisensteina na zbiorze* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ *oraz*

$$\varepsilon_1(x) > 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

ii) Szereg (1) *dla* $n \geqslant 2$ *jest bezwzględnie i prawie jednostajnie zbieżny na zbiorze* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

iii) Dla $\varepsilon_1(x)$ *i* $\varepsilon_2(x)$ *zachodzi następujący związek różniczkowy:*

$$\varepsilon_1'(x) = -\varepsilon_2(x), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{3}$$

iv) Dla szeregów $\varepsilon_1(x)$ *i* $\varepsilon_2(x)$ *zachodzi następujący związek algebraiczny:*

$$\varepsilon_2(x) = \varepsilon_1^2(x) + \pi^2, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{4}$$

v) Jest spełniona równość

$$\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y) = \varepsilon_2(x+y)[\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y)]^2, \quad x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{5}$$

vi) Szereg Eisensteina $\varepsilon_2(x)$ *i funkcja* $\operatorname{ctg}(\pi x)$ *są związane w następujący sposób*

$$\varepsilon_1(x) = \pi \operatorname{ctg} \pi x, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{6}$$

vii) Szereg Eisensteina $\varepsilon_1(x)$ *i funkcja* $\sin(\pi x)$ *są związane w następujący sposób*

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}. \tag{7}$$

viii) Ma miejsce wzór

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \sqrt{\varepsilon_2(x)}, \quad 0 < x < 1. \tag{8}$$

ix) Funkcje $\varepsilon_1(x)$ *i* $\varepsilon_2(x)$ *są okresowe o okresie 1.*

Lemat 3.4
Zachodzi tożsamość

$$\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) = \sqrt{\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)}, \quad x, y \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Dowód. Najpierw zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie co wynika z równości (2).

Po pomnożeniu pierwszego wyrażenia w nawiasie przez $\varepsilon_2(y)$, a drugiego przez $\varepsilon_2(x)$, otrzymujemy:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)} = \sqrt{(\varepsilon_2(y) - \pi^2)(\varepsilon_2(x) - \pi^2)},$$

co wobec (4) i (2) jest równe $\sqrt{\varepsilon_1^2(y)\varepsilon_1^2(x)} = \varepsilon_1(y)\varepsilon_1(x)$, a więc otrzymaliśmy lewą stronę równania (9).

Lemat został udowodniony.

4. Funkcje trygonometryczne a szeregi Eisensteina

Wzór (6) można przyjąć za podstawę do definicji funkcji cotangens. W ten sposób otrzymujemy inne podejście do wprowadzenia funkcji trygonometrycznych.

DEFINICJA 4.1
Funkcją cotangens nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\pi}\varepsilon_1\left(\frac{x}{\pi}\right) \tag{10}$$

dla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wiemy, że szereg $\varepsilon_1(x)$ jest funkcją o dziedzinie $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, okresową o okresie równym 1. Stąd dziedzina funkcji $\operatorname{ctg}(x)$ jest $\mathbb{R}\backslash\ \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, a okres tej funkcji wynosi π zgodnie z ix) w twierdzeniu 3.3.

Rozpatrzmy teraz funkcję tangens i cotangens. Zachodzi równość

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Korzystając z ostatniej zależności, wprowadzamy tangens w następujący sposób:

DEFINICJA 4.2
Funkcją tangens nazywamy

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\pi}\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) \tag{11}$$

dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do wyznaczenia dziedziny funkcji tangens wykorzystamy własności funkcji ε_1. Łatwo zauważyć, iż

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) = \infty.$$

Z powyższego faktu, oraz z tego, że funkcja ε_1 jest określona dla $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ wnioskujemy, że dziedziną funkcji tangens jest zbiór $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Korzystając z tożsamości (7), potrafimy za pomocą szeregów Eisensteina zdefiniować funkcję sinus.

DEFINICJA 4.3
Funkcją sinus nazywamy

$$\sin x = \frac{2\pi}{\varepsilon_1\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \varepsilon_1\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)}. \tag{12}$$

Dziedziną funkcji $\sin x$ jest zbiór liczb $\mathbb{R}$ (co później będzie udowodnione). Okresem funkcji sinus jest 2π, co wynika z twierdzenia 3.3 (patrz punkt ix)).

Rozpatrzmy tożsamość trygonometryczną

$$\cos 2\pi x = 1 - 2\sin^2 \pi x. \tag{13}$$

Korzystając z zależności (8) i podnosząc ją obustronnie do kwadratu, otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)} = \sin^2 \pi x, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Korzystając z twierdzenia 3.3, można uzasadnić, że równość w warunku (14) jest spełniona dla $x \in \mathbb{R}$. Otrzymaną zależność podstawiamy do (13), korzystając z (4). Wówczas cosinus można wprowadzić w następujący sposób.

Definicja 4.4

Funkcją cosinus nazywamy

$$\cos x = 1 - 2\frac{\pi^2}{\varepsilon_1^2\left(\frac{x}{2\pi}\right) + \pi^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Dziedziną funkcji cosinus jest zbiór $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.5

Zachodzi następująca tożsamość:

$$\cos^2 \pi x = 1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}. \tag{16}$$

Dowód. Dla dowodu posługujemy się zależnością (14), jak również znaną następującą tożsamością: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$. Wykorzystując (10), otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(\pi x) = \frac{\pi}{\varepsilon_1(x)}.$$

Otrzymaną zależność różniczkujemy obustronnie ze względu na zmienną x

$$\frac{\pi}{\cos^2(\pi x)} = \pi\frac{-\varepsilon_1^{'}(x)}{\varepsilon_1^2(x)}.$$

Korzystając z (3) i dokonując przekształceń ostatniego równania, otrzymujemy

$$\cos^2(\pi x) = \frac{\varepsilon_1^2(x)}{\varepsilon_2(x)}.$$

Korzystając dalej z (4), mamy

$$\cos^2(\pi x) = \frac{\varepsilon_2(x) - \pi^2}{\varepsilon_2(x)},$$

co jest równoważne równości (16).

Twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie 4.6
Funkcje sinus i cosinus wprowadzone przez szeregi Eisensteina spełniają tożsamość

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Dowód. W dalszym ciągu będą przedstawiane tylko przejścia równoważne. Rozpatrzmy równość (5), podnosząc do kwadratu wyrażenie w nawiasie po prawej stronie tej równości oraz dodając i odejmując $2\pi^2$, mamy:

$$\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y) = \varepsilon_2(x+y)[\varepsilon_1^2(x) + \pi^2 - 2\pi^2 + 2\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) + \varepsilon_1^2(y) + \pi^2]. \tag{18}$$

Korzystając ze wzoru (4), otrzymujemy:

$$\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y) = \varepsilon_2(x+y)[\varepsilon_2(y) - 2\pi^2 + 2\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) + \varepsilon_2(x)]. \tag{19}$$

Ostatni wzór można zapisać w postaci

$$\frac{\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)}{\varepsilon_2(x+y)} = \left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\varepsilon_2(y) + \left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x) + 2\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y).$$

Podstawiając za $\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y)$ prawą stronę (9), mamy:

$$\frac{\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)}{\varepsilon_2(x+y)} = \left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\varepsilon_2(y) + \left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x)$$
$$+ 2\sqrt{\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)}.$$

Pierwiastkując obustronnie ostatnią równość, otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2(x)\varepsilon_2(y)}{\varepsilon_2(x+y)}} = \sqrt{\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}\right)\varepsilon_2(y)} + \sqrt{\left(1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}\right)\varepsilon_2(x)}.$$

Mnożąc obie strony przez π, jednocześnie dzieląc przez $\sqrt{\varepsilon_2(x)}$ oraz $\sqrt{\varepsilon_2(y)}$, mamy:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_2(x+y)}} = \frac{\pi\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(y)}}}{\sqrt{\varepsilon_2(x)}} + \frac{\pi\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_2(x)}}}{\sqrt{\varepsilon_2(y)}}. \tag{20}$$

Korzystając z (16) oraz (8), otrzymujemy (17).

Twierdzenie zostało udowodnione.

Z (14) wynika, że

$$\sin 0 = 0, \tag{21}$$

gdyż $\varepsilon_2(x) = \infty$. Analogicznie

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \tag{22}$$

co wynika ze wzoru (16) przy $x = \frac{1}{2}$ oraz z równości

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2} + m)^2} = \pi^2. \tag{23}$$

Nierówność

$$\sin x > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < \pi \tag{24}$$

wynika ze wzoru (8).

Podstawimy do (14) $x = \frac{1}{2}$. Na mocy (23) uzyskujemy

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1. \tag{25}$$

Podstawimy do (17) $y = \frac{\pi}{2}$. Wówczas z (22) i (25) mamy

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x. \tag{26}$$

Skąd na mocy (21)–(24) wnioskujemy, że

$$\cos x > 0 \quad \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Wobec tego funkcje $\sin x$ i $\cos x$ wprowadzone przez szeregi Eisensteina spełniają wszystkie warunki wymagane w definicji Nowosiołowa dla $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (zob. punkt 2). Jest to dowód poprawności definicji sinus i cosinus zdefiniowanych za pomocą szeregu Eisensteina.

Literatura

Nowosiołow, S. I.: 1956, *Specjalny wykład trygonometrii*, PWN, Warszawa.

Weil, A.: 1976, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: smklakla@ap.krakow.pl
e-mail: vmityu@yahoo.com