FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Antoni Pardała

Praktyka kształtowania matematycznej twórczości uczniów

Abstract. The subject of this work, *teacher's practice forming mathematical activity and creativity of the gifted pupils,* is submerged in the issue of one of the contemporary trends in researching the methodology of teaching maths, which is called: **creativity in teaching mathematics – theory, diagnosis and methodology, prospects.** In this work I refer to certain synthesis of the knowledge to that point, see A. Pardała (2003; 2004; 2006), and I also articulate one of its aspects – the crucial importance of teacher's intervention in the activity and creativity of a student who is solving a mathematical problem. I also syntheticaly present findings of research assessing teacher's impact on stimulating a gifted student, in particular that which was done for doctoral thesies by E. Śmietana (2005a; 2005b). In the summary of my work, I put forward some remarks and final reflections related to mathematical activity and creativity in gifted students' education.

1. Wstęp

Temat pracy zanurzony jest w problematyce jednego ze współczesnych nurtów badań dydaktyki matematyki, który określam jako **twórczość w nauczaniu matematyki – teoria, diagnoza i metodyki, kierunki i perspektywy.** Praca ma charakter przeglądowy i jest próbą krytycznej analizy stanu badań tego zagadnienia. Odwołuję się tu do wyników znanych mi z literatury i wykonanych polskich prac badawczych. Także specyfikuję współczesne tendencje w kształceniu matematycznym oraz artykułuję pewne aspekty kształtowania matematycznej twórczości uczniów, w tym istotny wpływ interwencji nauczyciela na matematyczną aktywność i kreatywność ucznia rozwiązującego matematyczny problem. Dalej syntetycznie przedstawiam wyniki badań praktyki nauczycielskiej w zakresie stymulowania matematycznej aktywności i twórczości ucznia uzdolnionego. W podsumowaniu pracy przedstawiam uwagi i refleksje końcowe dotyczące kształtowania matematycznej aktywności i kreatywności uzdolnionych uczniów.

2. Cele i zadania pracy, jej podstawowe pojęcia

Celem pracy jest zarysować współczesne tendencje w kształceniu matematycznym oraz dotychczasowy stan badań i doświadczeń w zakresie stymulowania matematycznej aktywności i kreatywności ucznia rozwiązującego problem matematyczny. A **zadaniem badawczym pracy** jest poszukiwać odpowiedzi na następujące pytania: jaka jest diagnoza stanu doświadczeń i badań matematycznego kształcenia uzdolnionych uczniów oraz jakie są dydaktyczne wskazania dla teorii i praktyki kształtowania uczniowskiej twórczości matematycznej?

W pracy nawiązuję do wykonanej przeze mnie syntezy wiedzy na temat stanu badań twórczości w nauczaniu matematyki, szkolnych i nauczycielskich doświadczeń w tym zakresie i ich uwarunkowań. Niniejsza praca stanowi przedłużenie i rozszerzenie problematyki wcześniejszych prac autora, zob. A. Pardała (2004; 2006; 2007). Do katalogu podstawowych jej pojęć zaliczam: **twórczość matematyczną, twórczość w nauczaniu matematyki, uczniowską twórczość matematyczną, interwencję nauczyciela matematyki, przykłady dobrej nauczycielskiej praktyki, współczesne tendencje w kształceniu matematycznym.** Przy czym samo rozumienie terminu *interwencja* wyjaśnia, o jaką sytuację tu chodzi. Jest to następująca sytuacja: uczeń otrzymał temat zadania i rozwiązuje je możliwie samodzielnie (może z udziałem całej klasy lub grupy uczniów), ale w pewnych momentach tego procesu nauczyciel włącza się za pomocą pytań, sugestii, wskazówek, gestów, komentarzy, refleksji, itp. Każde takie włączenie się nauczyciela nazywamy jego interwencją w proces rozwiązywania zadania.

3. Współczesne tendencje w kształceniu matematycznym

Zwróćmy obecnie uwagę na ujawniające się w świecie nowe tendencje w kształceniu matematycznym, które syntetycznie scharakteryzuję. P. J. Taylor (2003) twierdzi, że: „matematyka i nauczanie matematyki, nauczanie jej na wysokim poziomie są kluczami do rozwiązywania problemów światowej egzystencji i do planowania przyszłości". W świecie obserwuje się wzrastającą dynamikę ewolucji standardu szkolnej matematyki i w konsekwencji kolejne fale reformy kształcenia matematycznego. W Polsce są one integralnie związane także z egzaminem maturalnym z matematyki, z ewoluującym standardem tego egzaminu, w szczególności z jego procedurami i doborem zestawów zadań. Poniżej zostaną zaprezentowane ujawnione współcześnie tendencje (zob. Pardała, 2006).

1. Tendencja do wzrostu roli i znaczenia informatyki oraz technologii informacyjnych w kształceniu matematyczno-przyrodniczym

Trudno nie dostrzegać znaczenia matematyki, matematycznego wykształcenia i matematycznej kultury we współczesnym świecie. Matematyka jest niekwestionowanym fenomenem ogólnoświatowej kultury, a w niej odbija się historia rozwoju ludzkiej myśli, fenomenalnych osiągnięć człowieka. Stąd reforma kształcenia matematycznego powinna przywracać matematyce jako przedmiotowi studiów i szkolnego nauczania należne mu miejsce i status. W szczególności matematyka powinna być zaliczana do kanonu wykształcenia na poziomie średnim i do przedmiotów obowiązkowych na maturze. Z drugiej strony wiadomo również, że uczeń, jego „umysł to nie okręt, który trzeba załadować, lecz pochodnia, którą trzeba rozniecić". Przed tą „roznieconą matematyczną pochodnią" stawiane są nowe zadania i wyzwania powodowane komputeryzacją ludzkiej działalności i coraz powszechniejszym przenikaniem technologii informacyjnych do różnych sfer (także edukacyjnej) działalności człowieka. W ślad za tym pojawia się nowy, ważny aspekt tej edukacji związany z wprowadzeniem do tego procesu komputerów i innych technicznych środków, które eksponują i wspomagają – w przeciwieństwie do tradycyjnych metod – bardziej **racjonalne metody percepcji poznawanych treści, a także metody matematycznego modelowania zjawisk i problemów.** Stwierdzana skuteczność technologii informacyjnych (TI) w procesie edukacyjnym nie jest zagrożeniem dla tradycyjnych metod kształcenia matematyczno-przyrodniczego. Nie muszą one ze sobą konkurować, ale powinny wzajemnie się uzupełniać i podnosić jego skuteczność. Nadto obserwujemy na co dzień zainteresowanie uczniów i młodzieży TI, np. telefonią komórkową, komputerami, Internetem. Współczesnych uczniów fascynują i motywują nowe idee i możliwości oferowane w wyniku używania TI w ich edukacji matematyczno-przyrodniczej.

2. Tendencja do aktualizowania podstawy programowej matematyki i standardów kształcenia matematycznego na poziomie szkolnym i akademickim

W rezultacie ostatniej aktualizacji („standard-2000") podstawy i standardów szkolnej matematyki w USA, zdecydowano, by matematyka była nauczana bardziej interesująco oraz bardziej ekscytująco ze względu na jej realny świat zastosowań. Warto dodać, że ten dokument M. Saul określa, jako dobrze zbalansowany i zawierający dobry „miks" elegancji czystej matematyki oraz bardziej informacyjnych i surowych jej zastosowań („more rought-and-tumble applications"), (zob. Addington, Clemens, Howe, Saul, 2000, s. 1078). Ta tendencja zyskuje sobie uznanie reformatorów kształcenia matematycznego w skali światowej. W ślad za tym reforma szkolnego kształcenia matematycznego powinna także wymuszać konieczne zmiany w „akademickiej rzeczywistości", np. konieczność zaktualizowania planów studiów i programów nauczania na prowadzonych kierunkach studiów (także nauczycielskich) oraz konieczność podniesienia poziomu jakości tego kształcenia matematycznego.

3. Tendencja do globalnie zunifikowanego systemu edukacyjnego, także w zakresie kształcenia matematycznego, w skali krajowej, regionalnej, światowej

Podstawą prawną tej tendencji jest np. **konwencja bolońska** w sprawie tworzenia przestrzeni edukacyjnej w krajach UE. Innym dokumentem generującym tę tendencję jest omawiany powyżej „standard-2000", który przenika do wielu systemów oświatowych państw na kuli ziemskiej. Oczywiście ta **globalna unifikacja niesie z sobą także pewne zagrożenia:**
1) brak wystarczającej ochrony i zachowania narodowych tradycji w zakresie edukacji oraz różnic w potencjale intelektualnym społeczności ludzkiej i ich udziału w rozwoju cywilizacji kuli ziemskiej,
2) globalizację, bądź „amerykanizację" społeczeństwa danego państwa lub państw danego regionu, co ma już miejsce w wielu krajach świata i co obecnie generuje także destrukcyjne wyniki dla nauki i kultury współczesnej cywilizacji.

Co robić, by ograniczyć negatywne skutki tej tendencji? Sądzę, że można dokonać jeszcze koniecznych zmian w modernizowanej edukacji, także w zakresie kształcenia matematycznego, w kierunku pragmatycznego używania podstawy programowej i standardów oraz testów. Aktualnie nie służą one bowiem temu, by te idee mogły być realizowane w praktyce. Co więcej, istnieje przeświadczenie, że **standardy kształcenia są taką eksploatowaną euforyczną weną,** a propagatorzy tej idei będą nią zainteresowani tak długo, jak to będzie możliwe. Tradycyjne, konwencjonalne techniki nauczania matematyki przegrywają z zasady: a) z technologiami komputerowymi, bo te dla uczących się są wspanialsze i atrakcyjniejsze; b) z technologiami opartymi na używaniu testów, bo te są efektowne i efektywne, obiektywizują i szybko dają wynik pomiaru dydaktycznego.

4. Tendencja do popełniania błędów (także znanych) w reformowaniu kształcenia matematycznego

Poniżej próbuję wskazać tak zwane „słabe strony", uchybienia i błędy w reformowaniu kształcenia matematycznego w Polsce. Oto one:

1. **Słabe jest przenikanie** do standardów kształcenia, ich obudowy i praktyki nauczania matematyki szkolnej i akademickiej, **refleksji historycznej** o rozwoju matematyki, jej ideach, pojęciach, metodach, a także o rozwoju zastosowań matematyki. Sama historia rozwoju matematyki może sugerować nam pewne wskazania dla programu matematycznego kształcenia.

2. Opacznie, błędnie interpretowane są relacje między matematyczną wiedzą i matematycznym nauczaniem w szczególności istnieją przypadki ignorowania metodologii reformowania kształcenia matematycznego bądź dorobku dydaktyki matematyki. Otóż znane są **przykłady fałszywego przekonania, iż wystarczy być co najmniej dobrym matematykiem, by móc rozwiązywać problemy reformy kształcenia bądź nauczania matematyki.** Oprócz przykładów pozytywnych w tym zakresie: G. Polya, H. Freudenthal, M. Hejny, Z. Semadeni i in., znane są także przykłady wybitnych matematyków: A. N. Kołmogorow, J. Dieudonne i in., którzy doznali rozczarowania na polu reformowania kształcenia matematycznego. Czy podobny los nie spotka Z. Marciniaka, obecnego koordynatora zespołu (bez udziału żadnego dydaktyka matematyki) ISP w zakresie poprawy wdrażanej obecnie podstawy programowej matematyki, w kolejnej fali reformowania kształcenia matematycznego?

3. Dostrzegany **entuzjazm do innowacji** programowych, podręcznikowych, organizacyjnych, do preferowania zagranicznych i niekiedy ignorowania rodzimych doświadczeń, do komercjalizacji kształcenia **nie znajduje w pełni merytorycznego uzasadnienia.** Potrzeba szerszego upodmiotowienia procesu reformowania kształcenia matematycznego, a także dokształcania i doskonalenia nauczycieli matematyki wyzwoliła kreatywność pewnych środowisk (nauczycieli matematyki, doradców metodycznych, administracji szkolnej, Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki i in.), które zaczęły „brać sprawy w swoje ręce" oraz czynnie i twórczo wspomagać rozwiązywanie problemów tej reformy na miarę ich możliwości. Powstała tutaj także naturalna możliwość bezpośredniego poznania doświadczeń zagranicznych w tym zakresie i w ślad za tym odsłoniła się możliwość szybszej ścieżki awansu zawodowego dla czynnych nauczycieli. Twierdzę także, że mankamentem tego ich entuzjazmu jest nierzadkie swoiste izolowanie się od przedstawicieli środowisk naukowych i szkół wyższych, a nawet wykreowanie nowych struktur organizacyjnych integralnie związanych z tą reformą: OKE i CKE, ze stosunkowo słabym zapleczem naukowym. Wreszcie newralgicznym ogniwem obecnie wdrażanej reformy kształcenia matematycznego i jej innowacji jest **niewystarczające popularyzowanie aktualnej wiedzy matematycznej oraz idei tej reformy,** by polepszyć wizerunek (image) matematyki jako dziedziny wiedzy i przedmiotu nauczania, w oczach społeczeństwa.

4. Powodzenie wdrożenia reformy kształcenia matematycznego na poziomie szkolnym zawsze zależało od profesjonalizmu nauczycieli matematyki, ich ścieżki awansu zawodowego i przygotowania do realizacji nowych zadań wynikających z innowacyjnych rozwiązań reformy oraz uwarunkowań ich pracy w zreformowanej szkole. W tym obszarze istnieje pilna potrzeba do: 1) podejmowania wieloaspektowych badań naukowych monitorują-

cych aktualne problemy kształcenia nauczycieli matematyki i jego modernizacji, 2) opracowania koncepcji ich awansu zawodowego w integracji z realizacją cyklicznego dokształcania i doskonalenia czynnych nauczycieli matematyki przez szkoły wyższe bądź instytucje mające ich afiliację lub odpowiednią akredytację.

5. Tendencja do wąskiego pragmatyzmu oraz globalnego informatyzowania i stosowania TI w kształceniu matematycznym

Odkrycie R. Sperry'ego, laureata nagrody Nobla w 1981 roku, czynnościowej asymetrii półkul mózgowych wzbudziło zainteresowanie pedagogów i dydaktyków przedmiotowych potrzebą przełożenia tego odkrycia do reformowanych systemów oświatowych, w tym także do reformowania kształcenia matematycznego. Stąd powstało między innymi żywe zainteresowanie tak nazywaną „lewopółkulową matematyką" i „lewopółkulowymi metodami instrukcji" w procesie kształcenia matematycznego, (zob. Sharygin, 2000, s. 6-19). Istota tego przełożenia tkwi w harmonijnym zagospodarowaniu możliwości lewej i prawej półkuli mózgowej, także w aspekcie rozwoju kształcenia matematycznego ucznia (studenta). Otóż „lewopółkulowa matematyka", wąski pragmatyzm i globalne informatyzowanie kształcenia matematycznego, coraz powszechniejsze stosowanie technologii informacyjnych w praktyce tego kształcenia i uczenia się może rodzić niebezpieczny alians. Mianowicie, mogą one powodować także negatywny wpływ na środowisko ucznia, studenta, człowieka i w konsekwencji zmieniać jego biologiczną naturę, a **w wyniku takiego „nasycania" kształcenia matematycznego w miejsce „homo sapiens" pojawi się „homo computeric", „homo informatic".**

Z drugiej strony, **Internet staje się obecnie podstawą globalnej idei komunikowania się**. A świat www, czyli stron internetowych, także zaczyna ogarniać przestrzeń edukacyjną i wymuszać zewnętrzne zachowania nauczyciela i jego szkoły oraz profesora i jego uniwersytetu, czyli wykorzystywanie tego narzędzia w procesie kształcenia (wykorzystywanie ze stron www dostępnych materiałów dydaktycznych oraz zamieszczanie na stronach www własnych materiałów dydaktycznych). Także stosowanie TI może w pewnym sensie ograniczać kształcenie pamięci oraz motywację kształcącego i uczącego się ucznia (studenta), bo: **po co uczyć się tradycyjnie? Po co zapamiętywać coś tam**, skoro komputer i Internet mogą być w jego dyspozycji. Wymienione uwarunkowania i TI mogą rodzić kolejne niebezpieczeństwa dla jakości kształcenia matematycznego, a mianowicie **dyskredytowanie matematycznych uzasadnień.** Oto przykład: „The American Montly", November, 1998, opublikował artykuł **Alfreda Manastera na temat pomiaru jakości matematycznego nauczania w VIII klasie** w trzech krajach: USA, Japonii i Niemczech. Spośród wielu interesujących tu konkluzji przytoczę następujące: 1) matematyczne uzasadnienia pojawiają się najczęściej na lekcjach geometrii, bo przewiduje to podstawa programowa i ocena standardów szkoły amerykańskiej, 2) na matematyczne uzasadnienia poświęca się na lekcjach matematyki odpowiednio: w Japonii 53% wszystkich lekcji matematyki, w Niemczech 20% wszystkich lekcji matematyki, a w USA 0% tych lekcji. W związku z tym przykładem warto tu, za I. F. Sharyginem (2000, s. 9), przytoczyć słowa wybitnego matematyka rosyjskiego V. I. Arnolda: „ci, którzy nie będą mistrzami sztuki rygorów matematycznych uzasadnień w szkole, nie zdołają odróżnić między prawdziwym i fałszywym uzasadnieniem. Nieodpowiedzialni politycy mogą łatwo manipulować takim człowiekiem", z jego referatu: *Antiscientific Revolution and Mathematics* (International Congress of Papal Academy of Sciences in Vatican, October 26, 1998).

A jaka jest praktyka kształtowania matematycznej kreatywności i twórczości uczniów w nauczaniu matematyki, w szczególności uczniów matematycznie uzdolnionych? Zwrócimy uwagę na ten problem.

4. Z praktyki kształtowania twórczości matematycznej uczniów uzdolnionych

Poniżej dokonamy spojrzenia na zagadnienie kształtowania uczniowskiej twórczości w nauczaniu matematyki i pracy nauczycieli z uczniami matematycznie uzdolnionymi przez pryzmat poniżej wymienionego dokumentu CIEAEM oraz nawiązania do pewnych refleksji i doświadczeń opisanych w wybranych pracach. W kontekście charakteryzowania tego zagadnienia nawiążę tu do doświadczeń zagranicznych (zob. Pardała, 2004), a nieco wnikliwiej skupię się na polskich, w tym z regionu podkarpackiego. **Rozproszona jest bowiem wiedza na temat kształtowania twórczości w nauczaniu matematyki oraz niewystarczająca jest także znajomość tej praktyki szkolnej i nauczycielskiej,** czyli funkcjonujących w praktyce programów i ich obudowy dydaktycznej, metodyk rozpoznawania, kształcenia i rozwijania matematycznie uzdolnionych uczniów. Mogą one być źródłem interesujących problemów badawczych dydaktyki matematyki oraz wzbogać teorię pedagogiczną i praktykę nauczania matematyki.

W dokumencie *50 Years of CIEAEM: Where we are and where we go, Manifesto 2000 for the Year of Mathematics*[1] zawarte są m.in. pewne diagnozy i refleksje na temat ewolucji poglądów, doświadczeń i zamierzeń poprawy stanu nauczania matematyki. W II części tego dokumentu: *Where we go?* artykułuje się pewne kwestie, idee i kierunki przyszłej pracy zainteresowanych środowisk na rzecz: 1) rozwoju matematyki dla wszystkich i upowszechnienia znajomości matematyki, 2) świadomości i odzyskania poparcia społeczeństwa demokratycznego dla preferowania kształcenia matematycznego, 3) modernizowania bazy kształcenia matematycznego z uwzględnieniem jego uwarunkowań

[1] Zob. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki, **22**, 2000, 208-223

we współczesnym, zmatematyzowanym świecie. A sedno diagnozy na temat: *Where we go?* jest następujące:

(1) *Nastąpiło przewartościowanie celów kształcenia ogólnego od uniwersalnego kształcenia dla elity do kształcenia dla wszystkich.* To implikuje także zmiany perspektyw kształcenia matematycznego i jego misji, które muszą: a) zapewnić zrozumienie procesów „matematyzacji" w społeczeństwie, b) tworzyć jasny i krytyczny osąd roli, jaką odgrywa obecnie matematyka i stosowanie jej w warunkach społecznych. Autorzy tego dokumentu stawiają pytania konkretyzujące to pole badawcze, oto niektóre z nich:

- W jaki sposób nauczanie i uczenie się matematyki może być prezentowane nie tylko jako wprowadzenie do pewnych wielkich idei naszej kultury, ale również do krytyki tych idei i stosowania ich?
- Jaki rodzaj badań w dydaktyce matematyki mógłby przyczynić się do stworzenia nowego spojrzenia na praktykę kształcenia matematycznego?
- Jak uświadomić społeczeństwu, że kształcenie matematyczne przyczynia się do rozwoju odpowiedzialności i pomaga urzeczywistnić wizje demokratycznych działań: wprowadzania nowych form kontaktów społecznych, porozumiewania i dialogu?

(2) *Poglądy na kształcenie matematyczne mają charakter dychotomiczny, dwubiegunowy.* Matematyka w dalszym ciągu jest jednym z tych przedmiotów szkolnych, który wywołuje silne uczucia obawy, awersji i niekompetencji; a dla większości uczniów jest trudna i pozbawiona sensu. Ci uczniowie uważają się za „upośledzonych umysłowo" w tej dziedzinie i skazanych na porażkę. Jednocześnie, matematyka nadal kojarzy się rodzicom, uczniom i politykom ze szczególnymi uzdolnieniami i oni uważają ją za dyscyplinę dla wybranych. Stąd „zdolności matematyczne", czy też „talent matematyczny", „naturalną zdolność" do myślenia matematycznego bądź „naturalne zainteresowanie" matematyką postrzegane są jako rzadkość w populacji uczniów, w społeczeństwie. Czyni to z matematyki naturalny środek społecznej selekcji, co niewątpliwie potęguje wzrost niechęci i niepokoju do niej. W powyżej wymienionym dokumencie dość kategorycznie ocenia się aspekt dydaktyczny tego problemu: *matematyki jako środka społecznej selekcji.* Formułuje się tu, silną, według mnie, tezę: *tak długo, jak utrzymywać się będzie społeczna koncentracja na „uzdolnionych", tak długo większość nie będzie właściwie kształcona.* W szczególności autorzy tego dokumentu stawiają pewne kluczowe pytania badawcze, oto niektóre z nich:

- Czy powinniśmy utrzymywać wysoko selektywne ramy i metody kształcenia matematycznego, ale rezygnując z uprzywilejowanej pozycji tego przedmiotu jako rdzenia (jądra) wykształcenia ogólnego?

Czy też powinniśmy starać się utrzymać matematykę w centrum programów nauczania, ale szukając innych metod nauczania tego przedmiotu dla wszystkich uczniów? Jak pokonać ograniczenia tej dychotomii?

– Pojęcia „umiejętności matematyczne”, „indywidualne różnice” i „uzdolnieni” są ideologicznie zbiorowymi konstrukcjami, opartymi na przekonaniach i uprzedzeniach, możliwe jest, że jako narzędzia do określania celów i zainteresowań. Ponadto istnieje przesąd, że „uzdolnienia matematyczne” powiązane są z innymi cechami dziedzicznymi, takimi jak płeć, pochodzenie.

Z zarysowanymi powyżej ideami i kierunkami modernizowania nauczania matematyki oraz stymulowania rozwoju matematycznej twórczości uczniów korespondują doświadczenia francuskiego stowarzyszenia *Math Pour Tous,* które opisane są w pracy L. Beddou, C. Mauduit (2001). Nauczanie matematyki opiera się w ich koncepcji na aktywności badawczej w matematyce i zaangażowaniu jak największej liczby uczniów i studentów. Próbuje się tu przestrzegać bądź kopiować pewne zachowania, wzorce i zasady specyficzne badaniom naukowym, takie jak: odkrywać pytając, uczyć się badając, ożywiać kreatywność i wyobraźnię, doceniać rolę błędu w uczeniu się, nauczyć słuchania, wymiany i komunikowania idei. Nauczyciel akademicki sprawuje tu patronat, przedkłada pewną liczbę zadań i problemów, takich by ich rozwiązanie nie angażowało „znanej wiedzy”. Nauczyciel prowadzący taki seans zajęć obowiązany jest, by ta praca uczniów bądź grup uczniów (także bliźniaczych) posuwała się do przodu. Wyniki tej pracy muszą być prezentowane w Internecie, bądź na konferencji. Prekursorami tej koncepcji są G. Polya, I. Lakatos, J. David i E. Marchisotto, Z. Krygowska i in. Oryginalność tej koncepcji i akcji edukacyjnej „Math en Jeans” (matematyka w dżinsach) polega na tym, że jest ona adresowana do wszystkich zainteresowanych uczniów i studentów, a nie tylko do elity uczniowskiej i studenckiej – przyszłych badaczy lub zawodowych matematyków. Nadto nauczyciel i uczeń (uczniowie) startują razem z tego samego poziomu. Uczeń, otrzymując zadanie otwarte, ma wrażenie robienia rzeczy nowych oraz bardzo emocjonalnie podchodzi do osiągniętych tu wyników stwierdzając jedynie: „rozwiązałem”, „znalazłem”. Oto **przykład problemu** – ***sofa Conwaya*** rozwiązywanego w tej akcji edukacyjnej:

Rozważmy korytarz składający się z dwóch części, każda o szerokości 1 m, tworzących ze sobą kąt prosty. Chcemy przenieść nim sofę, reprezentowaną przez niedeformowalną figurę płaską S. Jako przykład figury reprezentującej sofę można wziąć kwadrat o boku 1 m. Czy można znaleźć przykład sofy o powierzchni większej od 1 m^2, którą można by przenieść tym korytarzem? Jaka jest największa możliwa powierzchnia sofy dającej się przenieść takim korytarzem?

Na początku problem rodzi u młodzieży pewne trudności: jak opisać w języku matematyki daną sytuację zadaniową oraz ruch tej figury? Jak skonstruować przykłady figur bądź klas figur spełniających warunki zadania i czy ich kształt ma tu związek z ich polem i odwrotnie? Konkretyzacje bądź przedłużenie tego problemu stają się tu naturalne, a skuteczne podjęcie prób rozwiązywania go wymaga pewnych umiejętności i aktywności matematycznych oraz pogłębienia ich znajomości matematyki. Obserwuje się u rozwiązujących ewolucję nastawienia do tego problemu i poszukiwania jego rozwiązania, bo: 1) trzeba rozstrzygnąć tu pewne kwestie typu: „oczywiste, że...” bądź „widać, że...”, 2) trzeba być otwarty na argumentację innych rozwiązujących; inni mają bądź mogą mieć tu rację, 3) trzeba mieć świadomość zakresu uzyskanego tu rozwiązania (częściowe rozwiązanie, rozwiązanie w pewnej klasie figur i opisanie ich własności, znajomość jedynie pewnych twierdzeń przydatnych w poszukiwaniu rozwiązania itp.).

Z praktyką kształtowania uczniowskiej twórczości matematycznej mają także związek omawiane niżej prace z dydaktyki matematyki.

A. Karp (2003), w artykule *Kształcić, by uczyć twórczo,* opisuje osobiste doświadczenia i refleksje z pracy z amerykańskimi i rosyjskimi nauczycielami matematycznie uzdolnionych uczniów. Autor nawiązuje, za J. Kilpatrickiem, do pewnego stylu pracy G. Polyi na sławnym seminarium z rozwiązywania zadań. Tutaj zadania były rozwiązywane na początku niezależnie „bez pomocy kogokolwiek, poza ewentualnie G. Polya”, a potem rozwiązania były dyskutowane w grupach, a następnie na forum klasy. I dalej stawia retoryczne pytanie: Czy będzie to możliwe w dzisiejszej klasie lekcyjnej? Uczniowie mogliby np. otrzymać następujące zadanie:

Udowodnij, że: jeżeli pierwiastki równania $x^2+px+q=0$ *są rzeczywiste, to pierwiastki równania* $x^2+px+q+(x+a)(2x+p)=0$ *będą również rzeczywiste dla dowolnego rzeczywistego* a.

A. Karp odpowiada, że to niemożliwe, by wielu amerykańskich nauczycieli odważyło się teraz prowadzić podobne ćwiczenia w swoich klasach, tj. całe zajęcia lekcyjne przeznaczać na rozwiązanie jakiegoś małego zadania i następnie na przedyskutowanie jego rozwiązania. Ale czas nie jest tutaj w rezultacie jedyną i najważniejszą rzeczą, według A. Karpa. Obserwował on lekcje, w trakcie których uczniowie spędzali dosłownie godziny, kolorując różne obiekty. Nauczyciel jednak czuł, że takie ćwiczenia były przydatne i co więcej twórcze, od czasu aż uczniowie sami kolorowali.

Następnie A. Karp nawiązuje do wyników W. A. Krutieckiego i podaje za nim kilka cech, które wyróżniają matematycznie uzdolnionych uczniów: pomysłowość, elastyczność, oryginalność myślenia, zdolność do abstrahowania, zdolność do generalizowania. Pyta się: a jakich cech potrzebuje nauczyciel matematyki, by rozwijał wyżej wymienione cechy uczniów? Próbując odpowiedzieć na to pytanie, wymienia następujące cechy:

1) interesowanie się zadaniem rozpoznanym i nurtującym utalentowanego ucznia,
2) szczególna matematyczna przeszłość,
3) zdolność do matematycznego reagowania, co oznacza stawianie pytań i udzielanie odpowiedzi, które są typowe i charakterystyczne dla matematyki,
4) czujność i wrażliwość na niespodziewane i niezwyczajne matematyczne obserwacje i komentarze udzielane przez uczniów,
5) obeznanie z istniejącymi specjalnymi programami i innymi możliwościami rozwijania talentów uczniów matematycznie uzdolnionych,
6) zdolność do koordynowania rozwoju programów dla matematycznie uzdolnionych uczniów.

A. Karp jednocześnie dodaje, że powyższe cechy nie są bezpośrednimi odpowiednikami cech określonych przez Krutieckiego. Dla rozwijania matematycznego myślenia uczniów pożądanym jest – według Krutieckiego – *przymus mózgu do matematycznego myślenia,* ale i dla nauczycieli pożądanym jest również posiadanie przymusu do matematycznego myślenia. Podkreśla także, że najważniejszy i najtrudniejszy aspekt jego pracy z nauczycielami amerykańskimi irosyjskimi obejmował **uczenie nauczycieli matematycznego reagowania,** czyli biegłości w ich matematycznym reagowaniu. Daremne bowiem jest tu patrzenie i wiara w uniwersalne metody matematyczne, metody rozwiązywania zadań. W sukurs mogą przychodzić tu jedynie przykłady. Do pracy dydaktycznej bowiem w pełni odnosi się twierdzenie I. M. Gelfanda: *teorie przychodzą i odchodzą, ale przykłady zostają.* Właśnie problem doboru przykładów w kształceniu matematycznym uczniów i nauczycieli ciągle jest aktualny i ma istotny wpływ na skuteczność pracy dydaktycznej (zob. np. Ciesielski, Pogoda, 1995). A. Karp artykułuje, że praca z nauczycielami nad konkretnym rzeczywistym zadaniem jest problemem najwyższej wagi i dodaje, że doświadczeni nauczyciele – znani ze swoich osiągnięć w dziedzinie edukacji utalentowanych uczniów – są tu jednomyślni w swojej opinii. Najważniejszym czynnikiem w ich własnym kształceniu tych uczniów była **wiedza matematyczna zdobyta na studiach i osobiste doświadczenie w nauczaniu matematyki**, a dopiero na drugim miejscu wiedza zdobyta od swoich bardzo doświadczonych kolegów.

Zwróćmy teraz uwagę na interesujące refleksje S. Grozdev (2003) i bułgarskie doświadczenia w zakresie stymulowania matematycznej twórczości uczniów. Warto dodać, że ich zespół uczniów od kilku już kolejnych lat plasuje się w ścisłej czołówce najlepszych na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, a w 2003 roku zajął na niej I miejsce. Autor tych refleksji przyznaje, że u źródła bułgarskich sukcesów uczniów w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej są m.in. *specjalne notatki, w których gromadzą matematyczne fakty* *i twierdzenia* i dodaje: *Ilość takich notatników dla niektórych ich posiadaczy jest dwucyfrową liczbą. Okresowo i bez przypadku przed Międzynarodową Olimpiadą uczniowie sprawdzają swoje notatniki i przeglądają ich zawartość. Nie stawiają czoła żadnym trudnościom w powtarzaniu materiału do czasu, aż w toku nauki zrozumieją i przyswoją sobie informacje. Przekształcenie informacji w wiedzę jest celem czynności wykonywanych przez uczniów. Wiedza była i wciąż pozostaje instrumentem tych samych ćwiczeń.* Także S. Grozdev ujawnia, że metodyka pracy z rzeszami uczniów w zakresie przygotowywania ich do udziału w Olimpiadzie Matematycznej na poziomie krajowym i międzynarodowym oparta jest na stosowaniu pewnych wskazań H. Freudenthala, J. Piageta i H. Poincare. Pierwszy z nich stwierdza, że: *w nauczaniu matematyki każdy uczący się powinien przejść przez następujące etapy: 1) instynktowne reodkrycie, 2) świadome zastosowanie, 3) formalną definicję.* Z kolei w odniesieniu do I etapu J. Piaget dodaje, że całkowite przyswojenie wiedzy następuje tylko w procesie reodkrycia, które wymaga stworzenia sytuacji problemowych. Przy czym ta specjalna uwaga dla czynności „przeglądu" związana jest z tak zwanym ahierarchicznym podejściem do badania i systematyzowania umysłowych zajęć uczniów w przygotowaniach do Olimpiad Matematycznych, a częste powtarzanie podtrzymuje odświeżenie dynamicznych więzi między faktami i to zapewnia elastyczność myślenia. W taki sposób uczniowie ćwiczą ten efekt na organizowaniu i samoorganizowaniu ich zdolności do rozwiązywania problemów matematycznych. Podążając za słowami Henri Poincare, *tworzyć oznacza odróżniać i wybierać,* uczniowie są motywowani. Mobilizują nadto swoją wolę i umysł, aktywizują swoje myślenie, czynią swoją świadomość wolną od niepotrzebnych informacji, skupiają się na konkretach, zaczynają od celu i radzą sobie ze spotykaną sytuacją problemową. W podsumowaniu tych refleksji S. Grozdev stwierdza, że *główne zadanie w przygotowaniu utalentowanych uczniów do uwieńczonego sukcesem udziału w Olimpiadach Międzynarodowych to stymulacja ich aktywności umysłowej i woli do indywidualnej pracy i badań.*

R. A. Utiejewa (2001) przypomina natomiast, iż *umysłowa energia* człowieka leży u podstaw wszelakiej jego zdolności, chociaż pojęcie zdolności i dziś nie jest jednoznacznie ujmowane. Autorka przypomina badania L. Termana (zob. Terman, Oden, 1947; Terman, Oden, 1959), które potwierdziły, iż głównym wyróżnikiem zdolności jest intelekt, scharakteryzowany przez siedem jego składowych, w tym logiczno-matematyczną i przestrzenną. Nadto współcześni psychologowie są zgodni, iż należy odróżniać **twórcze matematyczne zdolności** od **genialnych matematycznych zdolności (talentu matematycznego)**, który ujawnia się co najwyżej u 1% populacji uczniów. R. A. Utiejewa zbadała 2000 rosyjskich uczniów w wieku 10-15 lat i ustaliła, że tylko 8% tej populacji ma twórcze matematyczne uzdolnienia. A jej **koncepcja modelu zróżnicowanego nauczania matematyki twórczo uzdolnionych uczniów** zakłada wczesne „wyłowienie" takich uczniów (nie później niż w V klasie), by stworzyć dla nich odpowiednie warunki do dalszego maksymalnego rozwoju ich matematycznych zdolności w swoim środowisku szkolnym (klasa, szkoła). Głównym celem tej koncepcji jest kształcenie indywidualne badawczych i matematycznych aktywności twórczo uzdolnionych uczniów z uwzględnieniem umotywowanej aktywności ucznia i nauczyciela, poznawanych treści nauczania i indywidualnego podejścia do każdego uzdolnionego ucznia. Podstawowymi formami organizacyjnymi pracy są tu: praca „grupowa" bądź „indywidualnie zróżnicowana". Autorka koncepcji tego modelu podaje także **cztery niezbędne warunki** pomyślnej jego realizacji: 1) specjalne programy z matematyki zorientowane na zainteresowania i twórcze uzdolnienia uczniów, które powinny być permanentnie korygowane o możliwość uwzględnienia indywidualnych możliwości (także i tempa pracy) ucznia, 2) istotne zmiany metodyki pracy i nauczania nauczyciela oraz zmiany charakteru jego relacji z matematycznie uzdolnionymi uczniami zarówno na lekcji, jak i przy organizowaniu ich pracy samodzielnej, 3) specjalne programy profesjonalnego przygotowania na studiach matematycznych (również na podyplomowych) nauczyciela matematyki do pracy z matematycznie uzdolnionymi uczniami, 4) zabezpieczenie i wyposażenie nauczycieli matematycznie uzdolnionych uczniów we wszystkie niezbędne środki nauczania (literaturę, poradniki, podręczniki, zbiory zadań, czasopisma itp.). W podsumowaniu artykułuje jeden z ważkich problemów pedagogiki twórczości: *opracowanie programów dla matematycznie uzdolnionych uczniów i odpowiedniej metodycznej obudowy tych programów.*

Z powyższym problemem koresponduje praca E. Jagody, D. Panka oraz A. Pardały (2001). Autorzy wskazują na postępujący wpływ technologii informacyjnych i Internetu na przemiany edukacyjne na świecie, które kreują alternatywne formy kształcenia i rozwijania uczniów. Stąd edukacja na odległość z wykorzystaniem technologii informacyjnych może być z powodzeniem stosowana w pracy z uczniem uzdolnionym. W pracy sygnalizuje się także pewne uwarunkowania pedagogiki twórczości i matematycznie uzdolnionych uczniów. Jej autorzy na dowód tego „odsłaniają" tu przykłady nauczycielskich metodyk pracy z matematycznie uzdolnionymi uczniami szkoły podstawowej i gimnazjum. Taką prawidłowością skuteczności tych metodyk na tych poziomach nauczania są: 1) wczesne dostrzeżenie naturalnych zainteresowań matematycznych uczniów i ich chęci samorealizacji poprzez pokazanie się, że ich zdaniem widzą coś w matematyce, zadaniu matematycznym, czego nie widzą inni ich rówieśnicy, 2) właściwe interakcje nauczyciela matematyki z uczniami matematycznie uzdolnionymi, np. najzdolniejsi mogą być jego pomocnikami (asystentami) przedmiotu, 3) adekwatny dobór treści nauczania i materiału zadaniowego, form kształcenia i rozwijania matematycznie uzdolnionych uczniów (preferowane są kółka matematyczne) oraz ich aktywizacji (zazwyczaj są to konkursy matematyczne), 4) plan pracy i program kółka matematycznego dla matematycznie uzdolnionych uczniów.

W kontekście poznawania wyżej wymienionej praktyki szkolnej i nauczycielskiej zwróćmy uwagę na realizowane programy kółek matematycznych przez niektórych nauczycieli matematyki z województwa podkarpackiego: A. Bysiewicza z I LO w Krośnie, J. Ingrama z I LO w Mielcu, K. Poniatowskiego z I LO w Jaśle, W. Rożka z Zespołu Szkół Ogólnokształcących w Stalowej Woli, K. Serbina z I LO w Sanoku, L. Sochańskiego z II LO w Przemyślu, Z. Ziemiańskiej z Zespołu Szkół Ekonomicznych w Rzeszowie, P. Witowicza z IV LO w Rzeszowie, E. Śmietany z I LO w Łańcucie i innych. Otóż z założenia, treści realizowanych programów kółek matematycznych stanowią poszerzenie szkolnych treści programowych, różnicuje się je adekwatnie do poziomu nauczania, przy czym są one skierowane na tematykę zadań z konkursów matematycznych bądź zadań z Olimpiady Matematycznej. Autorzy tych programów formułują cele ogólne: *poszerzenie wiedzy z różnych działów matematyki oraz przygotowanie uczniów do konkursów matematycznych i Olimpiady Matematycznej*, a także cele edukacyjne, by uczniowie potrafili: *wykształcić umiejętność dowodzenia twierdzeń, stosować poznaną wiedzę w rozwiązywaniu zadań, umieć logicznie myśleć, rozwinąć umiejętność czytania literatury matematycznej i wzbudzić w sobie chęć korzystania z niej, umieć koncentrować się na problemie, samodzielnie stawiać hipotezy i weryfikować je, pracować samodzielnie i w grupie*. Wśród preferowanych metod i form pracy wymieniają: *metodę problemową i poszukującą, pracę zbiorową jednolitą oraz pracę grupową zróżnicowaną, pracę indywidualną, pracę z literaturą matematyczną*. Zróżnicowane są także sposoby monitorowania dynamiki rozwoju uzdolnień matematycznych uczniów. Jeden z tych nauczycieli tak je opisuje: *na każdych zajęciach zadawane są zadania domowe – sześć zadań. Na następnych zajęciach są one omawiane – wykonują je uczniowie, którym udało się te zadania rozwiązać w całości poprawnie. Prowadzony jest swoisty „ranking", w którym to odnotowywana jest liczba w pełni rozwiązanych zadań przez ucznia w domu i na zajęciach. Zapis ten prowadzony jest na specjalnej karcie, którą posiada nauczyciel prowadzący zajęcia.*

W regionie podkarpackim człowiekiem sukcesu pedagogicznego w zakresie pracy z uczniem matematycznie uzdolnionym był niedościgniony do dziś Jan Marszał – absolwent z 1933 roku UJK we Lwowie. Był nauczycielem matematyki i dyrektorem w I Liceum Ogólnokształcącym im. H. Sienkiewicza w Łańcucie oraz opiekunem 19 uczniów, którzy 24 razy byli finalistami Olimpiady Matematycznej (OM). Spośród nich trzech było laureatami finału OM i trzech zostało wyróżnionych w finale OM. Niektórzy z nich są dziś twórczymi matematykami: Tomasz Bojdecki, Bogusław Januszewski, Wiesław Pleśniak, Wiesław Pusz. Do grona wyróżniających się nauczycieli matematyki i opiekunów uczniów matematycznie uzdolnionych należy m.in. Andrzej Bysiewicz – nauczyciel matematyki I Liceum Ogólnokształcącego im. M. Kopernika w Krośnie, absolwent z 1998 roku AP im. KEN w Krakowie. Dotychczas był opiekunem trzech finalistów OM, m.in. Jarosława Wrony – dwukrotnego laureata krajowego finału OM i dwukrotnego zdobywcy srebrnego medalu na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Waszyngtonie (2001) i w Glasgow (2002). Aktualnie w grupie tych nauczycieli liderem jest Waldemar Rożek – nauczyciel matematyki w Zespole Szkół Ogólnokształcących im. KEN w Stalowej Woli, absolwent z 1985 roku UJ w Krakowie. Znany jest jako nauczyciel i wychowawca licznego grona uczniów finalistów OM: do 2008 roku 100 jego uczniów zakwalifikowało się do półfinału OM, a 12 było 16 razy finalistami OM. Jednym z wybitnych jego uczniów był Tomek Czajka – trzykrotny laureat krajowego i dwukrotny laureat międzynarodowego finału Olimpiady Matematycznej. Warto tu także dodać, iż Tomek Czajka (jako student matematyki i informatyki UW) był podporą trzyosobowej reprezentacji Uniwersytetu Warszawskiego, która zdobyła I miejsce w 27. edycji Akademickich Mistrzostw Świata w Programowaniu (ICPC) w 2003 roku w Beverly Hills w Kaliforni.

Oto plan pracy kółka matematycznego W. Rożka dla uczniów matematycznie uzdolnionych z liceum ogólnokształcącego: *Zajęcia z matematyki prowadzone są w dwóch grupach. Pierwsza grupa obejmuje uczniów klas pierwszych oraz tych uczniów klas starszych, którzy dopiero zdecydowali się poszerzać wiadomości z matematyki. W grupie tej wprowadzam podstawowe pojęcia związane z tematyką zadań olimpijskich. W szczególności są to następujące treści: 1. Teoria liczb: kongruencje liczbowe, małe twierdzenie Fermata. 2. Zadania związane z kolorowaniem szachownicy. 3. Zasada szufladkowa Dirichleta. 4. Nierówności i średnie. 5). Geometria: proste, okręgi, wielokąty, łuki Talesa, punkty i proste w trójkącie, przekształcenia geometryczne. W grupie drugiej, obejmującej uczniów klas starszych, poszerzamy wiadomości o takie pojęcia i treści, jak: 1. Potęga punktu względem okręgu. 2. Inwersja. 3. Twierdzenie Brianchoma, twierdzenie Cevy, twierdzenie Menelaosa. 4. Ciągi monotoniczne i dowodzenie nierówności. 5. Zastosowanie wzorów Viete'a. 6. Równania funkcyjne. 7. Równania rekurencyjne.*

Inną formą wspierania matematycznie uzdolnionych uczniów z regionu podkarpackiego i kształtowania ich twórczości, w ogóle kształtowania twórczości w nauczaniu matematyki, jest **instytucja afiliacji** szkolnych kół matematycznych oraz powiatowych i regionalnych konkursów matematycznych (np. Jasielskiego Konkursu Matematycznego im. H. Steinhausa) przez Oddział Rzeszowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego (OR PTM). Wyodrębniona kadra matematyków – członków OR PTM i nauczycieli akademickich uczelni Rzeszowa – wspomaga merytorycznie i dydaktycznie matematycznie uzdolnionych uczniów i opiekunów tych kół, uczestnicząc w organizowanych dla nich seminariach, warsztatach i zawodach matematycznych. Także Kuratorium Oświaty w Rzeszowie wspiera stymulowanie matematycznej twórczości uczniów poprzez organizowanie seminarium dla kadry kierowniczej i nauczycieli nt.: *Kształcenie i wychowanie ucznia zdolnego*, by prezentować i upowszechniać regionalne osiągnięcia i doświadczenia w tym zakresie. Właśnie tak podjęta próba refleksji wstecz i w przód, z udziałem dyrektorów szkół i wyróżniających się nauczycieli nie tylko matematyki oraz przedstawicieli szkół wyższych, stanowi pewien prognostyk dla doskonalenia regionalnego systemu rozpoznawania, kształcenia i rozwijania matematycznie uzdolnionych uczniów i studentów.

5. Wyniki badań nauczycielskiej praktyki kształtowania matematycznej twórczości

W kontekście tematu tej pracy oraz próby odsłaniania, badania i opisywania współczesnej praktyki nauczycielskiej, warto przedtem wspomnieć o pracy i autorefleksji S. Steckla (1938), który w referacie wygłoszonym na III Zjeździe PTM stawiał dwa zagadnienia, które mimo upływu czasu i dziś ciągle są aktualne. Steckel pyta: *1) W jaki sposób, kierując nauczanie zasadniczo na całą klasę, osiągnąć, aby jednostka niezdolna do matematyki nie była zmuszona do nadmiernego wysiłku i mogła pracować w tempie odpowiednio powolniejszym i aby czyniła ona stale postępy równolegle z resztą klasy? 2) W jaki sposób osiągnąć, aby jednostka wybitnie zdolna do matematyki nie marnowała czasu i zdolności, i aby uzyskała ona najlepsze wyniki, na jakie pozwala jej rozwój intelektualny?* (zob. Steckel, 1938, s. 115). Autor tego referatu odsłania przemyślenia oraz metodykę pracy, środki i formy aktywizacji, jakie stosował w swojej praktyce nauczycielskiej w kształceniu uczniów wybitnie zdolnych do matematyki. W pracy z tymi uczniami preferował: a) zadania i ćwiczenia nadobowiązkowe, b) kółko uczniowskie, c) lekturę nadobowiązkową, d) odpowiedni stosunek wymagań do ich uzdolnień. Podsumowując swoje refleksje, S. Steckel stwierdza m.in.: *Uczeń, który daleko wybiega ponad przeciętność, uczeń o wybitnej inteligencji, zasługuje w zupełności na to, aby nim się specjalnie zająć, aby pokierować pierwszymi wzlotami jego myśli, aby wydobyć wielkie nieraz skarby umysłowe drzemiące w jego duszy. Zmarnowanie tych skarbów byłoby nie tylko krzywdą dla jednostki, ale i stratą dla całego społeczeństwa.*

Po tym nawiązaniu do minionej praktyki nauczycielskiej, zarysuję poniżej syntetycznie wyniki badań empirycznych nauczycielskiej praktyki kształtowania uczniowskiej twórczości matematycznej bądź jej przejawów, na przykładzie wykonanych prac doktorskich Mariusza Krausa (2001), Małgorzaty Makiewicz (2003) i Eugeniusza Śmietany (2005a).

M. Kraus (2001) – nauczyciel matematyki i nauczyciel akademicki – podejmuje w pracy doktorskiej zagadnienie *formowania umiejętności twórczego rozwiązywania zadań matematycznych.* W wykonanym studium literatury na ten temat odwołuje się i artykułuje dorobek pedagogiki twórczości wzbogacony przez szkoły twórczości G. Polyi, A. Góralskiego i T. Wrońskiego. Autor rozprawy adoptuje pojęcie *celowo dobrany zestaw zadań (cdzz)* do swojej praktyki nauczycielskiej i badawczej. W wyniku przeprowadzonego eksperymentu pedagogicznego porównuje osiągnięcia uczniów grupy eksperymentalnej i grupy kontrolnej oraz formułuje spostrzeżenia i wnioski, oraz kierunki dalszych badań i działań. Oto niektóre z nich:

1) czynnikiem różnicującym uczniów „silnych i słabych” z matematyki jest umiejętność podejmowania i rozwiązywania zadań nietypowych oraz wykraczających poza realizowany materiał; a także umiejętność stosowania różnorodnych metod rozwiązywania nietypowych zadań matematycznych, 2) zaprezentowana *w rozprawie idea budowy cdzz oraz przykłady pomyślnego jej urzeczywistnienia skłaniają autora do napisania zarysu metodyki budowy takich zestawów zadań, adresowanych głównie do nauczycieli matematyki, 3) wykorzystanie funkcjonujących struktur distance learning i opracowanych cdzz oraz innych środków i form dydaktycznych dla rozwoju matematycznie uzdolnionych uczniów, 4) ciągle otwarte jest pytanie: jak pracować z matematycznie uzdolnioną młodzieżą, wykorzystując dorobek teorii i praktyki pedagogiki twórczości?*

M. Makiewicz (2003) podejmuje w pracy doktorskiej zagadnienie *twórczości matematycznej uczniów gimnazjów posługujących się środkami komputerowymi.* Autorka rozprawy przedstawia tu interdyscyplinarne studium literatury oraz próbuje ustalić teoretyczne podstawy badań twórczości matematycznej uczniów. Po zarysowaniu ewolucji badań dotyczących twórczości ustala współczesne wyniki badania tego pojęcia i pojęć integralnie z nim związanych: myślenia, myślenia twórczego, twórczości matematycznej, zdolności i aktywności twórczych, talentu twórczego. W rezultacie odsłania i uzyskuje pewną syntezę wiedzy na temat twórczości, w szczególności w aspekcie tematu rozprawy. *Twórczość* rozumie się tutaj szeroko, jako umiejętności niezbędne do tworzenia systemów poznawczych, estetycznych bądź zmysłowych. Natomiast *twórczość matematyczną* rozumie się tu jako pewną konkretyzację twórczości naukowej, która polega na budowaniu, modernizowaniu i uzupełnianiu aktualnego systemu wiedzy poprzez odpowiednie aktywności o charakterze twórczym. M. Makiewicz podkreśla, że twórczość matematyczna wymaga kształcenia aktywności i umiejętności matematycznych o charakterze twórczym. Podejmując badania matematycznej twórczości uczniów (MTU), autorka ogranicza się do dwóch poziomów twórczości: *twórczości płynnej* (obejmującej elementarne procesy poznawcze, emocjonalne i motywacyjne) oraz *twórczości skrystalizowanej* (dokonującej się przez dążenie do celu, rozwiązywanie problemu przy zrozumieniu jego struktury, znaczenia, kontekstu). Przy badaniu fenomenu MTU realizowanej przy pomocy środków komputerowych zastosowano dualne (humanistyczno-przyrodnicze) podejście metodologiczne i wykonano badania ilościowe oraz jakościowe. Autorka rozprawy przedstawia tu wyniki uzyskane za pomocą metod ilościowych. Ich dopełnieniem są wyniki badań jakościowych: 1) wyniki testu psychologicznego (testu twórczego myślenia), 2) wyniki testu twórczego myślenia matematycznego, które rzucają światło na MTU posługujących się środkami komputerowymi. M. Makiewicz rozpoznała m.in.: 1) stopień ogólnych zachowań twórczych uczniów gimnazjów, 2) jakość i stan dostępu do środków komputerowych badanej próby uczniów oraz opinię środowiska nauczycielskiego o ich stosowaniu w nauczaniu matematyki, 3) zakres matematycznej aktywności uczniów gimnazjów posługujących się środkami komputerowymi.

W konkluzji autorka rozprawy stwierdza, iż jej badanie potwierdza występowanie u badanych uczniów matematycznych zachowań twórczych, które ujawniały się pod wpływem stosowanego narzędzia komputerowego. Zaprojektowany i wykorzystany tu zestaw matematycznych zadań może być wykorzystany w dalszych badaniach tego problemu oraz popularyzowaniu wiedzy i umiejętności z zakresu diagnostyki matematycznych zachowań uczniów gimnazjów. M. Makiewicz z pokorą odnosi się do zgromadzonej tutaj wiedzy o matematycznych zachowaniach twórczych uczniów. Wyraźnie sygnalizuje, że to jest dopiero początek drogi ich rozpoznawania, a uzyskane tu wyniki zwiastują potrzebę modyfikacji kształcenia nauczycieli matematyki oraz metodyki nauczania i uczenia się matematyki.

E. Śmietana (2005a), nauczyciel matematyki w liceum ogólnokształcącym, podejmuje w pracy doktorskiej zagadnienie *wpływu interwencji nauczyciela na aktywność matematyczną ucznia uzdolnionego w procesie rozwiązywania matematycznego problemu,* przeprowadza indywidualny eksperyment dydaktyczny w grupie uczniów szkół średnich i uzasadnia tezę: *rozpraszające interwencje nauczyciela wpływają na wzrost matematycznej aktywności ucznia rozwiązującego problem i są one często niezbędne do rozwiązania nietypowego zadania matematycznego.* Jej autor sformułował cztery cele dla tego eksperymentu: *1) znalezienie skutecznych interwencji nauczyciela w procesie rozwiązywania matematycznego problemu przez ucznia uzdolnionego matematycznie, 2) wyodrębnienie występujących w tym procesie blokad aktywności ucznia, znalezienie ich przyczyn i sposobów ich usuwania, 3) analiza zachowania ucznia w procesie rozwiązywania matematycznego problemu po interwencji rozpraszającej nauczyciela i opis jego aktywności matematycznej, 4) ocena skuteczności działania interwencji rozpraszającej na rozwiązanie matematycznego problemu* (tamże, s. 378). Te cele osiągnął w wyniku zastosowania m.in. metody stymulowania procesu rozwiązywania problemu matematycznego (algebraicznego i geometrycznego) poprzez odpowiednio przygotowane scenariusze interwencji nauczyciela. Wpływ i skuteczność serii takich interwencji szczegółowo analizuje i opisuje w płaszczyźnie ujawnionych aktywności badanego ucznia bądź blokad jego aktywności. Ujawnioną dynamikę zmiany zachowań tak badanych uczniów przedstawia komunikatywnie na swoistych schematach blokowych. Interesujące są konkluzje E. Śmietany z jakościowej analizy dydaktycznej, które powinny być poddane dalszej weryfikacji w liczniejszej populacji badanych uczniów i z różnych poziomów kształcenia w naturalnych warunkach pracy nauczyciela matematyki. Ich sedno jest następujące:

1. W metodyce rozwiązywania matematycznych zadań skuteczne i przydatne okazały się być te *interwencje otwarcia*, wpływające na otwarcie się ucznia na ten obszar wiedzy wykorzystanej, które spowodowały skojarzenie przydatne mu w rozwiązywaniu problemu, np.: *problemu zasadniczego z problemem równoważnym powodującym zmianę lub rozszerzenie obszaru jego wiedzy.*
2. Interwencje otwarcia mają następujące cechy: a) nie zawsze pobudzają aktywność matematyczną ucznia we właściwym kierunku (mogą wywoływać u ucznia rozproszenie hamujące aktywność niezbędną do rozwiązania

problemu bądź po obszarze jego wiedzy nieznanej lub „nieprzyjaznej”), b) nie muszą być skuteczne w odniesieniu do wszystkich typów matematycznych zadań i wszystkich matematycznie uzdolnionych uczniów, c) mogą wystąpić w dowolnym momencie procesu rozwiązywania problemu i to wielokrotnie.

3. W procesie kształcenia umiejętności rozwiązywania matematycznych zadań dotychczas nie zwrócono należytej uwagi na **interwencje dywergentne** (rozpraszające) wywołujące u ucznia uzdolnionego myślenie dywergentne, które pozytywnie wpływają na wzrost jego matematycznej aktywności w tym procesie.

Problematyka badawcza pracy doktorskiej E. Śmietany wpisuje się do tego samego kierunku badań, co praca doktorska A. Pardały, który określam jako: *Problemy dydaktyczne interwencji nauczyciela w procesie kształcenia matematycznego uczniów.* Jej autor z powodzeniem adoptuje pewne kategorie pojęciowe z analizowanej literatury do swojej przestrzeni badawczej określonej przedmiotem i celami badań. Wykorzystuje np. pojęcia z literatury psychologicznej: *myślenie konwergentne (zbieżne), myślenie dywergentne (rozbieżne)* (zob. np. Gilford, 1978), a z dydaktyki matematyki wykorzystuje i poddaje badaniu pojęcie: *interwencja nauczyciela, jej formy i rodzaje, rozumianej jako interwencja konwergentna, czyli skupiająca niezbędną wiedzę ucznia do rozwiązania matematycznego zadania* (zob. Pardała, 1984). Rezultatem jego dociekań jest wzbogacenie praktyki pracy z uczniem uzdolnionym i stanu wiedzy z dydaktyki matematyki o nowe kategorie pojęciowe: *interwencja otwarcia, interwencja dywergentna* nauczyciela w procesie rozwiązywania matematycznego problemu przez ucznia matematycznie uzdolnionego.

6. Podsumowanie, uwagi i refleksje końcowe

Reasumując powyższe rozważania i analizując historycznie ewolucję kształcenia i rozwijania zdolności uczniów oraz strategie kształcenia uczniów zdolnych, można wyodrębnić **cztery podstawowe typy działań dydaktycznych i organizacyjnych**: 1) przyśpieszyć rozwój uczniów zdolnych, czyli przyśpieszenie tempa ich nauki i uczenia się, 2) wyposażyć ich w większy zasób wiedzy, czyli rozszerzenie i wzbogacenie realizowanych treści nauczania, 3) umożliwić im uzyskanie wiedzy o wyższym poziomie trudności, przy czym nieznacznie wyższym od aktualnego poziomu ich rozwoju intelektualnego oraz ich indywidualnych oczekiwań, 4) kształtować uczniowską twórczość i jej przejawy w nauczaniu przedmiotowym. Wówczas sam proces kształcenia uczniów (matematycznie uzdolnionych) przypomina realizację ciągu następujących po sobie odpowiednich zadań organizacyjnych i przedmiotowych, a kształtowanie przejawów twórczości (także matematycznej) uczniów jest docelowym jego ogniwem w nauczaniu szkolnym. Taki system edukacji uczniów uzdolnionych można przedłużyć na poziom studentów uzdolnionych, przy czym wymaga to: 1) różnicowania treści kształcenia i kształcenia wielopoziomowego, 2) przygotowania kadry nauczycieli kierujących ich rozwojem.

Koncepcja kształtowania uczniowskiej twórczości matematycznej w nauczaniu matematyki jest integralnie związana z koncepcją kształcenia i rozwijania twórczych aktywności matematycznych uczniów, która, według M. Klakli (2002, s. 48-49), **powinna odbywać się w działaniu** (z uwzględnieniem aspektów intelektualnych, dydaktycznych i ewaluacyjnych) przy zachowaniu roli nauczyciela jako planisty i kierownika tego działania. Tę koncepcję (adresowaną do uczniów szkoły średniej) cechuje dwuetapowość, czyli rozwijanie i kształcenie elementów twórczej aktywności matematycznej oraz twórczych aktywności matematycznych uczniów, oraz odpowiednio dobrany program nauczania i swoista metodologia osiągania danego rodzaju twórczej aktywności matematycznej. Także szczególną rolę odgrywa tu dobór materiału zadaniowego oraz przykłady wyjściowe, zadania wieloetapowe i przykłady paradygmatyczne.

Skuteczność kształtowania uczniowskiej twórczości w nauczaniu matematyki i pracy z uczniem matematycznie uzdolnionym warunkowana jest także harmonijnym współdziałaniem szkoły, nauczyciela matematyki i jego ekspertów (doradców metodycznych, matematyków i dydaktyków matematyki, pedagogów i psychologów twórczości). Na poziomie szkolnym powinien być rzetelnie przygotowany i realizowany **szkolny program pracy z uczniem zdolnym**, w szczególności uczniem matematycznie uzdolnionym. Taki program powinien uwzględniać przyjętą koncepcję kształcenia i wychowania uczniów zdolnych oraz wykorzystywać wieloletnie doświadczenia danej szkoły, jak i nowatorskie rozwiązania Towarzystwa Szkół Twórczych i Stowarzyszenia Szkół Aktywnych oparte na bazie pedagogiki różnic indywidualnych. Przy tworzeniu tego programu można wyróżnić następujące kierunki działania: 1) przyciąganie i rozpoznawanie uczniów utalentowanych bądź szczególnie uzdolnionych matematycznie, 2) odchodzenie od systemu klasowo-lekcyjnego na rzecz preferowania innych form aktywizacji i pracy z uczniami szczególnie uzdolnionymi matematycznie, 3) **szczególne formy pracy z uczniem bądź uczniami szczególnie uzdolnionymi matematycznie**.

Do tych szczególnych form pracy gwarantujących skuteczność kształtowania uczniowskiej twórczości matematycznej zaliczam:

1) zajęcia dodatkowe, czyli zajęcia pozalekcyjne dostosowane do indywidualnych potrzeb i zainteresowań uczniów uzdolnionych matematycznie,
2) koła matematyczne, w których pracuje młodzież z różnych poziomów nauczania; a podstawą współpracy jest tu chęć pogłębienia ich wiedzy matematycznej i wymiana poglądów w grupie o pasjach poznawczych,
3) indywidualny tok nauczania ucznia szczególnie uzdolnionego, który osiągnął sukces w konkursach matematycznych bądź na Olimpiadzie Matematycznej,

4) wrześniowe spotkania i nawiązanie współpracy (bezpośredniej w szkole bądź korespondencyjnej) byłych olimpijczyków z danej szkoły bądź z danego regionu, z młodszymi kolegami zainteresowanymi udziałem w Olimpiadzie Matematycznej, a także niekiedy indywidualne kontakty tych uczniów z pracownikami naukowymi – matematykami – wybitnymi wychowankami danej szkoły,
5) udział uczniów szczególnie uzdolnionych matematycznie w zajęciach (spotkania i warsztaty, wykłady i seminaria) organizowanych przez Wydziały (Instytuty, Katedry) Matematyki uczelni wyższych bądź objęcie ich opieką naukową przez matematyków z tych uczelni,
6) udział w zajęciach edukacyjnych organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci i kontakt pomiędzy najzdolniejszymi młodymi ludźmi w kraju a czołówką polskiej matematyki i nauki.

Powyższe przykłady międzynarodowych i rodzimych doświadczeń z kształtowania matematycznej kreatywności i twórczości uczniów potwierdzają istnienie tu różnorodnych form i dróg. W aspekcie teoretycznym są to swoiste *dowody istnienia* dobrych i sprawdzonych przykładów z praktyki nauczycielskiej. Wzbogacają one koncepcję matematycznego kształcenia i metodykę pracy z uczniami matematycznie uzdolnionymi oraz praktykę stymulowania ich matematycznej aktywności. Potwierdzają także, że: 1) problemy teoretyczne i praktyczne pracy z przyszłą elitą intelektualną – uczniami matematycznie uzdolnionymi – są wyzwaniem w skali światowej nie tylko dla dydaktyków matematyki, 2) nie chodzi tutaj o poszukiwanie jedynej optymalnej i skutecznej drogi kształtowania matematycznej kreatywności i twórczości uczniów. W środowiskach edukacyjnych bardziej należy kreować **zdrową rywalizację** (na poziomie szkolnym, międzyszkolnym, regionalnym, krajowym i międzynarodowym), która może dać zarówno szkole, nauczycielowi matematyki, jak i uczniom szerszy obraz poziomu osiągania matematycznej kreatywności. Mówiąc bowiem za P. J. Taylorem (2003): *zajęcia związane z rywalizacją mogą także dać uczniowi rzadką sposobność do spotkania uczniów z innych szkół, rozszerzenia swoich perspektyw i zdobycia nowych przyjaciół. Takie zajęcia dydaktyczne, obozy i kółka matematyczne mogą bardzo ubogacić zarówno matematyczne zainteresowania, jak i motywacje uczniów, i potencjalnie pchnąć ich na poziom daleko przewyższający klasowy. A stworzenie uczniom możliwości dostępu do właściwych matematycznych książek i czasopism może tylko wspomagać osiągnięcie tego rezultatu.*

Literatura

Addington, S., Clemens, H., Howe, R., Saul, M.: 2000, Four Reactions to Principles and Standards for School Mathematics, *Notices of the AMS October 2000, Vol. 47* **9**, 1072-1079.

Beddou, L., Mauduit, C.: 2001, Research as a method of the teaching mathematics (Descriptions of the program "Math en Jeans"), *Proceedings of the conference: Science and mathematics teaching for the information society, Toruń, Poland, 19-22 July 2000*, 11-25.

Ciesielski, K., Pogoda, Z.: 1995, *Bezmiar matematycznej wyobraźni*, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Gilford, J. P.: 1978, *Natura inteligencji człowieka*, PWN, Warszawa.

Grozdev, S.: 2003, Students – researchers, *Proceedings of the Third International Conference: Creativity in mathematics education and the education of gifted students, ICCME&EGS'2003*, Rousse, Bulgaria, 49-52.

Jagoda, E., Panek, D., Pardała, A.: 2001, Formy kształcenia i rozwijania uczniów uzdolnionych matematycznie, w: J. Łaszczyk (red.), *Uzdolnienia Intelektualne i Twórcze (Teoria. Diagnoza. Metodyki)*, Wydawnictwo *Universitas Rediviva*, Warszawa, 168-173.

Karp, A.: 2003, Teaching to teach creatively, *Proceedings of the Third International Conference: Creativity in mathematics education and the education of gifted students, ICCME&EGS'2003*, Rousse, Bulgaria, 73-79.

Klakla, M.: 2002, Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 263-273.

Kraus, M.: 2001, Formowanie umiejętności twórczego rozwiązywania zadań (na przykładzie pracy z uczniami klasy o profilu matematyczno-fizycznym liceum ogólnokształcącego). Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2001 roku na Akademii Pedagogiki Specjalnej im. M. Grzegorzewskiej w Warszawie.

Makiewicz, M.: 2003, Twórczość matematyczna uczniów gimnazjów posługujących się środkami komputerowymi. Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2003 roku w Uniwersytecie Szczecińskim.

Śmietana, E.: 2005a, Wpływ interwencji nauczyciela na aktywność matematyczną ucznia uzdolnionego w procesie rozwiązywania matematycznego problemu. Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2005 roku na Akademii Pedagogicznej im. KEN w Krakowie.

Śmietana, E.: 2005b, Wpływ interwencji nauczyciela na aktywność matematyczną ucznia uzdolnionego w procesie rozwiązywania matematycznego problemu, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 377-388.

Pardała, A.: 1984, *Problemy dydaktyczne związane z interwencją nauczyciela w toku rozwiązywania zadań matematycznych przez uczniów*, WU WSP w Rzeszowie, Rzeszów.

Pardała, A.: 2003, Creativity Formation In Mathematics Education, *Proceedings of the Third International Conference: Creativity in mathematics education and the education of gifted students, ICCME&EGS'2003*, Rousse, Bulgaria, 326-333.

Pardała, A.: 2004, Kształtowanie twórczości w nauczaniu matematyki a praktyka szkolna i nauczycielska, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 265-287.

Pardała, A.: 2006, Nowe tendencje w kształceniu matematycznym szansą podniesienia jego poziomu, w: M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej im. J. Kochanowskiego, Kielce, 13-28.

Pardała, A.: 2007, Problems teacher‘s practice forming mathematical activity and creativity of the gifted pupils, w: J. Povstenko (red.), *Scientific Issues J. Długosz University of Częstochowa. Mathematics XII*, Częstochowa, 319-328.

Sharygin, I. F.: 2000, Two articles and two hundred problems. Maszynopis udostępniony przez autora.

Steckel, S.: 1938, Kształcenie uczniów zdolnych do matematyki, *Matematyka i Szkoła* **II, III**, 113-121.

Taylor, P. J.: 2003, Occasional Address of Doctor Honoris Causa Prof. Peter James Taylor., *Proceedings of the Third International Conference: Creativity in mathematics education and the education of gifted students, ICCME&EGS‘2003*, Rousse, Bulgaria, 19-22.

Terman, L. M., Oden, M. H.: 1947, The Gifted Child Grows Up; Twenty- Five Years' Follow-up of a Superior Group, *Genetic studies of genius* **IV**, 1-448.

Terman, L. M., Oden, M. H.: 1959, The Gifted Group at Mid-life; Thirty-Five Years‘ Follow-up of the Superior Child, *Genetic studies of genius* **V**, 1-187.

Утеева, Р. А.: 2001, *Концептуальная модель дифференцированного обучения математике творчески одаренных детей* , w: J. Łaszczyk (red.), *Uzdolnienia Intelektualne i Twórcze (Teoria. Diagnoza. Metodyki)*, Wydawnictwo *Universitas Rediviva*, Warszawa, 157-160.

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska im. I. Łukasiewicza
ul. W. Pola 2
PL-35-959 Rzeszów
e-mail: pardala@prz.rzeszow.pl