FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Halina Pieprzyk, Anna Żeromska

Diagnoza wiedzy uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów matematyki na temat związku twierdzenia z jego dowodem

Abstract. The paper presents results of research carried out on the two following levels of mathematics education: the high school level and the level of pre-service Mathematics teachers training.

The subject of the research was understanding the relations between mathematical theorem and its proof by the study participants.

Istotę matematyki, a więc to, co powinno najsilniej wyodrębniać tę naukę w oczach ucznia spośród innych przedmiotów nauczania, upatrujemy w roli definicji i dowodu. W pełni abstrakcyjny charakter pojęć matematycznych wymaga, by polegać wyłącznie na ich definicyjnej charakterystyce, a w badaniu ich własności i związków wzajemnych – na dedukcji (Legutko, Turnau, 1989, s. 13-14).

Uzasadnienie istotności tematu

Obserwując zmiany następujące w ostatnich latach w planach i programach nauczania matematyki, można wyraźnie dostrzec systematyczne wypieranie z niej formalnych rozumowań i dowodów w kierunku zastępowania ich wnioskowaniami empirycznymi oraz rozumowaniami intuicyjnymi. Tendencja ta wynika prawdopodobnie z próby ułatwienia uczniom matematyki szkolnej i omijania pewnych trudności w nauczaniu tych właśnie formalnych elementów. Z całą stanowczością należy jednak stwierdzić, że matematyka bez jawnie eksponowanych elementów metody matematycznej zmienia swoją istotę, a to rzutuje na cały jej charakter, łącznie ze sposobami i metodami rozwiązywania zadań.

W artykule *Budowa i rodzaje twierdzeń* (Kąkol, 1985a) autor podkreśla, że: „jednym z podstawowych celów nauczania matematyki jest wyrabianie u uczniów umiejętności prowadzenia rozumowań matematycznych tj. umiejętności formułowania twierdzeń, odróżniania w twierdzeniach założenia i tezy oraz przeprowadzania prostych rozumowań." H. Kąkol stwierdza dalej, że w nauczaniu matematyki bardzo trudnym, skomplikowanym oraz niezwykle złożonym problemem jest kształtowanie u uczniów logicznego myślenia, a także wyrażania myśli w języku matematyki i przy użyciu symboliki matematycznej. Dotyczy to przede wszystkim zagadnień związanych z pojęciem twierdzenia, jego dowodzeniem i stosowaniem. Problemem dla wielu uczniów jest pojęcie prawdziwości twierdzenia, zrozumienie roli dowodu, metod dowodzenia, a przede wszystkim samodzielne odkrywanie dowodu.

W latach 70. B. J. Nowecki (1978) prowadził badania nad rozumieniem przez uczniów twierdzeń i ich dowodów, które wykazały niezbicie, że poziom wiedzy młodzieży w tym zakresie był wysoce niezadowalający. Można przypuszczać, że wobec zarysowanych wcześniej tendencji programowych, dziś problem jest nadal aktualny, a sytuacja, być może, przedstawia się jeszcze gorzej. Temat warty jest uwagi, szczególnie w odniesieniu do uczniów klas licealnych, a także, lub może nawet przede wszystkim, do studentów matematycznych studiów nauczycielskich. Elementy rozumienia metody matematycznej (w tym roli twierdzenia i jego dowodu) są niezbędnym elementem wykształcenia matematycznego realizowanym na drugim poziomie celów (Krygowska, 1986). Jest to ten poziom realizacji celów, do którego w sposób oczywisty powinni być przygotowani przyszli nauczyciele matematyki.

Ramy teoretyczne rozważań badawczych

A. Co oznacza termin „twierdzenie" w matematyce szkolnej?

A. Mostowski stwierdza, że:

> Wyrażenie T nazywamy twierdzeniem teorii matematycznej Q, jeżeli istnieje skończony ciąg funkcji zdaniowych tej teorii T_0, T_1, T_2, ..., T_n, czyniący zadość następującym warunkom:
>
> 1. T_n jest identyczne z T,
> 2. Dla $i \leqslant n$ wyrażenie T_i jest albo aksjomatem teorii Q, albo powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe funkcji zdaniowych teorii Q, albo jest podstawieniem aksjomatu definicyjnego albo aksjomatu ekstensjonalności, albo wreszcie T_i powstaje z jednej lub dwu funkcji zdaniowych T_j, T_k poprzedzających T_i w ciągu T_0, T_1, T_2, ..., T_n przez jedną z operacji: podstawiania, odrywania, opuszczania kwantyfikatorów, dołączania kwantyfikatorów, uogólniania.
>
> (Mostowski, 1948, s. 227)

Takie określenie pojęcia twierdzenia jest oczywiście dla większości uczniów zbyt trudne, nie jest zatem przydatne w nauczaniu. W literaturze dydaktycznej znajdujemy próby i polemiki mające na celu takie określenie tego, czym jest *twierdzenie*, które można zaaplikować dla potrzeb matematyki szkolnej. Autorzy książki *Nauczanie geometrii w klasach licealnych szkoły ogólnokształcącej* (Krygowska, Kulczycki, Straszewicz, 1954) proponują, by za twierdzenie uznać „zdanie wypowiadające te własności utworu, które nie są zawarte w wypowiedzianych pewnikach lub definicjach". Zdaniem S. Turnaua (1974), „twierdzeniem teorii opartej na aksjomatyce X nazywamy każde wyrażenie zdaniowe, wywiedlne z wyrażeń zbioru X przy zastosowaniu praw logicznych". Przytoczone sformułowania bez wątpienia są mniej formalne niż określenie A. Mostowskiego, ale ich przydatność w szkole może być dyskusyjna. H. Kąkol (1985b) pisze: „takie określenie terminu twierdzenie wydaje się nieco łatwiejsze, ale dla ucznia gimnazjum nadal mało przydatne, ponieważ występują w nim niezrozumiałe dla niego terminy, takie jak: teoria, aksjomatyka, wyrażenie zdaniowe, czy też bliżej nieokreślone prawa logiczne".

Skoro istnieją tak wielkie problemy z formalnym określeniem metodologicznego pojęcia *twierdzenie* w matematyce szkolnej, należy może skupić się na mniej formalnym rozumieniu tego terminu. Być może to ilość i jakość doświadczeń uczniowskich z tym elementem matematycznej metody spowodują prawidłowe, choć może nieco intuicyjne, wystarczające jego rozumienie. Kluczem jest tu eksponowanie w nauczaniu specyficznej budowy twierdzeń oraz kształtowanie umiejętności ich zapisu. H. Siwek (2005) pisze: „przy opracowaniu twierdzeń należy zwrócić uwagę na znaczenie założenia, poprzez które ustalamy, jakie warunki ma spełniać obiekt, a następnie znaczenie tezy, poprzez którą stwierdzamy własność przynależną temu obiektowi". Autorka pisze dalej, że „jeśli uczeń to dobrze zrozumie, powinien umieć np. zaprzeczyć implikacji i odpowiedzieć na pytanie, kiedy twierdzenie nie zachodzi". Istotną dla prawidłowego zrozumienia pojęcia twierdzenia jest również umiejętność odformalizowywania jego symbolicznej wypowiedzi i na odwrót: zapisu formalizującego jego wypowiedź słowną.

Podsumowując rozważania tego paragrafu, trzeba zauważyć jeszcze jedną, zasadniczą różnicę pomiędzy rozumieniem terminu *twierdzenie* w matematyce jako nauce oraz w jej nauczaniu. *Twierdzeniami teorii sformalizowanej* nazywamy te formuły, które mają na gruncie tej teorii dowód formalny. Natomiast w praktyce szkolnej uczniowie, a także nauczyciele oraz niektórzy autorzy podręczników szkolnych, twierdzenie pojmują jako zdanie logiczne, które niekoniecznie jest prawdziwe. Dlatego też używają terminów: *twierdzenie prawdziwe*, *twierdzenie fałszywe*. Z. Krygowska (1977) pisze, że „terminu *twierdzenie* używamy w znaczeniu tradycyjnie przyjętym w nauczaniu szkolnym języku. Tak więc mamy *twierdzenie prawdziwe* – to jest wywiedlne w ramach danej teorii, *twierdzenie fałszywe* – to takie, którego zaprzeczenie jest wywiedlne w tej teorii". Widzimy, że autorka dopuszcza używanie terminu *twierdzenie* w odniesieniu do zdań logicznie fałszywych, ale nie byle jakich, bo takich, dla których istnieje dowód ich zaprzeczeń w danej teorii. *Twierdzenie prawdziwe* jest zdaniem już udowodnionym lub wskazano dla niego dowód. *Twierdzenie fałszywe* jest takim zdaniem logicznym, którego zaprzeczenie jest zdaniem prawdziwym. Pogląd taki jest korzystny dla kształcenia matematycznego, gdyż podkreśla się wtedy znaczenie dowodu: należy taki dowód skonstruować lub wskazać w dostępnych źródłach informacji (Pieprzyk, 1985).

B. Dowodzenie twierdzeń w matematyce szkolnej

Wywiedlność jest najważniejszą cechą twierdzeń. Ona decyduje przecież o ich prawdziwości. Ale czy jest tak też z punktu widzenia ucznia? H. Kąkol (1985b) pisze: „pojęcie prawdziwości twierdzenia uczniowie rozumieją różnie, bardzo rzadko jednak w sensie formalnej wywiedlności z pewnych ustalonych przesłanek". Nic dziwnego, skoro, zdaniem S. Turnaua (1990), „o prawdziwości twierdzenia można się przekonać w różny sposób; dowód w wielu przypadkach dla niematematyka nie stanowi najmocniejszego argumentu. Gdy twierdzenie daje się sprawdzić w swojej konkretnej interpretacji, wówczas jego prawdziwość jest konsekwencją zgodności teorii matematycznej z rzeczywistością, do opisu której ta teoria została stworzona". Autor podaje za przykład twierdzenie Pitagorasa, które można nieograniczenie sprawdzać pomiarem na dokładnych rysunkach i odpowiednim rachunkiem. Podobne zagadnienia i problemy prezentuje J. Hawro (2006; 2007). Od studentów studiów matematycznych wymaga się dużej samodzielności w zdobywaniu, poszerzaniu i utrwalaniu wiedzy (Hawro, 2006). Wymagana jest do tego umiejętność czytania tekstu matematycznego, natomiast J. Konior pisze: „Programy studiów wyższych oraz dotychczasowa praktyka kształcenia nie uwzględniają oddzielnej i usankcjonowanej w ramach zajęć ze studentami nauki czytania i wykorzystywania specjalistycznych tekstów z zakresu matematyki (...)" (Konior, 1998).

Nie mamy jednak wątpliwości, że jeśli matematyka szkolna ma oddawać charakter swojej dziedziny macierzystej w czystej postaci, powinna być eksponowana formalna rola dowodu, jako niepodważalnego kryterium prawdziwości twierdzenia matematycznego. Dlatego też rola dowodu, jego zrozumienie oraz umiejętność odkrywania i samodzielnego przeprowadzania powinny być w nauczaniu szczególnie mocno akcentowane. H. Siwek (2005) pisze: „dowodzenie twierdzeń matematycznych ma znaczenie uniwersalne. Rozumowania dowodowe przyzwyczajają do ścisłości, konsekwencji, porządku, ogólnie – przyczyniają się do kształtowania kultury logicznej i matematycznej ucznia".

Przeprowadzenie dowodu dedukcyjnego jest operacją trudną i złożoną, nawet dla oczywistych twierdzeń. „Dowód taki polega na wysnuwaniu wniosków logicznych z założeń, aksjomatów i uprzednio udowodnionych twierdzeń. Każdy krok dowodu jest sformułowaniem pewnego warunku koniecznego poprzednich przesłanek. Trudność polega na tym, że tych koniecznych warunków jest na ogół wiele. Każdy z nich może być początkiem całego łańcucha wniosków; przy czym nie wiadomo z góry, na której z tych dróg napotkać można tezę jako kolejny wniosek" (Krygowska i inni, 1954). Ten fakt w sposób oczywisty powoduje, że samodzielne przeprowadzanie rozumowań typu dowodowego jest dla uczniów umiejętnością trudną. Należy o tym pamiętać, gdyż w kształceniu matematycznym istotne jest rozróżnianie uczenia „dowodzenia" od „uczenia dowodów". W pierwszym przypadku mamy na myśli dobrze zorganizowany proces, w wyniku którego: 1) doprowadzamy do sytuacji, kiedy uczeń odczuwa potrzebę uzasadnienia wyciągniętego przez siebie (lub zasugerowanego mu przez innych uczniów, czy nauczyciela) wniosku, 2) używa aparatu matematycznego dla poprawnego argumentowania uzasadniającego prawdziwość postawionej hipotezy. Pamiętać przy tym należy, iż, jak twierdzi S. Turnau (1990), „trudne jest przedstawienie na piśmie ogólnego rozumowania, np. dowodu twierdzenia w sposób zgodny ze standardem poprawności i ścisłości; wymaga to m.in. samodzielnego doboru i wprowadzenia zmiennych i innych symboli oraz konsekwentnego posłużenia się nimi. Od wymyślenia dowodu, czy nawet od powiedzenia go komuś, do jego napisania jest daleka i trudna droga". Wypowiedź S. Turnaua wskazuje na wyraźne różnice między językiem pisanym matematyki a ustną wypowiedzią myśli matematycznej. O wiele łatwiej jest „opowiedzieć dowód", ponieważ możemy posłużyć się gestem, wskazując na odpowiedni obiekt. Trudną sztukę redagowania tekstu uczeń powinien opanować pod kierunkiem nauczyciela lub korzystając z literatury matematycznej.

Natomiast „uczenie dowodów" jest celowym działaniem nauczyciela ukierunkowanym na zrozumienie i przyswojenie sobie przez ucznia gotowego rozumowania dowodowego sporządzonego bądź w postaci werbalnej, bądź przedstawionego w formie tekstu. Tu również napotykamy ograniczenia. Lektura tekstu matematycznego jest zwykle dla uczących się niełatwa. Tym bardziej, jeśli jest nim gotowy tekst dowodu twierdzenia matematycznego. Aby się o tym przekonać, S. Turnau (1990) radzi, aby wziąć dostatecznie trudny tekst matematyczny i zaobserwować wszystkie wykonane czynności w trakcie jego czytania. Będą wtedy miały miejsce m.in. następujące czynności: uzupełnianie tekstu (ponieważ często jest on przedstawiony bez komentarza metodologicznego i, jak pisze Krygowska (Krygowska, 1977), jest on „po prostu nie dydaktyczny"), kodowanie i odkodowywanie wyrażeń słownych na symboliczne i odwrotnie, wykonywanie rysunków itd. Opanowywanie umiejętności studiowania gotowych dowodów matematycznych powinno być zatem długotrwałe i rozłożone na etapy.

To wszystko powoduje, że nauczanie metody matematycznej w odniesieniu do roli dowodów w teorii matematycznej powinno być, zdaniem wspomnianych autorów, świadomie rozłożone na trzy poziomy:

Poziom 1 – dowód rozumiany jako argument ogólny (w przeciwieństwie do przekonania na podstawie sprawdzenia kilku przypadków szczególnych),

Poziom 2 – dowód jako rozumowanie odwołujące się do wcześniej sformułowanych definicji i twierdzeń (w przeciwieństwie do jakiegokolwiek argumentu ogólnego),

Poziom 3 – dowód w zwykłym rozumieniu globalnie dedukcyjnej teorii matematycznej.

Nawet rozumienie roli dowodu na poziomie 1 wymaga od ucznia pewnej świadomości metodologicznej. Ta świadomość musi mieć odniesienia do umiejętności związanych z rozumowaniami formalnymi na gruncie matematyki.

Przypomnijmy, że myślenie matematyczne jest splotem rozumowania empirycznego, intuicyjnego i formalnego. Każda z tych składowych winna być uwzględniana w procesie nauczania matematyki oraz spełniać określone funkcje. Najistotniejsze jest wyważenie właściwego stosunku między wymaganiami poszczególnych rodzajów rozumowania (Nowak, 1989, s. 281).

Mówiąc o *wnioskowaniu empirycznym*, mamy na myśli, za A. Z. Krygowską (1977), sytuację, kiedy uczeń formułuje hipotezę matematyczną na podstawie:

- obserwacji i doświadczenia w konkretnej fizycznej przestrzeni, które w rezultacie matematyzacji występujących tu stosunków opisuje, używając terminów matematycznych, lub
- indukcyjnych prób już w zakresie samej matematyki.

Zatem rozumowanie ucznia jest tu oparte na jednostkowych próbach doświadczalnych, dokładnie tak, jak w przypadku przyrodników, którzy na podstawie zebranych próbek stawiają wnioski, uogólniają.

Rozumowanie intuicyjne opiera się na:

- posługiwaniu się przede wszystkim wyobraźnią, tj. obrazami pojęć, które rozważa niezależnie od ich formalnych definicji,
- przeprowadzaniu skrótowych rozumowań opartych na oczywistych (...) przesłankach niezależnie od ich wywiedlności w ramach danego układu,
- formułowaniu hipotez matematycznych opartych na dostrzeżonych analogiach, odpowiedniościach, odwzorowaniach,
- uzasadnianiu własnych wniosków niezanalizowaną dokładnie rekurencją.

To jeszcze nieformalne rozumienie ma ogromne znaczenie w nauczaniu matematyki, ponieważ dowód nic nowego do wiedzy ucznia nie wniesie, a będzie jedynie, jak zauważa H. Siwek (2005), „zalegalizowaniem jego intuicyjnego przypuszczenia".

Rodzajem rozumowania ściśle związanym z rozumowaniem typu dowodowego jest *rozumowanie formalne* scharakteryzowane przez Krygowską (1977) jako sytuacja, kiedy uczeń: „1) zdaje sobie sprawę z przyjętej podstawy dedukcji, 2) świadomie w toku rozwiązywania zagadnienia stara się każdy z kolejnych wniosków możliwie precyzyjnie wywieść z uznanych już poprzednio w danym układzie twierdzeń i definicji, 3) korzysta prawidłowo z definicji (...), rozumie, że nowy termin może wprowadzić do swych rozważań po wyjaśnieniu jego znaczenia tylko za pomocą terminów poprzednio już wprowadzonych, 4) korzysta prawidłowo z twierdzeń, tj. odrywa tezę dopiero po dokładnym skontrolowaniu, czy w danym przypadku są spełnione założenia".

Wymienione rodzaje rozumowań spełniają różne, czasem wręcz odrębne role w aktywności uczących się. Mogą się one przeplatać i uzupełniać nawzajem.

B. Nowecki stwierdza:

> W dydaktyce metody matematycznej musimy uwzględnić zarówno czynnik intuicyjny, jak i formalny. Istotne jest jednak to, iż ze względów czysto dydaktycznych, w pewnych okolicznościach dopuszczamy do przewagi intuicji, w innych celowo i świadomie akcentujemy mocno stronę formalną rozumowań. Zachowanie równowagi między doświadczeniem, intuicją, rozumowaniem naturalnym i zmysłowym spostrzeganiem z jednej strony, a rozumowaniem formalnym z drugiej w nauczaniu matematyki, jest jednym z ważnych problemów współczesnej dydaktyki matematyki.
>
> (Nowecki, 1978, s. 5-14)

Zawartość każdego rodzaju myślenia matematycznego w rozumowaniu zależy od poziomu, jaki został przez danego ucznia osiągnięty. W szczególności ważne jest, czy rozwój psychologiczny ucznia pozwala mu już rozumować na poziomie formalnym, co jest bardzo istotne dla pojmowania roli twierdzenia i dowodu w matematyce.

Badania i rozważania przedstawiane w niniejszej pracy dotyczą poziomu nauczania ponadgimnazjalnego i poziomu studiów, na których umiejętność rozumowań formalnych nie powinna już napotykać przeszkód rozwojowych.

Opis i wyniki badań

Opisywane badania były prowadzone w latach 2005-2007. Ich organizację można podzielić na dwa etapy. W pierwszym badaniami objęto uczniów klas II i III liceów ogólnokształcących (profil matematyczny) w Krakowie i w Chrzanowie. Ogółem badaniu poddano 118 licealistów (w tym 60 drugoklasistów i 58 trzecioklasistów (Bebel, 2006)). Etap drugi dotyczył studentów III i IV roku studiów matematycznych na Akademii Pedagogicznej w Krakowie (łącznie 72 osoby).

Cele opisywanych badań można zestawić następująco:

1. Twierdzenie w procesie edukacji matematycznej:

   (1.1) Jakie kryteria stosują uczniowie i studenci dla oceny prawdziwości twierdzeń matematycznych?

2. Dowód w procesie edukacji matematycznej:

   (2.1) Czy uczniowie i studenci potrafią analizować tekst dowodu matematycznego jako ciąg logicznie z siebie wynikających wniosków?

   (2.2) Czy osoby badane potrafią odszukać i ewentualnie poprawić błąd znajdujący się w tekście dowodu?

(2.3) Jaka jest reakcja ucznia i studenta na fakt, iż tekst dowodu matematycznego zawiera błąd w kontekście poprawności tego dowodu?
(2.4) Czy badani traktują dowód danego twierdzenia matematycznego jako niepodważalne kryterium jego prawdziwości?

Metodą badawczą zastosowaną w opisywanych badaniach była analiza wytworów pisemnych uczniów i studentów. Narzędzie badawcze stanowiły specjalnie skonstruowane arkusze do pracy samodzielnej. Praca obejmowała trzy takie arkusze, nad którymi badani pracowali samodzielnie w nielimitowanym czasie.

Arkusz badawczy nr 1 („Dwusieczna kąta")

Komentarz do arkusza nr 1

Tekst zawiera twierdzenie matematyczne, które jest prawdziwe, a także jego dowód, który jest fałszywy, ponieważ zawiera błąd, który polega na tym, że:
1) o odcinku AD wiadomo, iż zawiera się w dwusiecznej kąta A,
2) trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość,
3) wspólna wysokość wspomnianych trójkątów nie musi pokrywać się z odcinkiem AD, a tak wynika z przedstawionego tekstu. Ten błąd można łatwo wyeliminować, zauważając, że odcinek AD (w analizowanej równości) należy zastąpić równymi wysokościami obu trójkątów opuszczonymi z punktu D. Osoba wypełniająca arkusz prawidłowo powinna:

- dostrzec i poprawić błąd w dowodzie (i w konsekwencji dać pozytywną odpowiedź na oba postawione pytania), lub
- dostrzec błąd i uznać dowód za niepoprawny (wówczas odpowiedź na pytanie 1 byłaby negatywna, natomiast na pytanie 2 powinna brzmieć „na podstawie przedstawionego dowodu nie można stwierdzić prawdziwości twierdzenia").

Arkusz badawczy nr 2 („suma wysokości")

Komentarz do arkusza nr 2

Przedstawiony arkusz zawiera twierdzenie matematyczne, które jest prawdziwe oraz jego dowód, który jest poprawnie przeprowadzony. W związku z tym, osoba wypełniająca arkusz prawidłowo powinna:

- przeanalizować elementarne wnioskowania przedstawione w tekście dowodu i uznać go za poprawny, oraz
- w konsekwencji tego uznać twierdzenie za prawdziwe.

Imię i nazwisko .... klasa ....

Ocena z matematyki w ostatnim semestrze ....

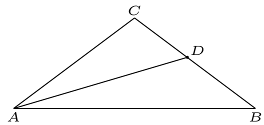
Przeczytaj poniższe twierdzenie i przeanalizuj jego dowód, a następnie odpowiedz na pytania poniżej.

Twierdzenie

Jeżeli AD jest dwusieczną kąta BAC w trójkącie ABC, to $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Dowód:

Niech:



S_1 – pole trójkąta ABD,

S_2 – pole trójkąta ADC,

E – rzut prostokątny punktu D na prostą AB,

F – rzut prostokątny punktu D na prostą AC.

Zauważmy, że $|DE| = |DF|$, ponieważ D leży na dwusiecznej kąta BAC.

Stąd

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|AB||DE|}{\frac{1}{2}|AC||DF|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Ponadto trójkąty ABD i ADC mają tę samą wysokość.

Stąd

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|AD||BD|}{\frac{1}{2}|AD||CD|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Zatem

$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

1. Czy dowód twierdzenia uznajesz za poprawny? Odpowiedź uzasadnij.

....
....
....
....
....
....
....

2. Czy twierdzenie oceniasz jako prawdziwe? Odpowiedz uzasadnij.

....
....
....
....
....
....
....

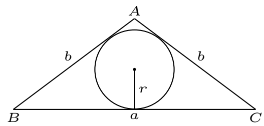
Rysunek 1. Arkusz badawczy nr 1.

Imię i nazwisko .... klasa ....
Ocena z matematyki w ostatnim semestrze ....

Przeczytaj poniższe twierdzenie i przeanalizuj jego dowód, a następnie odpowiedz na pytania poniżej.

Twierdzenie
Jeżeli suma wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód:
Przyjmijmy oznaczenia tak jak na rysunku oraz niech h_a – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok a, h_b – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok b, h_c – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok c.



Prawdą jest, że $h_a + h_b + h_c = 9r$.
Niech P – pole trójkąta ABC.
Mamy $P = p \cdot r$, gdzie p – połowa obwodu trójkąta ABC ($p = \frac{a+b+c}{2}$).
Ponadto $\frac{1}{2}ah_a = pr$, $\frac{1}{2}bh_b = pr$, $\frac{1}{2}ch_c = pr$.
Stąd $h_a = \frac{2pr}{a}$, $h_b = \frac{2pr}{b}$, $h_c = \frac{2pr}{c}$.
Oraz $\frac{2pr}{a} + \frac{2pr}{b} + \frac{2pr}{c} = 9$,
$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 9$,
$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 9$,
$(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}) + (\frac{a}{c} - 2 + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} - 2 + \frac{c}{b}) = 0$,
$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)^2}{ac} + \frac{(b-c)^2}{cb} = 0$.

Z ostatniej równości wynika, że $a = b = c$.

1. Czy dowód twierdzenia uznajesz za poprawny? Odpowiedź uzasadnij.

....
....
....
....
....

2. Czy twierdzenie oceniasz jako prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

....
....
....
....
....

Rysunek 2. Arkusz badawczy nr 2.

Arkusz badawczy nr 3 („4 = 5")

Komentarz do arkusza nr 3

Przedstawiony arkusz zawiera rozumowanie o charakterze formalnym, w skład którego wchodzi twierdzenie (w oczywisty sposób fałszywe) oraz pewien jego błędny dowód. Błąd w dowodzie polega na korzystaniu z różnowartościowości funkcji kwadratowej, która oczywiście taka nie jest. Po dostrzeżeniu tego faktu, osoba prawidłowo wypełniająca omawiany arkusz powinna odpowiednio to skomentować w kontekście poprawności przedstawionego rozumowania.

Imię i nazwisko .... klasa ....
Ocena z matematyki w ostatnim semestrze ....

Twierdzę, że $2 \cdot 2 = 5$ i zaraz Wam to udowodnię!

Każdy się ze mną zgodzi, że:

$$16 - 36 = 25 - 45 \ / + (-\tfrac{9}{2})^2,$$

$$16 - 36 + (-\tfrac{9}{2})^2 = 25 - 45 + (-\tfrac{9}{2})^2.$$

Teraz będę korzystać ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

$4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-\frac{9}{2}) + (-\frac{9}{2})^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{9}{2}) + (-\frac{9}{2})^2,$
$(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2,$
$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \ / + \frac{9}{2},$
$2 \cdot 2 = 5.$

I co Ty na to? Odpowiedź uzasadnij.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rysunek 3. Arkusz badawczy nr 3.

Analiza ilościowa i jakościowa zebranego materiału badawczego

A. Uczniowie liceum ogólnokształcącego

A.1 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 1

Analizę rozpoczniemy od ilościowego przedstawienia w tabeli A.1.1 grup uczniów w zależności od odpowiedzi udzielonej na **pytanie 1**.

Z zestawienia widać, że 25 uczniów na wszystkich 118 badanych uznaje niesłusznie przedstawiony dowód za poprawny, twierdząc, że odcinek AD jest wysokością trójkąta ABC (patrz Arkusz badawczy nr 1). Warto też zwrócić uwagę, że 19 uczniów dokonuje nawet uzasadnienia tej poprawności. Jeden z tych uczniów napisał: *to jest prawidłowy tok rozumowania*. Uczeń ten przeanalizował tekst dowodu i nie znalazł tam żadnego błędu merytorycznego, potwierdza to pomocniczy rysunek wykonany na karcie pracy. Wśród omawianych 19 uzasadnień poprawności dowodu są również i takie, które zupełnie nie nawiązują do analizowanego tekstu. Odwołują się do wcześniejszych doświadczeń szkolnych badanych uczniów. Prawdopodobnie spotkali się oni na lekcji matematyki z tym lub podobnym twierdzeniem i jego dowodem. Jedna z takich osób pisze: *wyprowadzenie tego twierdzenia było za pomocą stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt, styczne tworzyły ramiona kąta*. Sposób dowodzenia przypominany sobie przez tego ucznia nie ma żadnego związku z przedstawionym mu do analizy tekstem.

Tabela A.1.1.

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="6">DOWÓD</td></tr>
<tr><td colspan="2">Poprawny</td><td colspan="3">Fałszywy</td><td rowspan="3">Brak opinii</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Brak uzasadnienia</td><td rowspan="2">Uzasadnienie</td><td rowspan="2">Brak uzasadnienia</td><td colspan="2">Uzasadnienie</td></tr>
<tr><td>poprawne</td><td>niepoprawne</td></tr>
<tr><td>Kl. II</td><td>5</td><td>12</td><td>3</td><td>13</td><td>18</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Kl. III</td><td>1</td><td>7</td><td>2</td><td>19</td><td>18</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Razem</td><td>6</td><td>19</td><td>5</td><td>32</td><td>36</td><td rowspan="2">20</td></tr>
<tr><td colspan="2">25</td><td colspan="3">73</td></tr>
</table>

Wśród uczniowskich uzasadnień niepoprawności można wskazać takie, które mają podłoże intuicyjno-emocjonalne. Uczniowie piszą np.: *nie wiem, nie podoba mi się ten dowód ale chyba jest dobry*, lub wręcz: *nie widzę błędów w dowodzie – ale jestem tylko człowiekiem z dopuszczającą oceną z matematyki*.

Z przedstawionej tabeli wynika, że 20 uczniów w żaden obserwowalny sposób nie udziela odpowiedzi na pytanie 1. Być może jest to grupa osób, dla których zadanie przeczytania ze zrozumieniem formalnego tekstu matematycznego okazało się za trudne.

Pozostałych 73 uczniów słusznie stwierdza niepoprawność analizowanego dowodu. Połowa z nich nie podaje jednak żadnego uzasadnienia swojej odpowiedzi. Pozostali uczniowie znajdują błąd zawarty w dowodzie, wskazując na odcinek AD, który nie musi być wspólną wysokością, tak jak sugeruje to analizowany tekst. Omawiana grupa uczniów (około 1/3 przebadanej populacji), to prawdopodobnie ci, którzy z sukcesem podołali zadaniu przeanalizowania tekstu matematycznego i wyciągnięcia z tej analizy poprawnych wniosków. Prace większości z tych osób zawierają ślady analizy tekstu w postaci różnych znaczków, tzw. „fajek” lub pomocniczych rysunków, co potwierdza ich aktywność w trakcie lektury.

To, co różnicuje uczniów z omawianej 73-osobowej grupy, to reakcja na błąd dostrzeżony w tekście. Nieliczne osoby (4 uczniów) poprawiają ten błąd i sprawiają, że tekst staje się merytorycznie poprawny. Inni uczniowie (6 osób) po zlokalizowaniu błędu porzucają analizowany tekst i podejmują próbę przeprowadzenia dowodu innym sposobem. Pozostali uczestnicy badań poprzestają jedynie na wskazaniu miejsca błędu i skomentowaniu tego faktu.

W odniesieniu do **pytania 2** arkusza badawczego nr 1 ilościowe zestawienie rodzajów odpowiedzi udzielonych przez badanych uczniów przedstawia tabela A.1.2.

Tabela A.1.2.

	TWIERDZENIE				
	Prawdziwe		Fałszywe		Brak opinii
	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	
Kl. II	8	32	8	6	6
Kl. III	5	22	3	10	18
Razem	13	54	11	16	24
	67		27		

Z powyższej tabeli widać, że 67 uczniów ocenia poprawnie prawdziwość rozważanego twierdzenia, ale należy zwrócić uwagę, iż 13 osób w żaden sposób nie uzasadnia swojej odpowiedzi. Trudno wykluczyć możliwość, że jest ona po prostu przypadkowa. Pozostałe osoby oceniające twierdzenie jako prawdziwe często bazują na wiadomościach zapamiętanych z nauki szkolnej. Uczeń pisze np. *kojarzy mi się, że takie twierdzenie było w szkole.* Te skojarzenia niekiedy są mylne, np.: jeden z uczniów rozpoznaje w ocenianym twierdzeniu twierdzenie Talesa. Inni uczniowie z omawianej 67-osobowej grupy oceniają prawdziwość twierdzenia, odnosząc swoje rozważania do szczególnego przypadku, jakim jest trójkąt równoboczny i równoramienny lub też dokonują weryfikacji, opierając się jedynie na rysunku zawartym w tekście. Tylko 2 uczniów z tej grupy pisze, że prawdziwość twierdzenia wynika z bezbłędności dowodu, który wcześniej został przez nich poprawiony.

Kolejna grupa uczniów, na prace których należy zwrócić uwagę, to uczniowie oceniający twierdzenie jako fałszywe (27 osób). Wielu z nich uzasadnia tę odpowiedź stwierdzoną wcześniej niepoprawnością dowodu tego twierdzenia. A zatem wnioskowanie ucznia jest następujące: niepoprawny dowód $\Rightarrow$ nieprawdziwe twierdzenie. Jest to prawdopodobnie nieostrożna analogia do wnioskowania: poprawny dowód $\Rightarrow$ prawdziwe twierdzenie.

Na podstawie tabeli A.1.2 widzimy także, że 24 uczniów wstrzymało się od udzielania odpowiedzi na postawione pytanie. Wśród nich należy zwrócić uwagę na tych, którzy wstrzymali się z opinią o prawdziwości twierdzenia z powodu udzielenia negatywnej odpowiedzi na pytanie o poprawność dowodu. Jest to postawa dużo ostrożniejsza niż omawiana w poprzednim akapicie. Uczeń wnioskuje tu w następujący sposób: niepoprawny dowód $\Rightarrow$ nic nie wiadomo o poprawności twierdzenia.

Zastanawiające jest to, iż prawie połowa badanych, bo łącznie 51 osób na 118, bądź nie udziela żadnej odpowiedzi na pytanie 2, bądź fałszywie rozstrzyga o prawdziwości twierdzenia. Być może postawione im zadanie znajdowało się poza sferą najbliższych możliwości tej grupy uczniów.

Zbiorcze zestawienie (integrujące odpowiedzi na oba pytania) przedstawia tabela A.1.3.

Tabela A.1.3.

TWIERDZENIE Prawdziwe			TWIERDZENIE Fałszywe			Brak oceny prawdziwości twierdzenia		
DOWÓD poprawny (TpDp)	DOWÓD fałszywy (TpDf)	Brak opinii (TpDb)	DOWÓD poprawny (TfDp)	DOWÓD fałszywy (TfDf)	Brak opinii (TfDb)	DOWÓD poprawny (BtDp)	DOWÓD fałszywy (BtDf)	Brak opinii (BtDb)
19	40	8	4	22	1	2	11	11
Łącznie uczniowie klas II i III								

Powyższa tabela zawiera ilościową analizę prac uczniów odnośnie wyróżnionych wśród nich kategorii łączących odpowiedzi na oba pytania Arkusza badawczego nr 1. I tak wyróżnionych zostało 9 kategorii w zależności od układu określeń: „fałszywe", „prawdziwe", „brak opinii". Nazwy odpowiednich kategorii pochodzą zatem od pierwszych liter w słowach: „twierdzenie", „dowód", „prawdziwe", „fałszywe" oraz „brak". Taka konwencja obowiązywać będzie także przy opisie wyników badań odnośnie Arkusza badawczego nr 2.

Niektóre z wyróżnionych w tabeli A.1.3 kategorii wymagają komentarza. Pierwsza z nich to TpDf. Ta kategoria obejmuje aż 40 osób, które uznały dowód twierdzenia za fałszywy, a jednocześnie samo twierdzenie oceniły jako prawdziwe. Wśród tych osób zarysowały się jednakże dwa odrębne nurty postępowania. Jedni z omawianych uczniów to ci, którzy uznali prawdziwość twierdzenia mimo fałszywości jego dowodu świadomie, powołując się np. na wiadomości szkolne. W takiej sytuacji prawdziwość twierdzenia nie ma dla nich żadnego związku z fałszywym jego dowodem. Pozostałym uczniom z tej kategorii fakt, że dowód twierdzenia zawiera błąd, nie przeszkodził niestety w ocenieniu twierdzenia jako prawdziwe. Żadna z tych osób nie poprawiła w dowodzie błędu, można więc wysnuć wniosek, że ich ocena twierdzenia nie ma bezpośredniego związku z oceną dowodu. Prawdopodobnie dla tych osób dowód nie jest kryterium prawdziwości twierdzenia.

Druga kategoria, na którą warto zwrócić uwagę, obserwując tabelę A.1.3, to kategoria TfDp. Obejmuje ona 4 osoby stwierdzające poprawność dowodu (pomimo błędu w nim zawartego) z równoczesnym stwierdzeniem fałszywości twierdzenia.

Ci uczniowie ujawniają niskie przygotowanie merytoryczne oraz nieumiejętność analizy tekstu matematycznego. Co ważniejsze, można stwierdzić też całkowity brak rozumienia związku twierdzenia z jego dowodem.

Komentarza wymaga także kategoria TpDp. Osoby ujęte w tej kategorii to uczniowie, którzy stwierdzają poprawność dowodu, co oznacza, iż nie znajdują bardzo elementarnego błędu w tekście tego dowodu. Tu, podobnie jak poprzednio, można przypuszczać, że świadczy to o ich niskim poziomie wiedzy matematycznej, nieuwadze lub nieumiejętności wnikliwej analizy tekstu matematycznego. Jednocześnie jednak wyciągnięcie wniosku: „dowód prawdziwy, to twierdzenie prawdziwe" pokazuje pewną świadomość metodologiczną tych osób.

Ostatnią kategorią, na którą zwrócimy uwagę, to kategoria BtDf. Mówimy tu o uczniach, którzy ocenili dowód jako fałszywy i równocześnie słusznie uznali, że na tej podstawie nie można ocenić prawdziwości twierdzenia. Uczniowie ci (11 osób) ujawnili w ten sposób najbardziej dojrzałą postawę metodologiczną.

Tabele A.1.1, A.1.2 oraz A.1.3 nie ujawniają wyraźnej różnicy ilościowej pomiędzy uczniami klas II i III w poszczególnych kategoriach.

A.2 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 2

Podobnie jak w poprzednim przypadku rozpoczniemy od zbiorczego zestawienia liczby osób odpowiadających na **pytanie 1** Arkusza badawczego nr 2 (tab. A.2.1).

Tabela A.2.1.

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th colspan="5">DOWÓD</th></tr>
<tr><th colspan="2">Poprawny</th><th colspan="2">Fałszywy</th><th rowspan="2">Brak opinii</th></tr>
<tr><th>Brak uzasadnienia</th><th>Uzasadnienie</th><th>Brak uzasadnienia</th><th>Uzasadnienie</th></tr>
<tr><td>Kl. II</td><td>4</td><td>19</td><td>11</td><td>4</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Kl. III</td><td>7</td><td>22</td><td>4</td><td>2</td><td>23</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Razem</td><td>11</td><td>41</td><td>15</td><td>6</td><td rowspan="2">45</td></tr>
<tr><td colspan="2">52</td><td colspan="2">21</td></tr>
</table>

Dane przedstawione w powyższej tabeli pokazują, że 52 uczniów (na 118 badanych) potrafiło prawidłowo ocenić poprawność dowodu, który w tym przypadku był długim i dosyć skomplikowanym tekstem. 41 osób z tej grupy potrafiło tę poprawność dobrze uzasadnić. Byli również tacy uczniowie, którzy poprawność dowodu uzasadniali jedynie swoimi subiektywnymi odczuciami, np.

wydaje mi się, że dowód jest poprawny, lub *dowód ten uważam za poprawny i doszedłem do tego inną drogą.*

Zastanawiające jest to, iż 45 osób nie zdołało przeprowadzić analizy tekstu tak, aby móc go ocenić. To więcej niż 1/3 przebadanej populacji. W pracach tej grupy osób nie ma śladów aktywnej analizy tekstu.

Pozostałych 21 osób ocenia dowód jako fałszywy, niektórzy z nich opierają swoją opinię na intuicyjnym odczuciu lub np. na stwierdzeniu, iż przedstawiono im właśnie kolejny sprawdzian „na szukanie błędu". Ich ocena fałszywości nie ma zatem żadnego związku z merytoryczna analizą tekstu. Uczeń pisze np. *dowód na pewno nie jest poprawny, bo poprzedni też nie był, a ten sprawdzian na 99% polega na szukaniu błędów, ale ja nie wiem gdzie jest błąd.*

Odnośnie do **pytania 2** Arkusza badawczego nr 2 odpowiednia tabela wygląda następująco:

Tabela A.2.2.

	Twierdzenie				
	Prawdziwe		Fałszywe		Brak opinii
	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	
Kl. II	9	16	6	12	17
Kl. III	10	14	5	7	22
Razem	19	30	11	19	39
	49		30		
	Liczba uczniów				

W powyższej tabeli widać, że nie dla wszystkich uczniów odpowiedź na pytanie o wartość logiczną twierdzenia była odpowiedzią łatwą. Świadczy o tym fakt, że 39 uczniów na 118 badanych nie udziela żadnej odpowiedzi. Większość z tych osób nie podała powodów, dla których nie mogli poradzić sobie z odpowiedzią na postawione pytanie. Niektórzy uczniowie usiłowali sprawdzać prawdziwość twierdzenia na konkretnych przykładach, opierając się na rysunku. Inni pisali, np. *nie było takiego twierdzenia na lekcjach matematyki.*

49 uczniów stwierdza prawdziwość omawianego twierdzenia, ale należy zwrócić uwagę, że 19 z nich nie uzasadnia tego w żaden sposób. Osoby, które uzasadniają, używają do tego różnych argumentów. Ciekawa jest wypowiedź jednego z uczniów, który napisał: *nie potrafię zaprzeczyć temu twierdzeniu, dlatego uznaję je za prawdziwe.* Uczeń ten szuka kontrprzykładu, co jednak mu się oczywiście nie udaje i dlatego uznaje twierdzenie za prawdziwe. Jednocześnie uznał on wcześniej dowód tego twierdzenia za poprawny, jednak zupełnie nie wiąże tego z możliwością automatycznej oceny poprawności wyjściowego twierdzenia.

Twierdzenie jako fałszywe ocenia 30 uczniów. Dla większości z nich ta odpowiedź wynikała z niepoprawności dowodu. Błędne skojarzenia nasuwał też uczniom rysunek – pisali: *przecież gołym okiem z rysunku widać, że bok a jest dłuższy od boku b i c!*

Przedstawimy teraz za pomocą tabeli A.2.3 **zbiorcze zestawienie** odpowiedzi na oba pytania Arkusza badawczego nr 2.

Tabela A.2.3.

<table>
<tr><td colspan="3">TWIERDZENIE
Prawdziwe</td><td colspan="3">TWIERDZENIE
Fałszywe</td><td colspan="3">Brak oceny
prawdziwości twierdzenia</td></tr>
<tr><td>DOWÓD
poprawny
(TpDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(TpDf)</td><td>Brak
opinii
(TpDb)</td><td>DOWÓD
poprawny
(TfDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(TfDf)</td><td>Brak
opinii
(TfDb)</td><td>DOWÓD
poprawny
(BtDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(BtDf)</td><td>Brak
opinii
(BtDb)</td></tr>
<tr><td>36</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td><td>14</td><td>9</td><td>8</td><td>3</td><td>28</td></tr>
<tr><td colspan="9">Łącznie uczniowie klas II i III</td></tr>
</table>

Zwróćmy uwagę, że 28 osób (kategoria BtDb) nie zajmuje stanowiska ani w stosunku do poprawności dowodu, ani do prawdziwości twierdzenia. Można przypuszczać, że główną przyczyną takiej sytuacji była nieumiejętność analizy trudnego tekstu matematycznego.

Kolejna kategoria, na którą warto zwrócić uwagę, to kategoria TfDf. Osoby ujęte w tej kategorii nie dość, że źle oceniają poprawność dowodu, to automatycznie z jego fałszywości wnioskują o fałszywości twierdzenia. Taki automatyzm jest szkodliwy dla prawidłowego pojmowania dedukcyjności teorii matematycznej.

W analizowanej tabeli, podobnie jak w tabeli A.1.2, kategoria TfDp (osób uznających dowód za poprawny, a twierdzenie za fałszywe) ujawnia uczniów, u których występuje głębokie nierozumienie związku pomiędzy dowodem a prawdziwością twierdzenia.

A.3 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 3

Omawiany arkusz wzbudził największe zainteresowanie uczniów, co znalazło swoje odbicie w liczbie udzielonych odpowiedzi (tylko 2 osoby nie skomentowały tekstu dowodu). Dla celów analizy ilościowej wykorzystamy tabelę A.3.1.

Tabela A.3.1.

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="5">**Rozumowanie**</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Poprawne</td><td colspan="3">Błędne</td><td rowspan="3">Brak opinii</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Brak uzasadnienia</td><td colspan="2">Uzasadnienie</td></tr>
<tr><td>poprawne</td><td>niepoprawne</td></tr>
<tr><td>Kl. II</td><td>8</td><td>9</td><td>9</td><td>28</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Kl. III</td><td>3</td><td>12</td><td>27</td><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Razem</td><td rowspan="2">11</td><td>21</td><td>36</td><td>40</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td colspan="3">97</td></tr>
</table>

To, co w tym zestawieniu jest najbardziej uderzające, to fakt, iż 11 uczniów stwierdza poprawność rozumowania, które było uzasadnieniem równości: „4 = 5”. Fałszywość tej równości każdy uczeń powinien był stwierdzić niezależnie od wyników analizy przedstawionego w tym arkuszu dowodu. Uzasadnienie ucznia mogłoby mieć nawet postać bardzo naiwną, tak, jak w przypadku pewnego ucznia, który napisał: *2 · 2 = 4 a nie 5 ponieważ są dwie osoby i każdy ma po dwa jabłka i w sumie mają 4 jabłka a nie 5.*

Pozostałych 97 osób słusznie stwierdza, że równość „4 = 5” jest błędna. Niektórzy uczniowie tej odpowiedzi nie uzasadniają. Bazują oni prawdopodobnie na oczywistej widocznej sprzeczności arytmetycznej. Pozostałe osoby (łącznie 76 uczniów) próbują w różny sposób argumentować swoją ocenę. Uzasadnienia te są rozmaite. Niektóre mają charakter merytoryczny i polegają na odnalezieniu błędu matematycznego w analizowanym tekście. Inne natomiast odwołują się do intuicji, uczniowie ci wiedzą, że rozumowanie musi być błędne i piszą: *to jest nagięcie praw matematyki. To na pewno nie jest prawda* lub: *brak mi słów. Dowód wygląda w porządku. Mam takie przeczucie, że jest źle ale nie potrafię wychwycić niczego błędnego.* W wypowiedziach uczniów mniej lub bardziej widać przejawy świadomości struktury, jaka przedstawiona była w omawianym arkuszu. Niektórzy zauważają, że przedstawiono tam pewne twierdzenie i próbę jego dowodu. Uczeń pisze np. *ciekawa sprawa. Dowód wydaje się być poprawny, ale trudno mi uwierzyć, że 2 · 2 = 5, nie wiem o co tu chodzi.* Inny uczeń pisze: *twierdzenie jest teoretycznie poprawne, ale mimo wszystko sądzę, że 2 · 2 = 4 a nie 5! Ja w samym dowodzie nie znalazłem błędu, ale jest być może jakiś paradoks matematyczny.* Z metodologicznego punktu widzenia taka postawa ucznia jest dobra. Nie znajdując błędu w rozumowaniu dowodowym, czuje się on zaniepokojony, gdyż jest przekonany, że udowadniane twierdzenie jest błędne.

B. STUDENCI

B.1 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 1

Podobnie jak robiliśmy to w odniesieniu do uczniów, tak i w przypadku studentów przedstawmy ilościowe zestawienie rodzajów odpowiedzi udzielonych przez nich na **pytanie 1** Arkusza badawczego nr 1 (tabela B.1.1.).

Tabela B.1.1.

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">DOWÓD</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Poprawny</td><td colspan="3">Fałszywy</td><td rowspan="3">Brak opinii</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Brak uzasadnienia</td><td rowspan="2">Uzasadnienie</td><td rowspan="2">Brak uzasadnienia</td><td colspan="2">Uzasadnienie</td></tr>
<tr><td></td><td>poprawne</td><td>niepoprawne</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>22</td><td>33</td><td>5</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>Razem</td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">60</td></tr>
</table>

Wszyscy badani studenci w sposób aktywny analizowali przedstawiony im tekst dowodu. Świadczą o tym notatki, uzupełnienia tekstu, ślady przeliczeń oraz pomocnicze rysunki, które widnieją na wszystkich kartach pracy badanych. Żaden student w wyniku przeprowadzonej analizy nie ocenił dowodu jako prawidłowy.

Niestety, aż 12 studentów wstrzymało się z odpowiedzią na pytanie 1, mimo iż (jak wspomnieliśmy) w ich kartach pracy widać ślady analizy tekstu. Przypuszczalnie te osoby w wyniku swojej działalności nie otrzymały ani potwierdzenia poprawności, ani nie znalazły w tekście bardzo elementarnego błędu.

Liczna, 60-osobowa grupa studentów podała prawidłową ocenę poprawności analizowanego tekstu. Przy czym poprawnie zlokalizowały błąd i go uzasadniły tylko 33 osoby. Aż 22 studentów stwierdziło niepoprawność tekstu, w żaden sposób tego nie argumentując. Prawdopodobnie podając tylko ocenę „niepoprawny”, studenci ci nie potrafili tej oceny odpowiednio uzasadnić. Być może była ona przypadkowa lub intuicyjna. Niektórzy studenci zresztą uzasadniają fałszywość dowodu, bazując na swoich odczuciach intuicyjnych, pisząc np.: *wydaje mi się, że dowód nie jest poprawny.*

Wszyscy studenci z 33-osobowej grupy dokonujący poprawnego uzasadnienia fałszywości dowodu, po znalezieniu błędu w tekście dobrze go poprawiają. Należy tu skomentować istotną różnicę w reakcji ucznia i studenta na odkryty błąd w dowodzie. Uczniowie najczęściej, odkrywając błąd, negowali poprawność dowodu w całości, nie próbując go poprawiać. Natomiast studenci w tej samej sytuacji odkrywali błąd i równocześnie go poprawiali, co powodowało, iż dowód stawał się prawidłowy.

Odnośnie do **pytania 2**, ilościowe zestawienie odpowiedzi wygląda następująco:

Tabela B.1.2.

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">Twierdzenie</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Prawdziwe</td><td colspan="2">Fałszywe</td><td rowspan="2">Nie można rozstrzygnąć</td><td rowspan="2">Brak opinii</td></tr>
<tr><td></td><td>Brak uzasadnienia</td><td>Uzasadnienie</td><td>Brak uzasadnienia</td><td>Uzasadnienie</td></tr>
<tr><td></td><td>30</td><td>12</td><td>8</td><td>7</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>Razem</td><td colspan="2">42</td><td colspan="2">15</td></tr>
</table>

Zwróćmy uwagę, że aż 30 studentów spośród 72 badanych stwierdza prawdziwość rozważanego twierdzenia, w żaden sposób tego nie uzasadniając. Ta ocena prawdopodobnie u większości z nich nie jest umotywowana merytorycznie. Studentka pisze np.: *wydaje mi się, że to jest twierdzenie prawdziwe, jest to jakiś wniosek z twierdzenia Talesa, ale z geometrii jestem kiepska.*

12 studentów natomiast poprawnie uzasadnia prawdziwość twierdzenia (powołując się na poprawiony wcześniej dowód lub przedstawiając zarys innego rozumowania uzasadniającego tę prawdziwość). Podkreślmy, że jest to tylko 12 studentów spośród omawianej wcześniej 33-osobowej grupy, która dokonała

prawidłowej poprawy błędu w dowodzie, stwierdzając następnie, że dowód po naprawie jest już prawidłowy. Ta 12-osobowa grupa studentów ujawniła pożądaną, dojrzałą postawę metodologiczną. Pozostałe 21 osób nie uzasadniało prawdziwości twierdzenia poprawionym przez siebie dowodem. Ich prace sugerują, że ta ocena prawdziwości jest bądź przypadkowa, bądź wynika z przekonania po analizie rysunku.

Warto zwrócić uwagę na małoliczną, bo jedynie 3-osobową grupę studentów, którzy w trakcie omawianego fragmentu badań przejawili bardzo dojrzałą postawę metodologiczną, stwierdzając, iż ponieważ dowód okazał się niepoprawny, nic nie można na tej podstawie stwierdzić o prawdziwości twierdzenia.

15 studentów natomiast stwierdza, że rozważane twierdzenie jest fałszywe. 8 z nich nie komentuje tej odpowiedzi lub pisze: *twierdzenie nie jest prawdziwe, ale nie umiem tego uzasadnić*, natomiast pozostali starają się dobrać kontrprzykład, co oczywiście robią błędnie. 3 osoby uważa, że twierdzenie jest fałszywe, bo dowód okazał się niepoprawny.

Przedstawmy teraz **zestawienie zbiorcze** (tab. B.1.3).

Tabela B.1.3.

TWIERDZENIE Prawdziwe			TWIERDZENIE Fałszywe			Brak oceny prawdziwości twierdzenia		
DOWÓD poprawny (TpDp)	DOWÓD fałszywy (TpDf)	Brak opinii (TpDb)	DOWÓD poprawny (TfDp)	DOWÓD fałszywy (TfDf)	Brak opinii (TfDb)	DOWÓD poprawny (BtDp)	DOWÓD fałszywy (BtDf)	Brak opinii (BtDb)
0	39	3	0	15	0	0	6	9
Liczba studentów								

Analogicznie jak przy analizie tabeli A.1.3 zwróćmy uwagę na kategorię TpDf. Obejmuje ona 39 osób, które po stwierdzeniu fałszywości dowodu samo twierdzenie oceniają jako prawdziwe. W tej grupie jest 12 osób (omawianych dokładniej w tekście pod tabelą B.1.2), którzy wniosek o prawdziwości twierdzenia wyciągają prawidłowo, na podstawie poprawionego przez siebie wcześniej dowodu tego twierdzenia. To są ci studenci, którzy w ewidentny sposób poprawnie metodologicznie łączą twierdzenie z jego dowodem.

Zwróćmy uwagę na kategorię TfDf. Ciekawa jest obserwacja, iż również wśród studentów, podobnie jak u uczniów, funkcjonuje rozumowanie: dowód fałszywy $\Rightarrow$ twierdzenie fałszywe.

Podsumowując, zauważmy, że pożądaną świadomość metodologiczną podczas pracy nad Arkuszem badawczym nr 1 w pełni ujawniło 15 studentów na 72 badanych.

B.2 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 2

W tabeli B.2.1 przedstawmy zestawienie ilościowe odpowiedzi na **pytanie 1** Arkusza badawczego nr 2.

Tabela B.2.1.

Twierdzenie				
Prawdziwe		Fałszywe		Brak opinii
Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	
13	17	10	8	24
30		18		

W powyższej tabeli widzimy, że tylko 30 studentów prawidłowo oceniło logiczną poprawność przedstawionego im dowodu, ale 13 osób w tej grupie podaje jedynie odpowiedź twierdzącą bez żadnego uzasadnienia. Pozostałe osoby uzasadniają poprawność prawidłowym przebiegiem analizowanego rozumowania.

Jak widzimy, 18 studentów uznało dowód za niepoprawny. W pracach tych osób widoczne są próby analizy tekstu oraz ślady samodzielnych przeliczeń, które w efekcie prowadzą do stwierdzenia, iż rozumowanie jest złe, choć nie wskazano żadnego konkretnego błędu. Uzasadnienia podawane przez studentów są na niskim poziomie merytorycznym, np. jedna ze studentek stwierdziła: *dowód jest nie do końca poprawny, ponieważ pokazano, że* $a = b = c$*, a to jeszcze nie gwarantuje, że trójkąt o bokach* a, b, c *jest równoboczny.*

Aż 24 osoby (to jest 1/3 badanych studentów) nie udzieliło żadnej odpowiedzi na zadane pytanie, mimo iż w większości prac widoczne są ślady analizy tekstu.

Liczbę poszczególnych odpowiedzi na **pytanie 2** Arkusza badawczego nr 2 przedstawia tabela B.2.2.

Tabela B.2.2.

Twierdzenie				
Prawdziwe		Fałszywe		Brak opinii
Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	Brak uzasadnienia	Uzasadnienie	
13	17	12	6	24
30		18		

Rozkład liczbowy w tabeli B.2.2 jest bardzo podobny do rozkładu przedstawionego w tabeli B.2.1. Wśród studentów udzielających odpowiedzi twierdzącej na postawione pytanie 13 osób tej odpowiedzi niczym nie uzasadnia. Jedynie 6 osób napisało, że twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ jego dowód jest poprawny. Pozostałe uzasadnienia są zupełnie oderwane od dowodu i powołują się na jakieś skojarzenia z geometrii lub wcześniejszych doświadczeń szkolnych.

Kryterium fałszywości rozważanego twierdzenia było dla 6-osobowej grupy studentów jego rzekome złe sformułowanie lub znalezienie kontrprzykładu. Ciekawe jest, że w 4 pracach studenci dali wyraz temu, że ich zdaniem definicja trójkąta równobocznego żąda zarówno równości boków tego trójkąta, jak i równości jego kątów.

Podobnie, jak w odpowiedzi na pytanie 1, tak i w tym przypadku 1/3 studentów nie podjęła żadnej próby odpowiedzi na pytanie 2.

Zbiorcze wyniki prześledzimy przy pomocy tabeli B.2.3.

Tabela B.2.3.

<table>
<tr><td colspan="3">TWIERDZENIE
Prawdziwe</td><td colspan="3">TWIERDZENIE
Fałszywe</td><td colspan="3">Brak oceny
prawdziwości twierdzenia</td></tr>
<tr><td>DOWÓD
poprawny
(TpDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(TpDf)</td><td>Brak
opinii
(TpDb)</td><td>DOWÓD
poprawny
(TfDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(TfDf)</td><td>Brak
opinii
(TfDb)</td><td>DOWÓD
poprawny
(BtDp)</td><td>DOWÓD
fałszywy
(BtDf)</td><td>Brak
opinii
(BtDb)</td></tr>
<tr><td>21</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td>9</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="9">Liczba studentów</td></tr>
</table>

Spośród 21 osób ujętych w kategorii TpDp, czyli tych, którzy prawidłowo odpowiedzieli na oba pytania Arkusza, jedynie 6 dało wyraz temu, iż wiążą badane zależności metodologiczne. Te osoby uznały prawdziwość twierdzenia w wyraźnym związku z poprawnością jego dowodu. Pozostałe osoby prawdziwość twierdzenia często rozważają w oderwaniu od wcześniej stwierdzonej poprawności dowodu. Powołują się na uzasadnienia innego charakteru, np. zgodność ze znanymi faktami geometrycznymi. Najczęściej jednak studenci niczym nie uzasadniają obu udzielonych odpowiedzi.

Tabela B.2.3 pokazuje niezadowalający stan wiedzy metodologicznej badanych studentów. Widzimy, że bardzo różnie pojmują oni zależność twierdzenia od jego dowodu (lub w ogóle jej nie dostrzegają). Potrafią stwierdzić zarówno, że dowód jest poprawny a twierdzenie fałszywe (kategoria TfDp – 6 osób); dowód fałszywy, to twierdzenie fałszywe (kategoria TfDf – 9 osób); dowód poprawny, a o twierdzeniu nie wiadomo nic (kategoria TbDp – 3 osoby).

Skomentujmy jeszcze, że aż 15 studentów nie sprostało zadaniu merytorycznej oceny pewnego niezbyt skomplikowanego rozumowania, prawdopodobnie nie potrafili go zanalizować, ani też w związku z tym zająć stanowiska w sprawie prawdziwości twierdzenia, które miało być tym rozumowaniem uzasadnione.

B.3 Wyniki dotyczące arkusza badawczego nr 3

Tabela B.3.1.

<table>
<tr><td colspan="5">Rozumowanie</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Poprawne</td><td colspan="3">Błędne</td><td rowspan="3">Brak
opi-
nii</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Brak
uzasadnienia</td><td colspan="2">Uzasadnienie</td></tr>
<tr><td>poprawne</td><td>niepoprawne</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>23</td><td>36</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td colspan="3">97</td></tr>
</table>

Miejmy nadzieję, że tylko przez pomyłkę (?) jeden ze studentów uważa, że prawdą jest równość „4 = 5”.

12 innych studentów nie komentuje poprawności przedstawionego rozumowania, prawdopodobnie nie mogąc znaleźć miejsca, gdzie popełniony został błąd, a jednocześnie wiedząc, że musiał on zostać popełniony, skoro uzasadniono niemożliwą do spełnienia równość.

Zdecydowanie największa grupa studentów słusznie stwierdza, że rozumowanie przedstawione w Arkuszu badawczym nr 3 jest niepoprawne. Natomiast uzasadnienia tej niepoprawności pozostawiają wiele do życzenia. 36 studentów uzasadnia nieprawidłowość rozumowania, na siłę wskazując miejsce ewentualnego błędu, np. tam, gdzie prawidłowo zastosowano wzór skróconego mnożenia. Tylko 23 osoby zauważa, że w rozumowaniu potraktowano funkcję kwadratową tak, jakby była ona różnowartościowa.

Wnioski diagnostyczne

Przedmiotem opisywanych badań były stosunkowo trudne pojęcia metodologiczne oraz zależności pomiędzy nimi. Udział w badaniach wymagał od respondentów aktywnej postawy i wykazania się umiejętnościami wykraczającymi poza te najczęściej spotykane i kształtowane na lekcjach matematyki szkolnej. Należy szczególnie podkreślić trudną sytuację, w jakiej znaleźli się uczniowie liceum. Mimo iż do badań wybrano klasy matematyczne, to i tak należy stwierdzić, iż na lekcjach matematyki brakuje często czasu na stawianie uczniów w nietypowych sytuacjach typu: oto masz fałszywe rozumowanie, które ma być dowodem pewnego twierdzenia, jakie możesz wyciągnąć wnioski, jakie działania możesz podjąć w celu naprawy tej sytuacji? Teoretycznie studenci matematyki byli w lepszej sytuacji, choć wyniki badań nie są tu zadowalające.

Tym bardziej zatem chcemy podkreślić istotność podjętego obszaru badawczego oraz konieczność podejmowania działań naprawczych, które są niezbędne szczególnie w stosunku do studentów – przyszłych nauczycieli matematyki. Małe są szanse, iż będą oni w przyszłości prawidłowo kształtować metodologiczną wiedzę swoich uczniów, skoro ich wiedza w tym zakresie również bywa niewystarczająca.

Przedstawiona w niniejszej pracy analiza zebranego materiału badawczego pozwala podać próbę odpowiedzi na postawione pytania badawcze.

Jakie kryteria stosują uczniowie i studenci dla oceny prawdziwości twierdzeń matematycznych?

W trakcie opisywanych badań wyraźnie zarysowały się następujące kryteria, które, zdaniem uczniów i studentów, powodują, że dane twierdzenie można uznać za prawdziwe:

- **Rysunek** – jeśli twierdzenie dotyczy geometrii, uczący się często sporządza rysunek (lub analizuje gotowy) ilustrujący sytuację opisaną w twierdzeniu. Taki rysunek bywa dla ucznia i studenta wystarczająco przekonujący, uznaje wtedy, że twierdzenie rzeczywiście zachodzi. Można przypuszczać, że jeśli dodatkowo taki rysunek zostałby sporządzony przez komputer – przekonanie uczącego się o prawdziwości twierdzenia, które ten rysunek ilustruje, byłoby jeszcze większe.

- **Przypadek szczególny** – uczący się sprawdza „zachodzenie” twierdzenia dla konkretnego przykładu (np. wybranych liczb czy konkretnej figury geometrycznej), a następnie stwierdza, że jeśli dla tego przykładu twierdzenie jest prawdziwe, to jest prawdziwe w ogólnym przypadku. Twierdzenie zatem jest prawdziwe, bo da się je zastosować.
- **Brak kontrprzykładów** – uczący się próbuje obalić prawdziwość twierdzenia, dobierając odpowiednie kontrprzykłady. Jeśli, mimo poszukiwań, takiego kontrprzykładu nie znajdzie – uznaje, że twierdzenie musi być prawdziwe.
- **Wiedza wcześniejsza** – w trakcie oceny prawdziwości twierdzenia uczeń i student powołują się na fakty znane z wcześniejszych doświadczeń. Traktują to jako niepodważalny argument – *twierdzenie jest prawdziwe, bo było na lekcji* lub *dowód twierdzenia był na lekcji, więc twierdzenie musi być prawdziwe*. Możliwa jest niestety taka sytuacja, że jest to swego rodzaju „wybieg” pozwalający uczniowi odpowiedzieć na pytanie o prawdziwość twierdzenia bez jego merytorycznej oceny.
- **Kontekst** – pytanie o prawdziwość twierdzenia uczący się odbiera zawsze w jakimś kontekście. W opisywanych tu badaniach był nim dla niektórych sprawdzian skonstruowany tak, że nasuwa mu się skojarzenie: *to jest sprawdzian „na szukanie błędów”, poprzednie twierdzenie było błędne – więc następne pewnie też jest błędne*. Możliwe jest, że gdyby postawiono ucznia przed takim samym zadaniem w innym kontekście – odpowiedziałby zupełnie inaczej.
- **Emocje, intuicja, przekonanie** – uczący się ma pewne intuicyjne przekonanie, że twierdzenie jest prawdziwe. Wzbudza ono u niego emocje – np. *nie podoba mi się* lub *wydaje mi się, że jest prawdziwe, tak uważam*. Podstawą oceny prawdziwości są tu uczucia. Mogą one być wzmacniane przekonaniem wypływającym np. z rysunku.
- **Dowód** – podstawowym kryterium prawdziwości twierdzenia dla uczącego się jest dowód tego twierdzenia. Jest to oczywiście dojrzała postawa metodologiczna. Zdawać sobie należy sprawę z tego, iż automatycznie z wynikania: „poprawny dowód $\Rightarrow$ prawdziwe twierdzenie” uczący się mogą utworzyć błędną analogię: „niepoprawny dowód $\Rightarrow$ nieprawdziwe twierdzenie”. Opisywane badania wyraźnie potwierdziły występowanie takiej analogii w myśleniu zarówno uczniów, jak i studentów.

Czy uczniowie i studenci potrafią analizować tekst dowodu matematycznego jako ciąg logicznie z siebie wynikających wniosków?

Jak się można było spodziewać, opisywane badania potwierdzają trudności, jakie mają uczący się z czytaniem ze zrozumieniem tekstu matematycznego. Trudności takie zauważamy u wielu uczniów, a także (w mniejszym stopniu) u studentów matematyki. Arkusze badawcze otrzymane od studentów pokazują, że w większym niż uczniowie stopniu aktywnie podchodzą do lektury tekstu matematycznego, mają wypracowane pewne techniki jego czytania. Odnośnie do np. Arkusza badawczego nr 1, w 20 pracach uczniowskich nie ma śladu jakiejkolwiek analizy tekstu, natomiast wszyscy studenci czytali ten tekst aktywnie.

Zwróćmy szczególną uwagę na rolę rysunku geometrycznego jako składnika tekstu matematycznego. W opisywanych badaniach można było wyraźnie zaobserwować, iż rysunek może czytającemu pomagać, ale również może stanowić dla niego pewną przeszkodę. Jeśli czytający tekst uczeń lub student dokonał nieprawidłowego uzupełnienia takiego rysunku (np. w Arkuszu badawczym nr 1), blokowało to prawidłową ocenę całego tekstu dowodu. Rysunek również ma znaczenie w kontekście regularności figury geometrycznej, którą ilustruje. W opisywanych badaniach niektórym uczniom przeszkadzało to, że twierdzenie o trójkącie równobocznym zostało zilustrowane trójkątem, gdzie jeden z boków był wyraźnie dłuższy od pozostałych – dla jednego z uczniów było to podstawą ocenienia całego twierdzenia jako nieprawdziwe. Uczeń ten napisał: *twierdzenie nie może być prawdziwe, bo przecież gołym okiem z rysunku widać, że bok a jest dłuższy od boku b i c!*

Czytanie tekstu dowodu, który najczęściej ma postać rozumowania formalnego zbudowanego z ciągu powiązanych ze sobą implikacji, wymaga od czytającego wiązania przyczynowo-skutkowego kolejnych elementów tego rozumowania. Może się zdarzyć, że uczący się, czytając tekst dowodu, nie interpretuje go jako ciągu zdań wywiedlnych na podstawie praw logicznych w danej teorii. Tekst taki będzie dla tej osoby po prostu luźnym ciągiem zdań, które zarówno razem, jak i osobno niewiele znaczą. W pracy jednej z badanych uczennic można zauważyć, iż dokonuje ona wyrywkowej oceny tylko jednego z elementów ocenianego dowodu, równości $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, która – ponieważ jest prawdziwa – powoduje, że uczennica przyjmuje cały tekst jako poprawny.

Czy osoby badane potrafią odszukać i ewentualnie poprawić błąd znajdujący się w tekście dowodu?

Możemy zaryzykować stwierdzenie, że wyszukiwanie luk i błędów w tekście matematycznym nosi znamiona aktywności o charakterze twórczym. Na pewno wymaga ono od czytającego dogłębnego rozumienia czytanego tekstu. Zarówno u badanych uczniów, jak i u studentów można było dostrzec niezadowalający stopień opanowania tej umiejętności. Widać to było szczególnie w pracy nad arkuszem nr 3. Szczególnie uderzające było to, że studenci wiedzieli dokładnie, iż w tekście musi być błąd – a nie potrafili go odszukać. Wśród uczniów sytuacja ta przedstawiała się jeszcze gorzej.

Natomiast analiza prac dotyczących Arkusza nr 1 pokazała, że studenci dosyć dobrze radzili sobie z poprawą dostrzeżonego błędu, a zatem jeśli student już znalazł błąd, to potrafił go prawidłowo poprawić. Natomiast 1/3 populacji badanych uczniów poradziła sobie co prawda z odnalezieniem błędu, ale niekoniecznie go poprawiła.

Jaka jest reakcja ucznia i studenta na fakt, iż tekst dowodu matematycznego zawiera błąd w kontekście poprawności tego dowodu? Można wyróżnić następujące rodzaje reakcji badanych osób na odkrycie błędu w dowodzie:

1. Automatyczne stwierdzenie fałszywości całego dowodu po odkryciu w nim błędu.
2. Brak oceny poprawności, mimo odkrytego błędu (blokada dalszego postępowania).
3. Próba poprawienia błędu tak, aby dalszy ciąg tekstu był już poprawny – „naprawa" lokalna.
4. Zanegowanie całego tekstu i podjęcie próby własnego dowodu (błędne zdanie dyskwalifikuje całą idee rozumowania) – „naprawa" globalna.

Czy badani traktują dowód danego twierdzenia matematycznego jako niepodważalne kryterium jego prawdziwości? Opisywane badania wyraźnie pokazują, że stan wiedzy metodologicznej w rozważanym zakresie jest niezadowalający zarówno w grupie przebadanych uczniów, jak i w grupie studentów. Jedynie około 14% uczniów liceum ogólnokształcącego, a 17% studentów w pełni ujawniło w trakcie badań prawidłowe pojmowanie związku pomiędzy prawdziwością twierdzenia a poprawnością jego dowodu.

Badania ujawniły, że uczniowie i studenci stosują następujące kryteria oceniania prawdziwości twierdzeń w kontekście ich dowodów:

- **dowód poprawny, a twierdzenie fałszywe** – uczący się wykazują zupełny brak rozumienia roli dowodu w teorii dedukcyjnej,
- **dowód fałszywy, a twierdzenie prawdziwe** – nie zawsze uczący się ma świadomość, że fałszywość dowodu nie stanowi żadnego kryterium dla oceny prawdziwości twierdzenia, która musi być rozstrzygana wtedy na innej drodze,
- **dowód fałszywy, to twierdzenie fałszywe** – uczący się bardzo często (jak pokazały opisywane tu badania) stosują taki schemat rozumowania,
- **dowód poprawny, to twierdzenie prawdziwe** – taką prawidłową implikacją wykazuje się nieliczna grupa przebadanych osób.

Otrzymane w opisywanych badaniach wyniki można interpretować oraz rozwijać w rozmaitych kierunkach. Przykładowe z nich to:

- Szeroko zakrojona analiza aktualnych ciągów podręczników pod kątem realizacji w nich elementów metody matematycznej ze szczególnym uwzględnieniem twierdzeń i ich dowodów.
- Badanie roli twierdzenia i jego dowodu w sytuacji samodzielnego stawiania przez ucznia hipotez pretendujących do roli twierdzeń. Być może sytuacja będzie w tym przypadku bardziej naturalna i motywująca ucznia do pracy (Nowak, 1989).
- Analiza trudności w samodzielnej lekturze dowodu matematycznego w kontekście problemów z czytaniem tekstu matematycznego.
- Badanie poziomu umiejętności samodzielnego argumentowania własnych hipotez na wszystkich etapach nauczania matematyki (z etapem studiów matematycznych włącznie).

Oczywiście można zarysowywać o wiele więcej interesujących kierunków i pytań badawczych, biorąc choćby pod uwagę odmienne sytuacje, w których uczeń może ujawnić swój poziom rozumienia metody matematycznej, np.:

1) samodzielne formułowanie hipotez a następnie ich analizowanie,
2) dowodzenie gotowego – sformułowanego już – twierdzenia,
3) analiza gotowego tekstu twierdzenia i gotowego tekstu dowodu matematycznego.

We wszystkich wyliczonych sytuacjach można uwzględniać analizę (Gucewicz-Sawicka, 1982, s. 84-88):

a) rozumienia sensu metodologicznego twierdzenia,
b) rozumienia formalnej struktury twierdzenia,
c) rozumienia semantycznego,
d) rozumienia miejsca i roli twierdzenia w danej teorii,
e) rozumienia twierdzenia poprzez jego interpretację w ogólnych przypadkach;

oraz (Turnau, 1972, s. 91):

f) rozróżniania twierdzenia traktowanego formalnie od jego interpretacji w jakimś modelu,
g) umiejętności sprawdzania zdania, które jest „kandydatem na twierdzenie" w różnych modelach,
h) świadomości, że poprawnie zbudowany dowód jest argumentem dla prawidłowości twierdzenia (...),
i) świadomości tego, że „związki wynikania" pomiędzy wyrażeniami występującymi w dowodzie stanowią jedyne kryterium jego poprawności,

j) znajomości reguł wnioskowania wystarczającej zarówno do oceniania poprawności danego dowodu, jak i redagowania prostych dowodów.

Opisane badania koncentrowały się na analizie sytuacji 3) w odniesieniu do kierunków a), h), i) oraz j). Oczywiście czytelnikowi niniejszej pracy będzie brakować propozycji dydaktycznych prowadzących do poprawy zarysowanych (niezbyt optymistycznych) efektów kształcenia matematycznego w rozważanym zakresie, jednakże opisane badania prowadzone były jedynie w celach diagnostycznych.

Podsumowując rozważania niniejszej pracy, jeszcze raz podkreślmy konieczność uwzględniania w edukacji matematycznej różnorodnych aspektów metodologicznych nauczanego przedmiotu. Ten wniosek nabiera szczególnego znaczenia w kontekście matematycznych studiów nauczycielskich. Badania pokazały, że świadomość metodologiczna studentów III i IV roku jest niewystarczająca. Prawdopodobnie dla jej prawidłowego ukształtowania niezbędne są specjalne zabiegi dydaktyczne, celowo poszerzające te wiadomości. Ważne jest tu spektrum doświadczeń dostarczanych uczącemu się studentowi. Powinno być ono jak najszersze, aby dawać jak najpełniejszy obraz matematyki, jako nauki złożonej z trzech komponentów: wiedzy, metod i języka.

Literatura

Bebel, J.: 2006, *Twierdzenia w nauczaniu matematyki w szkole średniej*, Niepublikowana praca magisterska wykonana w Instytucie Matematyki AP pod kierunkiem dr H. Pieprzyk, Kraków.

Guce- wicz-Sawicka, I.: 1982, *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Hawro, J.: 2006, O wykorzystaniu wiedzy logicznej w procesie analizy tekstu matematyczngo, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 29-62.

Hawro, J.: 2007, Wpływ trudności związanych z rozumieniem twierdzeń matematycznych na umiejętność analizowania i konstruowania dowodu matematycznego, *Referat na XXI SDM, Bielsko-Biała*, CD–ROM.

Kąkol, H.: 1985a, Budowa i rodzaje twierdzeń, *Oświata i Wychowanie* **9**, 54-57.

Kąkol, H.: 1985b, Dowód twierdzenia; rodzaje dowodów, *Oświata i Wychowanie* **9**, 60-62.

Konior, J.: 1998, *Budowa i lektura tekstu matematycznego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Krygowska, Z., Kulczycki, S., Straszewicz, S.: 1954, *Nauczanie geometrii w klasach licealnych szkoły ogólnokształcącej*, PZWS, Warszawa.

Legutko, M., Turnau, S.: 1989, Nauczanie matematyki a nauczanie teorii matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **11**, 9-36.

Mostowski, W.: 1948, *Logika matematyczna*, PWN, Wrocław.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Nowecki, B. J.: 1978, *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Pieprzyk, H.: 1985, Różne formy wypowiedzi twierdzeń, *Oświata i wychowanie* **9** (Wersja C), 58-62.

Siwek, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

Turnau, S.: 1972, Problem dowodzenia w nowoczesnym nauczaniu matematyki, *Roczniki PTM, seria II, Wiadomości Matematyczne* **15**, 91-96.

Turnau, S.: 1974, *Logiczny wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: halina.pieprzyk@gmail.com
e-mail: annaz@ap.krakow.pl