FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Agata Matczyk, Vladimir Mityushev, Zbigniew Powązka

O zastosowaniu sumowania według Eisensteina do pewnej sumy podwójnej

Abstract. The lattice sum S_2 for the square array conditionally converges. Having used physical arguments, Rayleigh chose an order of summation in such a way that $S_2 = \pi$. The Eisenstein summation method applied to S_2 yields the same result. This paper is devoted to a rigorous proof of $S_2 = \pi$ for the Eisenstein summation method. The study can be used in class for students as an interesting example which illustrates different types of convergence.

1. Wprowadzenie w metodologię

Jednym z ważnych problemów dydaktyki matematyki jest uogólnianie pojęcia, twierdzenia lub zadania. Wyróżnia się dwa rodzaje takich uogólnień: przez rozpoznanie lub przez konstrukcję. Tego typu uogólnienia pojawiają się często w zastosowaniach matematyki do różnych zagadnień z nauk pokrewnych, np. z fizyki lub techniki. Stosowanie metod matematycznych w rozwiązywaniu zagadnień z różnych dziedzin może prowadzić do teoretycznego dowodu poprawności stosowanych od wielu lat metod postępowania w danej dziedzinie. Z taką sytuacją mamy do czynienia w niniejszej pracy. Dotyczy ona bowiem matematycznego dowodu równości

$$S_2 = \sum_{m,m'=1}^{\infty} \frac{1}{(m + im')^2} = \pi, \tag{1}$$

gdzie $m, m^{'} \in \mathbb{Z}$ oraz i oznacza jednostkę urojoną, która została uzasadniona już w roku 1892 przez Lorda Rayleigha (Rayleigh, 1892) na drodze czysto fizycznych rozważań. Artykuł ten adresowany jest przede wszystkim do studentów studiów matematycznych zajmujących się zastosowaniami matematyki w naukach technicznych. Może również zainteresować matematyków zajmujących się dydaktyką tego przedmiotu, gdyż jest, naszym zdaniem, ciekawym przykładem uogólnienia przez rozpoznanie metod znanych w klasycznej analizie matematycznej na przypadek funkcji zespolonych, określonych przy pomocy szeregów warunkowo zbieżnych.

Wszędzie w pracy zakładamy, że pod znakiem sumy (1) i w podobnych sumach m i m' nie są równe zero jednocześnie. Występującą we wzorze (1) sumę szeregu podwójnego definiuje następująca formuła:

$$S_2 = \lim_{N\to+\infty} \lim_{M\to+\infty} \sum_{-N}^{N} \sum_{-M}^{M} \frac{1}{(m+im')^2}\,. \tag{2}$$

Szereg (1) jest szczególnym przypadkiem szeregu

$$S_n = \sum_{m,m'=1}^{\infty} \frac{1}{(m+im')^n}, \tag{3}$$

który jest również podwójnym szeregiem zespolonym. W książce (Weil, 1976) udowodniono, że dla $n \geqslant 3$ szereg (3) jest bezwzględnie zbieżny, a dla $n = 2$ jest tylko zbieżny warunkowo.

Szeregami typu (3) zajmował się już w roku 1847 niemiecki matematyk Ferdinand Eisenstein (1821-1852) (Eisenstein, 1847). Nie znając wtedy pojęcia zbieżności warunkowej i bezwzględnej, zaproponował metodę sumowania, która nosi nazwę sumowanie według Eisensteina. Metodę tę opisuje wzór (2), który prowadzi do równości (1). Fakt ten znajduje wiele zastosowań w teorii materiałów kompozytowych (Mitiuszew, 1996), (Mityushev, 1995), (Mityushev, 1997). Dlatego niezbędny jest matematyczny dowód równości (1).

W naszych rozważaniach zastosujemy metodę sumowania pochodzącą od Eisensteina. Ta metoda ma bowiem swoje fizyczne umotywowanie związane z symetrią rozchodzenia się fal elektromagnetycznych lub strumienia cieplnego. W tym celu rozważymy prostokąt P, określony warunkiem $[-M, M] \times [-N, N]$ oraz zawarty w nim kwadrat $K = [-N, N] \times [-N, N]$, przy czym $M > N$. Następnie dowodzi się, że suma we wzorze (1) jest równa zero na kwadracie K, a na dopełnieniu tego kwadratu G_{NM} do prostokąta P może być traktowana jako suma Riemanna pewnej całki podwójnej.

Stosowane tu metody postępowania są osadzone głęboko w klasycznej analizie matematycznej. Jak wiadomo z rozważań dotyczących zbieżności warunkowej szeregów liczbowych o wyrazach rzeczywistych, ich suma może zależeć od sposobu sumowania. W naszym przypadku sumowanie oparte na sposobach stosowanych w fizyce prowadzi do dowodu równości (1) powszechnie stosowanej w praktyce.

Interesujący dydaktycznie jest również sposób obliczenia sumy podwójnego szeregu przez sprowadzenie go do całki podwójnej niewłaściwej z pominięciem osobliwości w zerze. Zwróćmy również uwagę na rolę symetrii w przeprowadzonych rozumowaniach.

2. Dowód podstawowego twierdzenia

W tej części pracy udowodnimy następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2.1
Szereg (1) *jest zbieżny w sensie Eisensteina* (2) *do liczby* π.

Rayleigh (1892) w artykule przedstawia ideę dowodu zbieżności tego szeregu. Przedstawimy ten dowód Rayleigha, uzupełniając pewne luki matematyczne.

Dowód. Wprowadźmy sumę skończoną

$$\sigma(N) := \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{(m+im')^2}. \tag{4}$$

Zauważmy, że $\sigma(N)$ nie zmienia się, jeśli zamiast $m+im'$ podstawić $i(m+im')$. Wynika to z tego, że geometrycznie mnożenie przez i oznacza obrót o kąt $90°$, a to nie zmienia kwadratu $K = [-N, N] \times [-N, N]$. Wówczas

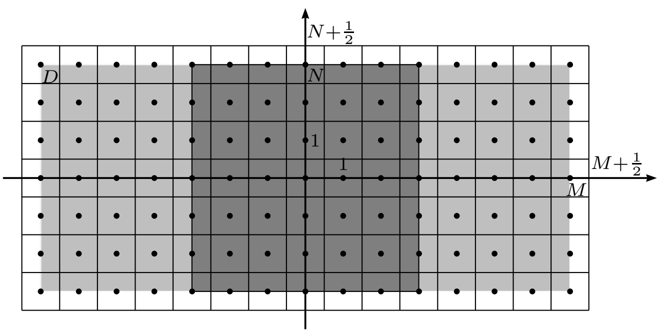
$$\sigma(N) = -\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{(m+im')^2}. \tag{5}$$

Z równań (4) i (5) wynika, że $\sigma(N) = 0$. Zatem

$$S_2 = \lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{m'=-N}^{N}\left(\sum_{m=-M}^{-N} + \sum_{m=N}^{M}\right)\frac{1}{(m+im')^2}. \tag{6}$$

Rozważmy całkę niewłaściwą odpowiadającą sumie (6):

$$I := \lim_{N\to+\infty}\lim_{M\to+\infty}\int_{-N}^{+N}\left(\int_{-M}^{-N}\frac{\mathrm{d}x}{(x+iy)^2} + \int_{N}^{M}\frac{\mathrm{d}x}{(x+iy)^2}\right)\mathrm{d}y. \tag{7}$$



Rysunek 1. Podział prostokąta P na małe kwadraty.

Niech P będzie prostokątem dla nieparzystych M i N (rysunek 1). Prowadzimy proste równoległe do prostej $M = 0$ przechodzące przez punkty $(-M-\frac{1}{2}, 0), (-M+\frac{1}{2}, 0), \ldots, (\frac{1}{2}, 0), (\frac{3}{2}, 0), \ldots, (M + \frac{1}{2}, 0)$. Podobnie prowadzimy proste równoległe do prostej $N=0$ przechodzące przez punkty $(0, -N-\frac{1}{2})$, $(0, -N+\frac{1}{2}), \ldots, (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{3}{2}), \ldots, (0, N+\frac{1}{2})$. Otrzymamy w ten sposób podział prostokąta P na kwadraty. Niech $D = P\backslash K$, tzn. D składa się z dwóch prostokątów (patrz rysunek 1). Pole każdego małego kwadratu jest równe 1. Wybieramy w każdym kwadracie punkt $m + im'$ taki, że $m, m' \in \mathbb{Z}$. Rozważmy całkę

$$I_{NM} = \iint\limits_{G_{NM}} \frac{dxdy}{(x+iy)^2}. \tag{8}$$

Suma Riemanna całki (8) ma składniki postaci

$$\frac{1}{(m+im')^2} \cdot |D_{m,m'}| = \frac{1}{(m+im')^2},$$

gdzie pole każdego małego kwadratu równe jedności: $|D_{m,m'}| = 1$. Wobec tego S_2 ma być równe $\lim\limits_{N\to\infty} \lim\limits_{M\to\infty} I_{NM}$. Zatem mamy następującą równość:

$$S_2 = \lim_{N\to+\infty} \lim_{M\to+\infty} \int\limits_{-N}^{+N} \left(\int\limits_{-M}^{-N} \frac{\mathrm{d}x}{(x+iy)^2} + \int\limits_{N}^{M} \frac{\mathrm{d}x}{(x+iy)^2} \right) \mathrm{d}y. \tag{9}$$

Najpierw obliczymy sumę całek, które są w nawiasie:

$$\int\limits_{-M}^{-N} \frac{dx}{(x+iy)^2} + \int\limits_{N}^{M} \frac{dx}{(x+iy)^2} = \frac{1}{-M+iy} - \frac{1}{-N+iy} + \frac{1}{N+iy} - \frac{1}{M+iy}$$
$$= \frac{2N}{y^2+N^2} - \frac{2M}{y^2+M^2}.$$

Teraz już łatwo dostajemy, że

$$\int\limits_{-N}^{+N} \left(\frac{2N}{y^2+N^2} - \frac{2M}{y^2+M^2} \right) dy = 2\arctan \frac{y}{N}\Big|_{-N}^{N} - 2\arctan \frac{y}{M}\Big|_{-N}^{+N}.$$

Korzystając z tego, że arcus tangens jest funkcją nieparzystą, otrzymujemy

$$I_{NM} = 2\arctan \frac{y}{N}\Big|_{-N}^{N} - 2\arctan \frac{y}{M}\Big|_{-N}^{+N} = 4\arctan 1 - 4\arctan \frac{N}{M}. \tag{10}$$

Zgodnie ze wzorem (9) mamy

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \left(4\arctan 1 - 4\arctan \frac{N}{M} \right) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Wątpliwości co do prawidłowości tej równości nasuwają się z powodu aproksymacji całki niewłaściwej przez sumę Riemanna na całej płaszczyźnie (obszarze nieograniczonym). W celu uniknięcia tej nieścisłości przeprowadźmy bardziej formalny dowód równości (1).

Ustalmy stosunek $\varepsilon = \frac{N}{M}$, czyli kształt prostokąta P. Wprowadźmy sumę

$$S_2(N,M) := \sum_{\frac{-N}{\delta}}^{\frac{N}{\delta}} \left(\sum_{-\frac{M}{\delta}}^{-\frac{N}{\delta}} + \sum_{\frac{N}{\delta}}^{\frac{M}{\delta}} \right) \frac{\delta^2}{(m\delta + im'\delta)^2}, \tag{11}$$

gdzie $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$. Przy $\delta \to 0$ mamy $S_2(N,M) \to I_{NM}$ jako zwykła suma Riemanna $S_2(N,M)$ całki podwójnej I_{NM}. Na mocy (10) całka I_{NM} jest poprawnie określona, ponieważ $\varepsilon = \frac{N}{M}$ jest ustalone. Wobec tego mamy

$$\lim_{\delta \to 0} S_2(N,M) = \lim_{N,M\to\infty} \sum_{-N}^{N} \left(\sum_{-M}^{-N} + \sum_{N}^{M} \right) \frac{1}{(m+im')^2} = \pi - 4\arctan\varepsilon. \tag{12}$$

Załóżmy, że stosunek $\frac{N}{M}$ w granicy (12) jest ustaloną liczbą, którą oznaczamy przez ε. Przy sumowaniu według Eisensteina (2) ε dąży do zera. Z tego faktu i z (12) wynika, że S_2 określone przez wzór (2) ma być równe π.

Literatura

Eisenstein, F.: 1847, Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, *Crelles Journal* **35**, 153-247.

Mitiuszew, W.: 1996, *Zastosowanie równań funkcyjnych do wyznaczania efektywnej przewodności cieplnej materiałów kompozytowych*, Wydawnictwo WSP, Słupsk.

Mityushev, V.: 1995, Rayleigh's integral and the square array of cylinders, *Arch. Mech.* **47**, 27-37.

Mityushev, V.: 1997, Transport properties of finite and infinite composite materials and Rayleigh's sum, *Arch. Mech.* **49**, 345-358.

Rayleigh: 1892, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, *Phil. Mag.* **34**, 481-502.

Weil, A.: 1976, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: vmityu@yahoo.com
e-mail: powazka@ap.krakow.pl