FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Renata Wojtuś

Komputer jako narzędzie badania sytuacji zadaniowej w długoterminowej pracy domowej ucznia

Abstract. In the article I submit a fragment of my research carried out in 2004-2007, which was connected with the role of mathematical computer programs in the independent extracurricular work of the pupil. These examinations were conducted in a group of 119 pupils from the second grade of secondary schools.

The article concerns the specific form of homework in mathematics – a long-term homework.

The purpose of this homework was to answer the questions:

a) In what mathematical situations do pupils use mathematical computer programs by themselves, without recommendation of the teacher?
b) What are their motives to use a computer program as the means which enables them to discover and structure the task solution?
c) What reasoning can computer program provoke and what intuitions can it improve?
d) What functions in the learning process can be met by computer program and what can not be met not only within the range of acquired knowledge, but also from the point of view of thinking forms, creation types and sorts of pupils' activity as well?

In the article I present the concept and proposal of the long-term homework in mathematics. I analyse solutions of the task by the pupils.

Task: Check the graph of the square function $y = ax^2 + bx + c$ depending on the coefficients a, b, c, where $a \neq 0$.

Observation carried out, and the analysis of its results lead to the following conclusions:

1. The presented concept of the long-term homework in mathematics with the use of a suitable mathematical program allows pupils to organize their learning with the time rate adequate for themselves, to increase their self-reliance, and to stimulate their participation in the process of learning mathematics.

2. The Winplot program appeared to be a useful tool in the phase of preliminary examination of the problem, conducting experiments, perception of relation, formulating and demonstrative verification of hypotheses.
3. The Winplot program enabled to conduct reasoning on a different level of abstraction than it usually takes place during lessons of mathematics in the secondary school.

1. Wstęp

W podstawie programowej kształcenia ogólnego[1] wśród kompetencji, jakie powinien osiągnąć uczeń po ukończeniu szkoły ponadgimnazjalnej, wymienia się m.in.:

a) planowanie, organizowanie i ocenianie własnej nauki, przyjmowanie za nią odpowiedzialności,

b) poszukiwanie, porządkowanie i wykorzystywanie informacji z różnych źródeł, efektywne posługiwanie się technologiami informacyjnymi i komunikacyjnymi,

c) rozwiązywanie problemów w twórczy sposób.

Analiza podręczników i programów szkolnych przekonuje jednak, że dwie pierwsze z tych umiejętności nie są w centrum uwagi ich twórców; także nauczyciel nie znajduje zbyt wielu praktycznych wskazówek jak przygotowywać ucznia do ich nabywania. Praca ze studentami przekonuje mnie, że większość maturzystów nie zdobywa tych umiejętności ani w szkole, ani podczas studiów. Rodzi się więc potrzeba poszukiwania warunków (sytuacji i środków dydaktycznych), w których każdy uczeń mógłby samodzielnie zdobywać wiedzę o uczeniu się matematyki, umiał wyszukiwać, interpretować i weryfikować informacje pochodzące z różnych źródeł oraz samodzielnie podejmować badania o charakterze matematycznym. Taką szansę upatruję w posługiwaniu się matematycznymi programami komputerowymi. Od kilku lat moje zainteresowania badawcze koncentrują się na tym zagadnieniu. W szeroko podejmowanych pracach teoretycznych i eksperymentalnych szukam – w wielu płaszczyznach – rozwiązań problemu badawczego:

Jaka jest i jaka może być rola matematycznych programów komputerowych w samodzielnej pozalekcyjnej pracy ucznia?

Badania empiryczne prowadziłam w latach 2004-2007 w siedmiu liceach ogólnokształcących, wśród 119 uczniów drugich klas, którzy dobrowolnie w nich uczestniczyli.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 sierpnia 2007.

Uczniowie ci otrzymali ode mnie dwa programy: C.a.R. (Compasses and Ruler) i Winplot. Aplikacje te posiadają opcje odpowiednie do wymagań stawianych w programach matematyki na poziomie licealnym: pierwszy z nich (C.a.R.) może wspierać naukę geometrii euklidesowej i analitycznej, drugi (Winplot) – algebry. Każdy z nich jest ogólnie dostępny bez żadnych opłat.

Istotne jest, iż w dwóch pierwszych latach nauki, a więc również w trakcie badań – zarówno nauczyciel, jak i uczniowie nie posługiwali się komputerem na lekcjach matematyki. Z przeprowadzonej ankiety dowiedziałam się, że nie mieli oni żadnych doświadczeń w pracy z matematycznymi programami komputerowymi. Musiałam więc opracować specjalny „samouczek" z opisem najważniejszych instrukcji programów oraz serie wskazówek do pracy z nimi. Chcę także podkreślić, że uczniowie nie otrzymywali ani od nauczyciela, ani ode mnie żadnych sugestii odnośnie konieczności i sposobu wykorzystania programów w pracach domowych czy przy rozwiązywaniu zadań. To uczniowie sami decydowali, czy i w jakich sytuacjach chcą wykorzystywać komputer w toku uczenia się poza lekcjami.

Jednym z celów moich badań było poszukiwanie takiej formy pracy z uczniami przy wykorzystaniu matematycznych programów komputerowych, która prowadziłaby do nabywania umiejętności uczenia się matematyki przez samodzielne eksperymentowanie, stawianie hipotez, ich precyzowanie, obalanie lub dowodzenie, a także podejmowanie samodzielnych prób formułowania wypowiedzi[2] oraz tworzenia notatek. Uznałam, że powinno to się odbywać na nieskomplikowanym materiale teoretycznym, w sytuacji przyjaznej dla ucznia, bez stresu szkolnego i ograniczeń czasowych. Takie warunki stwarzała długoterminowa praca domowa. Moim zamierzeniem było **wypracowanie założeń tej formy pracy z możliwością wykorzystania komputera oraz weryfikacja jej przydatności w praktyce.** Opracowując te założenia wzorowałam się na metodzie projektu w nauczaniu.

Niniejszy artykuł dotyczy tej formy pracy domowej uczniów klas drugich kieleckich liceów ogólnokształcących; obejmuje on jedynie fragment obszerniejszych badań związanych z tą problematyką.

2. Specyfika długoterminowej pracy domowej z matematyki

W polskim systemie szkolnym uczniowie po każdej lekcji z matematyki otrzymują pracę domową. Traktuje się ją jako dalsze przedłużenie lekcji w postaci pozalekcyjnej; najczęściej jest ona zadawana na końcu lekcji do bezpośred-

[2] Wśród osiągnięć, jakie ma posiąść uczeń kończący szkołę średnią, w podstawie programowej wymienia się: umiejętność przeprowadzenia prostego rozumowania dedukcyjnego, umiejętność formułowania hipotez oraz ich weryfikacji. Natomiast jeden z celów edukacyjnych ujęto następująco: kształtowanie umiejętności jasnego i precyzyjnego formułowania wypowiedzi oraz argumentowania (zob. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 sierpnia 2007 r.).

niego wykonania przed kolejnymi zajęciami. W literaturze (Okoń, 1968; Zborowski, 1972; Szpiter, 1998) na ogół wskazuje się, że ma ona prowadzić do:

- utrwalenia materiału przerabianego na lekcji,
- kształtowania umiejętności związanych z celami i tematem lekcji,
- przygotowaniu się do kolejnej lekcji lub krótkiego sprawdzianu.

Rzadko zaś jej celem jest:

- opanowanie określonych wiadomości stanowiących podstawę do omawiania nowych zagadnień,
- wdrażanie do samokształcenia i rozwijania własnych predyspozycji matematycznych.

Niezmiernie rzadko, poza koniecznością przygotowania się do obszerniejszej pracy klasowej, uczniowie otrzymują do wykonania długoterminową pracę domową. W praktyce nauczania w polskich szkołach nie ma ona większego wpływu na ocenę ucznia. Celem wypracowanej przez mnie koncepcji pracy długoterminowej z matematyki (poza dłuższym czasem przewidywanym na jej wykonanie) jest stworzenie warunków do:

- rozwijania umiejętności uczenia się – przez dostarczanie narzędzi do samodzielnego zaplanowania pracy badawczej, jej wykonania, dyskusji i prezentacji wyników; stawiania ucznia w centrum procesu kształcenia: to uczeń decyduje o kształcie swojej pracy i tempie jej wykonania,
- poszerzenia pola do zindywidualizowanego uczenia się – uczeń może wybrać temat, w którym może zaprezentować się od najlepszej strony, zgodnie ze swoimi zainteresowaniami i aspiracjami,
- budzenia pozytywnego stosunku do nauki oraz wiary w swoje możliwości.

Koncepcję długoterminowej pracy domowej ucznia drugiej klasy liceum ogólnokształcącego można scharakteryzować następująco:

1. Każdy uczeń otrzymuje listę zagadnień i zadań z nimi związanych do samodzielnego opracowania oraz instrukcję wykonywania pracy; lista zagadnień stanowi jedynie rusztowanie, na którym opiera się jego indywidualna praca, sam bowiem dobiera sobie materiał oraz sposób jego opracowania.
2. Po opracowaniu wybranego zagadnienia i zadań z nim związanych uczeń przedstawia je w formie pisemnego sprawozdania; prace są prezentowane na forum klasy (również z wykorzystaniem programu komputerowego, rzutnika multimedialnego).
3. W dyskusji następuje omówienie jakości i sposobu wykonania pracy.

4. Końcową ocenę pracy (w formie niby recenzji) podaje nauczyciel matematyki; ustala przy tym poziom rozumienia[3] opracowanego materiału przez referenta.

W prowadzonym przeze mnie badaniu zależało mi na tym, by ewentualne posługiwanie się matematycznymi programami komputerowymi wynikało z rzeczywistych potrzeb ucznia, a nie z chęci dopasowania się do moich oczekiwań. Dlatego też skonstruowana przeze mnie długoterminowa praca domowa była zadana i oceniona przez nauczycieli matematyki uczących w danej klasie (uczniowie nie wiedzieli, że to ja jestem jej pomysłodawcą i autorem).

Lista zagadnień i zadań obejmowała:

a) 12 tematów (część I),
b) serie zadań (część II),
c) serie problemów otwartych (część III).

Tematy zagadnień (z części I) celowo sformułowałam w sposób ogólny, by uczeń sam zdecydował, które zagadnienia go interesują, sam podjął decyzję, co w wybranym dziale jest dla niego ciekawe i co może interesująco rozwiązać (być może z użyciem komputera) i opisać. Zagadnienia te dotyczą treści programu nauczania matematyki klasy drugiej liceum w zakresie rozszerzonym.

Oto przykładowe zagadnienia (przytaczam niektóre z tematów i zadań, zwracam uwagę na zadanie 2 z części II, które będę omawiała w tym artykule):

Część I:

1. Przekształcenia wykresów funkcji.
2. Wykresy funkcji z wartością bezwzględną.
3. Wzajemne położenie prostej i okręgu, położenie dwóch okręgów.
4. Wielokąty wpisane w okrąg, wielokąty opisane na okręgu.

Przykładowe zadania z części II:

Zadanie 1
Wypracuj metodę konstrukcji środkami geometrycznymi wykresu funkcji $y = x^2$.

[3] Przyjmuję, że uczeń rozumie informację (wypowiedź, tekst, pojęcie) na poziomach: **recepcji,** gdy jest w stanie śledzić czyjeś wyjaśnienia, **reprodukcji,** gdy potrafi to, co czytał, odtworzyć (dosłownie, w nieco zmienionej formie, swoimi słowami), **aplikacji**, gdy poza śledzeniem, odtwarzaniem potrafi zastosować (w takiej samej, nieco zmienionej, analogicznej sytuacji zadaniowej), **inspiracji**, gdy jeszcze dodatkowo potrafi użyć tych informacji w nowej dla niego sytuacji, umie je zmodyfikować oraz przetworzyć w sposób twórczy (zob. Treliński, 2004, s. 26).

Zadanie 2
Zbadaj, jak zmienia się kształt i położenie wykresu funkcji danej wzorem $y = ax^2 + bx + c$, *gdzie* $a \neq 0$, *w zależności od współczynników* a, b, c.

Zadanie 3
Skonstruuj miejsce geometryczne punktów (zbiór punktów) płaszczyzny odległych od danego okręgu o promieniu długości r *o daną liczbę dodatnią* a.

Zadanie 4
Wyznacz (opisz metodę konstrukcji) punkt wewnętrzny trójkąta, którego odbicie symetryczne względem prostej zawierającej bok trójkąta należy do okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykładowe zadania – problemy otwarte (część III):

Zadanie 1
Co można powiedzieć o współczynnikach a, b, c, *gdzie* $a \neq 0$, *funkcji danej wzorem* $y = ax^2 + bx + c$, *skoro wierzchołek paraboli będącej jej wykresem należy do prostej o równaniu* $x = -\frac{1}{2}$?

Zadanie 2
Dany jest prostokąt $ABCD$ *i punkt* M. *Niech punkty* K, L, R, P *będą odpowiednio punktami symetrycznymi do punktu* M *względem środków boków* AB, BC, CD, DA. *Co można powiedzieć o czworokącie utworzonym z punktów* K, L, R, P?

Zadanie 3
W kwadracie $ABCD$ *punkt* E *jest środkiem boku* BC, *punkt* F *środkiem boku* CD, *odcinki* AE *i* AF *dzielą przekątną* BD *na 3 części. Co można powiedzieć o stosunku części podzielonej przekątnej?*

Sprawozdanie z pracy oraz rozwiązania tych zadań pozwolą – z jednej strony – ustalić, na jakim poziomie uczeń zrozumiał treści (pojęcia, twierdzenia, metody postępowania) objęte danym tematem, z drugiej zaś będą stanowić materiał do dyskusji. W efekcie tego pozwolą ocenić jego umiejętność uczenia się, wskażą trudności, jakie napotykał, opracowując dane zagadnienie oraz pośrednio umiejętność działania w zakresie matematyki szkolnej.

Instrukcja do pracy (rysunek 1),zawiera: informacje na temat, z jakich materiałów mogą korzystać uczniowie (samodzielnie znaleziona literatura, programy komputerowe, Internet), wymogi, jakie ma spełniać praca oraz kryteria, według których będzie oceniana. Jednym z wymogów (zob. instrukcja) było sporządzenie sprawozdania z pracy, które, oprócz rozwiązań zadań, powinno zawierać informację o źródłach, z jakich korzystał uczeń, motywację zainteresowania wybranym tematem, napotkane trudności. Na realizację pracy uczniowie mieli 3 tygodnie.

Długoterminowa praca domowa – instrukcja

1. **Pracę należy wykonać samodzielnie.** Można kontaktować się z osobami realizującymi ten sam temat, ale nie można wspólnie go realizować. Każda osoba wybiera:
   - jeden z 12 tematów z części I,
   - dwa zadania z części II,
   - jeden problem z części III.

   Opracowując temat, można podawać teorię, ciekawe przykłady i ich rozwiązania, wykresy, rysunki, konstrukcje, ilustracje, przykłady „z życia" itp., czyli wszystko to, co wydaje Ci się interesujące i co potrafisz zrobić w obrębie danego tematu.
2. **Wynikiem pracy domowej ma być sprawozdanie, które powinno zawierać:**
   - motywację zainteresowania tematem,
   - metody dojścia do celu,
   - trudności napotkane w trakcie realizacji,
   - teorię, zadania, rozwiązania, wykresy, ilustracje, wyniki pracy z programami komputerowymi – według Twojej koncepcji.
3. **W trakcie realizacji pracy i przygotowania sprawozdania można korzystać z:**
   (a) podręczników i innej literatury (wg. uznania),
   (b) zbiorów zadań,
   (c) Internetu,
   (d) programów komputerowych („zrzutki z ekranu", pliki itd.).
4. **Ostateczny termin oddania pracy domowej upływa z dniem ....** Wówczas też chętni uczniowie będą mogli zaprezentować wybrane fragmenty swoich prac. Należy uprzedzić o konieczności przygotowania odpowiedniego sprzętu (rzutnik multimedialny, komputer, ekran itp.) potrzebnego przy prezentacji.
5. **Kryteria oceniania:**
   - spełnienie wszystkich wymagań instrukcji,
   - samodzielność pracy,
   - poprawność treści,
   - redakcja poprawnym językiem matematycznym,
   - oryginalność pracy,
   - estetyka wykonania pracy.

Rysunek 1.

3. Cele badania

Celem badania poświęconego organizowaniu długoterminowej pracy domowej było uzyskanie odpowiedzi na pytania:

a) W jakich sytuacjach matematycznych uczniowie samodzielnie, bez polecenia nauczyciela sięgają po program komputerowy?

b) Jakie motywy nimi kierują, gdy traktują program komputerowy jako środek umożliwiający odkrycie oraz konstrukcję rozwiązania zadania?

c) Jakie rozumowania może prowokować program komputerowy, jakie intuicje wzmacniać?

d) Jakie funkcje w procesie uczenia się może, a jakich nie może spełniać program komputerowy, nie tylko w zakresie przyswajanej wiedzy, ale także z punktu widzenia form myślenia, rodzajów twórczości i typów aktywności ucznia?

4. Poszukiwanie rozwiązania zadania z części II

W niniejszym artykule ograniczam się do omówienia pracy Kasi, uczennicy klasy drugiej o profilu ogólnym. Dysponowała ona własnym komputerem i matematycznymi programami. Przedstawiam rozwiązanie jednego z zadań z jej długoterminowej pracy domowej. Zaprezentowana przez uczennicę droga poszukiwania rozwiązania jest nie tylko pouczająca dydaktycznie, ale ujawnia funkcje, jakie może spełniać program komputerowy w procesie uczenia się.

Zadanie

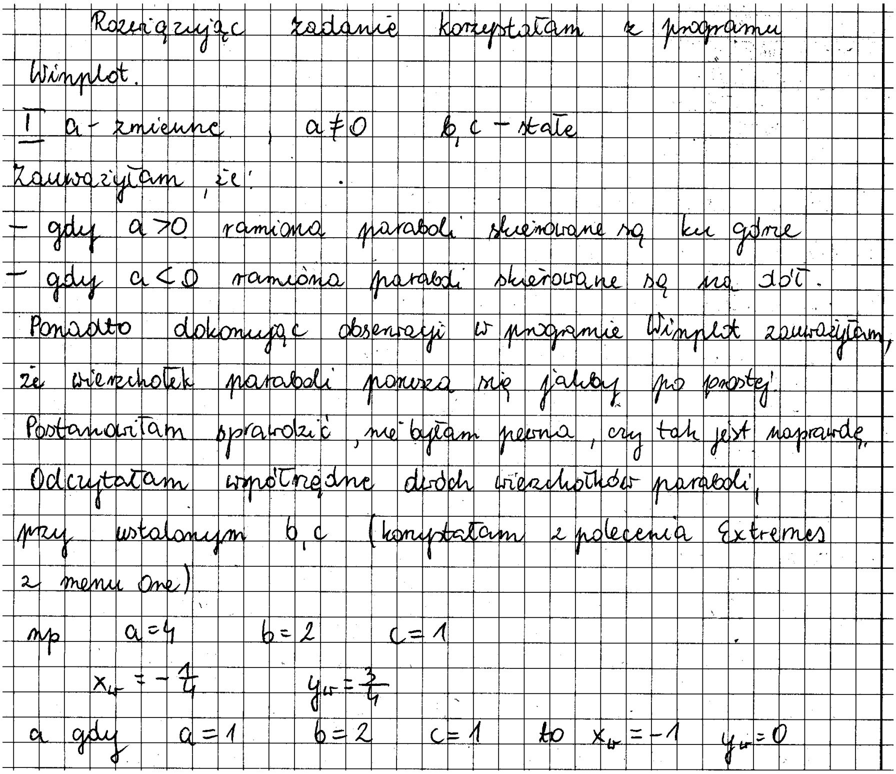
Zbadaj, jak zmienia się kształt i położenie wykresu funkcji danej wzorem

$$y = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a \neq 0$, w zależności od współczynników a, b, c.

Rozwiązując to zadanie, Kasia posługiwała się programem Winplot. Poniższe rysunki są fragmentami jej autentycznego sprawozdania z pracy długoterminowej, które wykonała. Opisała w nim swoje postępowanie, udokumentowała je, wklejając zdjęcia ekranu komputera. Komentarz, jaki zamieszczam, jest wynikiem analizy jej pisemnego sprawozdania, rozmowy z nią oraz zachowania podczas prezentacji rozwiązań tego zadania.

Uczennica pisze:

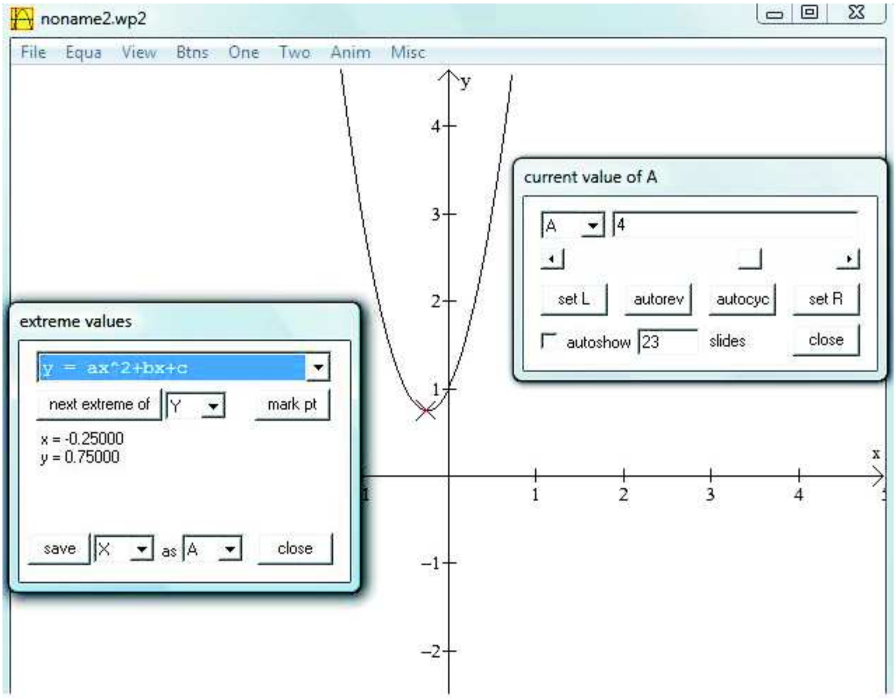


Rozwiązując zadanie korzystałam z programu
Winplot.
I a - zmienne, $a \neq 0$ b, c - stałe
Zauważyłam, że:
- gdy $a > 0$ ramiona paraboli skierowane są ku górze
- gdy $a < 0$ ramiona paraboli skierowane są na dół.
Ponadto dokonując obserwacji w programie Winplot zauważyłam,
że wierzchołek paraboli porusza się jakby po prostej.
Postanowiłam sprawdzić, nie byłam pewna, czy tak jest naprawdę.
Odczytałam współrzędne dwóch wierzchołków paraboli,
przy ustalonym b, c (korzystałam z polecenia Extremes
z menu One)
np $a=4$ $b=2$ $c=1$
$x_w = -\frac{1}{4}$ $y_w = \frac{3}{4}$
a gdy $a=1$ $b=2$ $c=1$ to $x_w = -1$ $y_w = 0$

Rysunek 2.

Kasia rozpoczęła obserwacje zachowania wykresu funkcji kwadratowej (rysunek 3), zmieniając współczynnik a; w efekcie wyciągnęła dwa wnioski odnośnie do położenia ramion paraboli (rysunek 2) i ciekawe spostrzeżenie, że wierzchołek paraboli porusza się **jakby** (warto podkreślić to słowo) po prostej. W jej myśli zarysowała się pewna hipoteza; jej sformułowanie było możliwe dzięki możliwościom programu, który pozwalał w płynny i dynamiczny sposób zmieniać położenie wykresu. To skłoniło ją do wyboru konkretnych wartości $b = 2$ i $c = 1$.

Dalsze eksperymenty z konkretnymi wartościami współczynników b i c doprowadziły ją do przekonania, że – jak pisze – „Dla wybranych przeze mnie wartości a wszystkie wierzchołki leżą na tej samej prostej $y = x + 1$.” (rysunek 4). Przekonanie to okazało się mało oczywiste, wymagało bowiem – jak można zauważyć – potwierdzenia przez sprawdzenie w kilkunastu wybranych przypadkach i, co ciekawe, nie tylko, gdy a było liczbą całkowitą. W ten sposób uzyskała intuicyjną pewność, że tak jest.



Rysunek 3.

Analizując ten fragment rozwiązywania, warto zwrócić uwagę na dwie sprawy. Po pierwsze, w czasie bezpośredniej rozmowy z nią usłyszałam: *Ogromnie zdziwiłam się tym, co odkryłam. Nie byłam pewna, czy dobrze policzyłam, bo nie miałam z czym sprawdzić. Nigdzie nie znalazłam takiego zadania. Ja w ogóle jestem taka, że jak zobaczę na własne oczy, to wtedy wierzę, że tak jest. Dobrze, że mogłam sprawdzić w Winplocie, że dobrze policzyłam. Zobaczyłam, że zawsze dla dowolnych b i c, gdy zmieniałam a, to wtedy wierzchołek paraboli zawsze poruszał się po tej prostej, którą ja znalazłam.*

Opisany wyżej tok rozumowania oraz powyższa wypowiedź nasuwają podejrzenie, że uczennica nie do końca rozumie sytuację, którą bada. Faktycznie chodzi o następujący problem: wyznaczyć zbiór wierzchołków jednoparametrowej (przy konkretnie wybranych wartościach parametrów $b = 2$, $c = 1$) rodziny P parabol, z których każda jest dana wzorem $y = ax^2+2x+1$. Bez świadomości tego faktu trudno zrozumieć, co należy wyznaczyć i tym bardziej trudno sobie wyobrazić całą sytuację.

Zatem dla ustalonych $b=2$, $c=1$ wierzchołki paraboli dla $a=4$ i $a=1$ należą do prostej $y=x+1$

Sprawdziłam czy dla innych wartości współczynnika a, wierzchołki leżą na prostej $y=x+1$

$a=-2$ $b=2$ $c=1$

$x_w = \frac{1}{2}$ $y_w = \frac{3}{2}$

Punkt $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ spełnia równanie $y=x+1$, gdyż $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}+1$

zatem wierzchołek znajduje się na prostej $y=x+1$

$a=-0{,}6$ $x_w = 1{,}6667$ $y_w = 2{,}6667$

Punkt $(1{,}6667; 2{,}6667)$ również spełnia równanie $y=x+1$, więc wierzchołek paraboli $y=-0{,}6x^2+2x+1$ należy do prostej $y=x+1$.

Dla wybranych przeze mnie wartości współczynnika a (przy ustalonych b i c) wszystkie wierzchołki leżą na tej samej prostej $y=x+1$

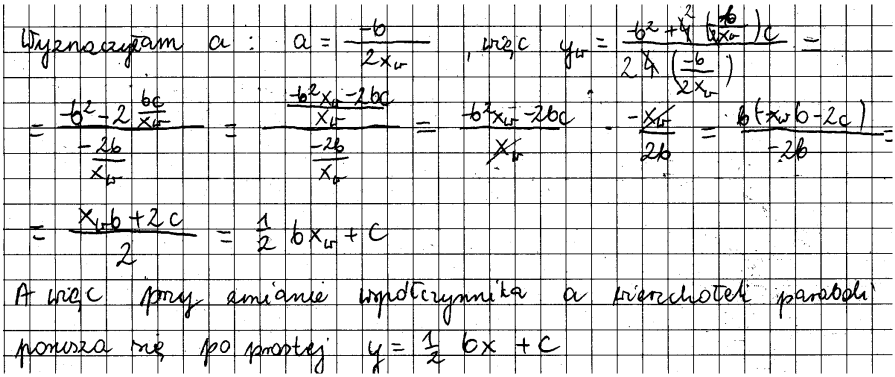
Rysunek 4.

Sprawa druga, postępowanie Kasi ma wszelkie znamiona uogólnienia przez uzmiennienie stałych. Zauważmy, że postanowiła ona uogólnić odkryty związek na dowolne wartości parametrów (rysunek 5, rysunek 6). Przeprowadzony rachunek jest faktycznie dowodem twierdzenia: jeżeli wartości parametrów b i c są dowolnie ustalone, to zbiór wierzchołków rodziny parabol, z których każda opisana jest równaniem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, tworzy prostą o równaniu $y = \frac{1}{2}bx + c$.

Postanowiłam sprawdzić czy zawsze przy ustalonych b i c, przy zmianie współczynnika a, wierzchołki będą układać się na prostej.

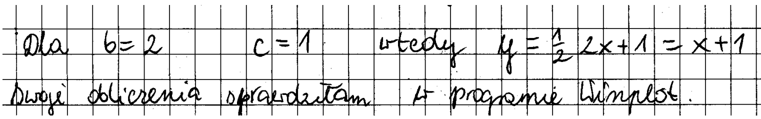
$x_w = -\frac{b}{2a}$ $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

Rysunek 5.



Rysunek 6.

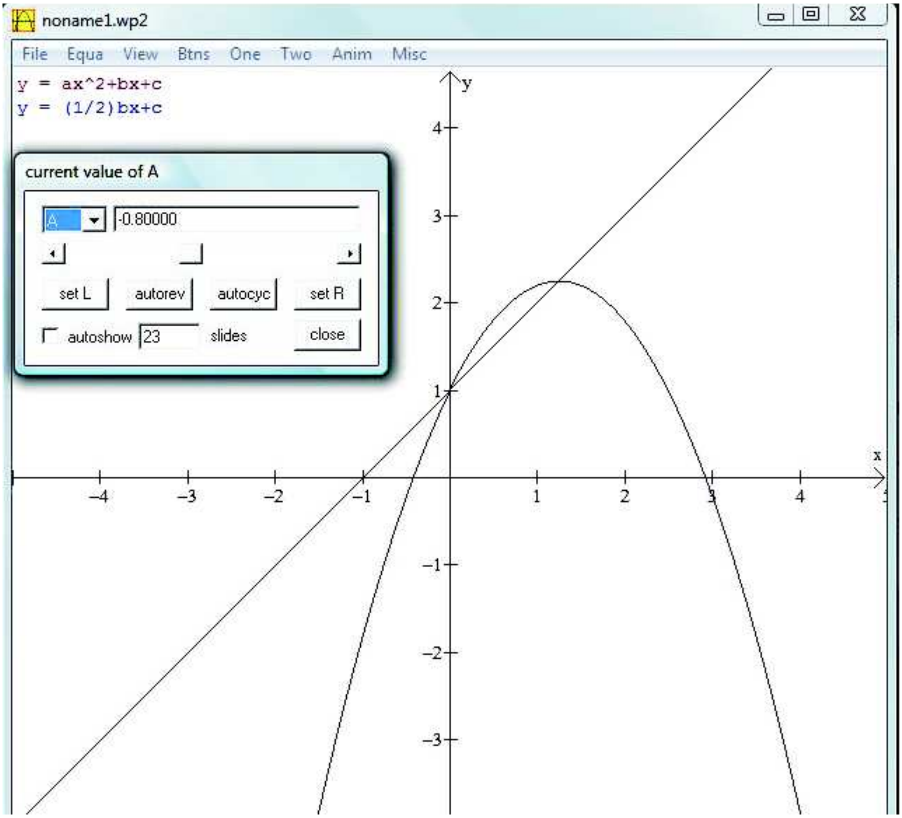
Mimo dojrzałości matematycznej tego rozumowania (jak na licealistkę), rachunek nie był wystarczająco przekonywujący. Autorka ponownie uznała, że należy jeszcze raz sprawdzić prawdziwość odkrytego wzoru dla $b = 2$, $c = 1$ (rodziny parabol badanej wcześniej); tym razem wykonując wykresy funkcji $y = ax^2 + bx + c$ i $y = \frac{1}{2}bx + c$ (rysunek 7).



Rysunek 7.

Dopiero, gdy „zobaczyła" na ekranie komputera, że prosta przechodzi przez wierzchołki kolejnych parabol (jedną z nich przedstawia rysunek 8), była pewna, że odkryty związek jest prawdziwy. Potrzeba sprawdzenia rachunku na drodze wizualnej sugeruje, iż wykonane obliczenia nie wystarczyły, aby struktura badanej sytuacji w jej myśli się zinterioryzowała; dopiero wizualizacja problemu, dostrzeżenie parabol w ruchu przekonało ją, iż tak jest naprawdę.

Zauważmy, że program Winplot został wykorzystany przez Kasię w dwóch różnych sytuacjach: a) do odkrycia twierdzenia w wyniku prowadzonej serii eksperymentów, b) do potwierdzenia poprawności rozumowania będącego dowodem twierdzenia. W pierwszej sytuacji, bez użycia komputera, który natychmiast kreślił parabole przy niewielkich – niemal ciągłych – zmianach parametru a, nie byłoby możliwe sformułowanie wprost narzucającej się hipotezy. Natomiast w sytuacji drugiej wizualizował ogólne rozumowanie; potwierdzał poprawność „dowodu", sprawiając, że twierdzenie stało się intuicyjnie prawdziwe. Wizualizacja, i to jest bardzo ważne, doprowadziła do pełnej interioryzacji struktury problemu.

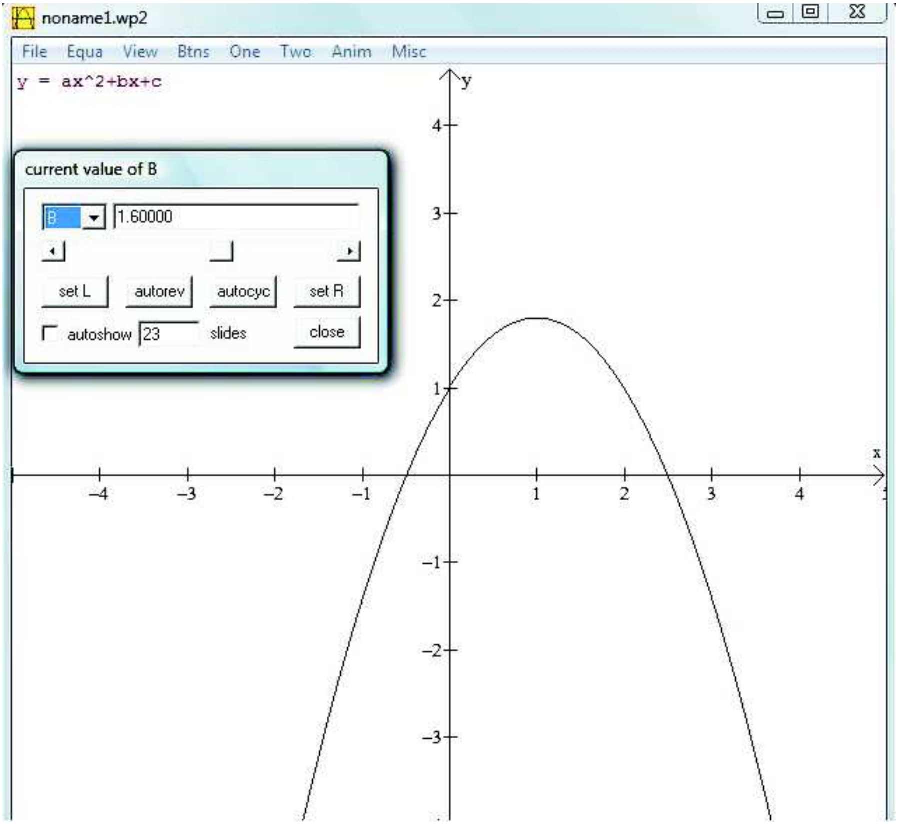


Rysunek 8.

Także inni uczniowie – zarówno w ankietach, jak i w rozmowach – często podkreślali fakt, że dzięki użyciu komputera mogli „zobaczyć” własność, której szukali, a także dzięki wizualizacji problem stawał się dla nich bardziej zrozumiały i łatwiejszy do wysłowienia i zapamiętania.

Uczniowie akcentowali również aspekt pracy z komputerem, na który zwracali uwagę Kąkol i Ratusiński (2004), a mianowicie: „komputer jest w stanie stworzyć inną sytuację dydaktyczną, w której uczeń wyzbywa się stresów wynikających z tego, że nie umie on rozwiązać problemu. Komputer i ta nowa sytuacja wzmagają zainteresowanie problemem, pozwalają równocześnie lepiej go zrozumieć i w konsekwencji umożliwiają znalezienie odpowiedzi na postawione w problemie pytania”.

Kolejny etap pracy Kasi związany był z badaniem zmian położenia wykresu funkcji kwadratowej w zależności od współczynnika b (rysunek 9).

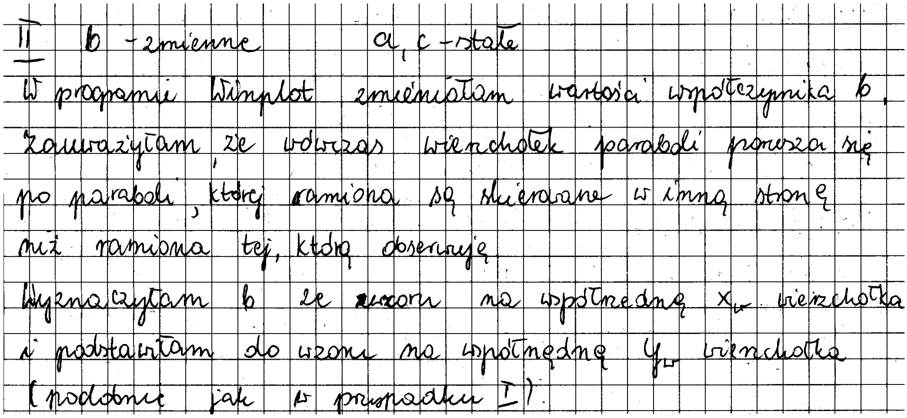


Rysunek 9.

Tym razem nie wykonywała obliczeń dla konkretnych wartości parametrów, lecz od razu zmieniała wartości b (przy stałych wartościach parametrów a, c) w programie Winplot. Zauważyła, że wierzchołek paraboli porusza się po innej paraboli, o równaniu $y = -ax^2 + c$, która ma ramiona przeciwnie skierowane niż każda z parabol danej rodziny. Wykorzystała także zdobyte doświadczenie i wyznaczyła równanie poszukiwanej paraboli (rysunek 10, rysunek 11).

Podobnie jak poprzednio, nie była pewna, czy znaleziony związek jest prawdziwy. Sporządziła więc w programie Winplot wykresy parabol $y = ax^2+bx+c$, $y = -ax^2 + c$ i przekonała się o słuszności wyprowadzonego wzoru (rysunek 12, rysunek 13).

W dalszej kolejności rozpatrywała zmiany położenia wykresów rodziny funkcji kwadratowych, z których każda jest dana wzorem $y = ax^2 + bx + c$ w zależności od parametru c. Ustaliła, że wówczas wierzchołek „porusza” się po prostej o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$ (rysunek 14).

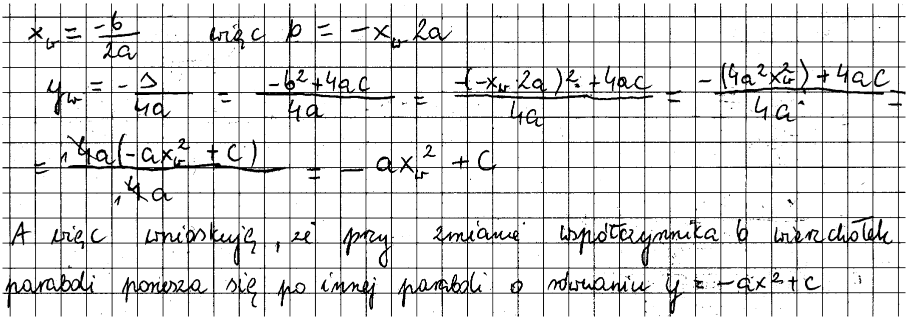


II b - zmienne a, c - stałe

W programie Winplot zmieniłam wartość współczynnika b. Zauważyłam, że wówczas wierzchołek paraboli porusza się po paraboli, której ramiona są skierowane w inną stronę niż ramiona tej, którą obserwuję.

Wyznaczyłam b ze wzoru na współrzędną x_w wierzchołka i podstawiłam do wzoru na współrzędną y_w wierzchołka (podobnie jak w przypadku I).

Rysunek 10.

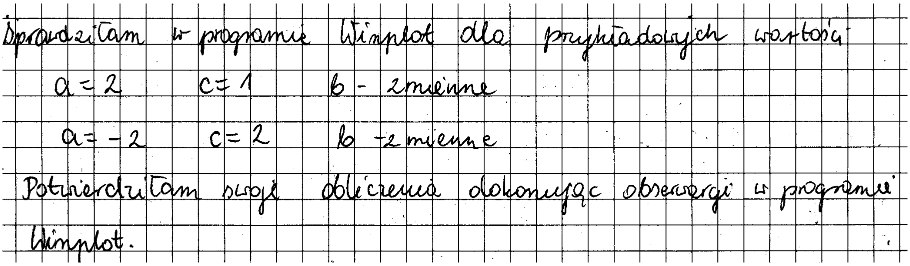


$x_w = \frac{-b}{2a}$ więc $b = -x_w 2a$

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{-(-x_w 2a)^2+4ac}{4a} = \frac{-(4a^2x_w^2)+4ac}{4a} = \frac{\cancel{4a}(-ax_w^2+c)}{\cancel{4a}} = -ax_w^2+c$$

A więc wnioskuję, że przy zmianie współczynnika b wierzchołek paraboli porusza się po innej paraboli o równaniu $y = -ax^2+c$

Rysunek 11.



Sprawdziłam w programie Winplot dla przykładowych wartości

$a = 2$ $c = 1$ b - zmienne

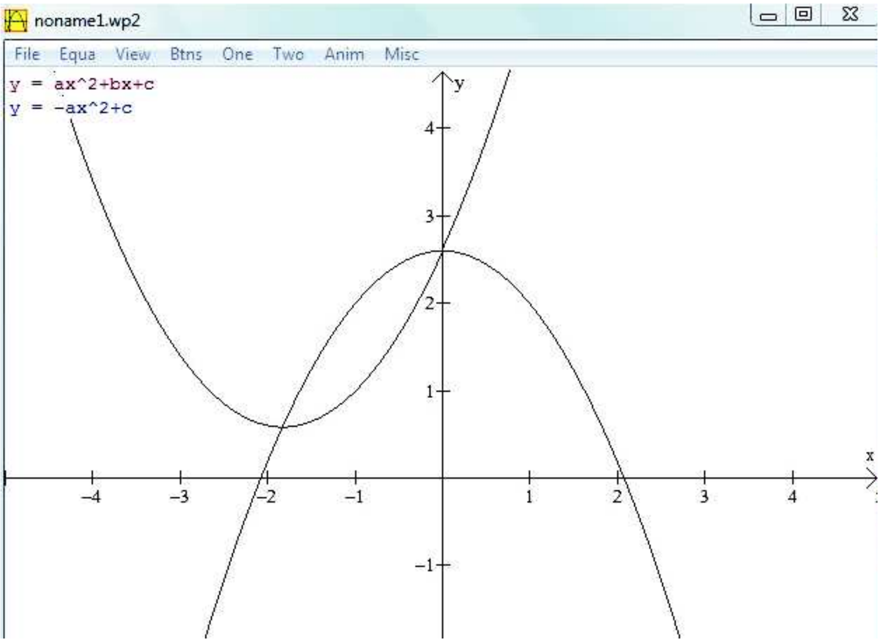
$a = -2$ $c = 2$ b - zmienne

Potwierdziłam swoje obliczenia dokonując obserwacji w programie Winplot.

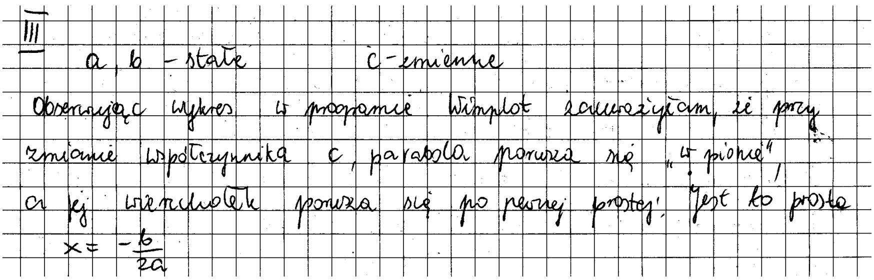
Rysunek 12.

Kolejnym etapem długoterminowej pracy była prezentacja wyników przeprowadzonego badania. Na forum klasy Kasia opowiedziała o swoich próbach, poszukiwaniach i otrzymanych rezultatach. Posługiwała się komputerem i rzutnikiem multimedialnym, wykorzystując program Winplot. Ogromnym zaskoczeniem, zarówno dla uczniów, jak i nauczycielki, była treść jej referatu. Niektórzy uczniowie nie dowierzali podanym prawidłowościom, jeden z nich pytał:

A skąd wiesz, że te wierzchołki leżą na tej prostej czy paraboli? Może są tuż obok, a nam się tylko tak wydaje, że są na tej właśnie prostej czy paraboli?

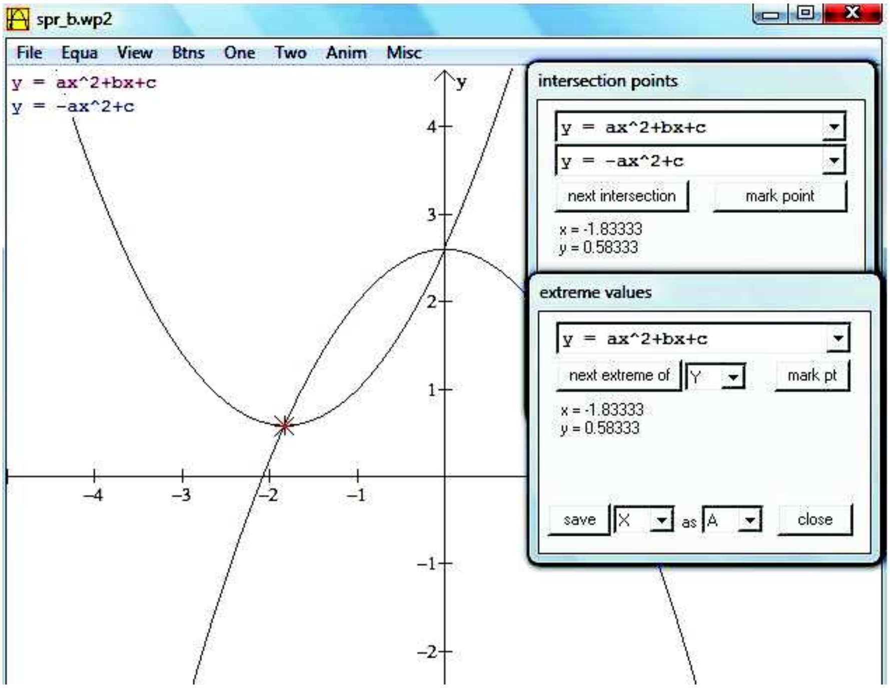


Rysunek 13.



Rysunek 14.

Wówczas uczennica wykorzystała polecenia *Extremes* z menu *One* oraz *Intersections* z menu *Two* i pokazała, że wierzchołek paraboli $y = ax^2 + bx + c$ i punkt przecięcia paraboli z krzywą $y = -ax^2 + c$ mają takie same współrzędne (rysunek 15).



Rysunek 15.

5. Postawy uczniów w toku pracy z programem

Uczennica, rozwiązując zadania, sięgnęła po program komputerowy Winplot, gdyż znała jego możliwości i wiedziała, że może się nim posłużyć. Korzystała głównie z jego graficznych możliwości. Eksperymentowała z różnymi wartościami współczynników a, b, c. Program szybko i poprawnie sporządzał za nią wykresy funkcji kwadratowych, a ona mogła obserwować pojawiające się regularności. Dynamiczne i płynne (niemal ciągłe) zmiany kolejno jednego z parametrów a, b, c prowadziły do zmian położenia wierzchołka paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, który wizualnie kreślił krzywą. Jako coś naturalnego pojawiała się odpowiednia hipoteza dotycząca zbioru wierzchołków rodziny parabol.

Przeprowadzany eksperyment miał wszelkie cechy wnioskowania empirycznego w dziedzinie matematyki na poziomie licealnym (Krygowska, 1977, s. 143). Indukcyjne próby dla wybranych wartości parametrów coraz bardziej przeradzały się w rozumowanie intuicyjne wykorzystujące obrazy pojęć; hipoteza była oparta na dostrzeżonej regularności. Podobne zachowania obserwowałam także w pracach innych uczniów.

Bardzo trudno byłoby osiągnąć podobny efekt w nauczaniu tradycyjnym wykorzystującym kredę i tablicę, odręcznie wykonywane rysunki.

Obrazy prezentowane na ekranie komputera budziły również wątpliwości: czy można i w jakim stopniu wierzyć komputerowi (por. wypowiedź ucznia w toku prezentacji pracy przez Kasię). W sposób naturalny pojawiła się potrzeba dowodu hipotezy, tak rzadko spontanicznie przejawiana w toku klasycznych lekcji matematyki. Uczennica przeprowadziła jej dowód, wykonując odpowiednie obliczenia. To jej nie przekonało, można powiedzieć, że dowiedziała się, że tak jest, ale nie zobaczyła tego. Kasia nie ma więc pełnej świadomości metodologicznej dedukcji, choć dość swobodnie operuje rachunkiem. Potrzebna jej jest wizualna legalizacja formalnego rozumowania. By wzmocnić jej wewnętrzne przekonanie, niezbędnym okazał się program komputerowy.

Także program komputerowy doprowadził do pełnego zrozumienia problemu; umożliwił interioryzację struktury badanej sytuacji.

W żadnym z podręczników do szkół ponadgimnazjalnych nie ma takich rozważań; badanie wykresu trójmianu kwadratowego ogranicza się do przypadków, w których mamy konkretnie podane wartości współczynników a, b, c we wzorze funkcji $y = ax^2 + bx + c$. Tu zaś mamy do czynienia z badaniem rodziny funkcji (rodziny parabol), a więc z problemem z wyższego piętra abstrakcji matematycznej (w sensie A. Vermandela i E. Cohorsa-Fresenbörga (zob. Siwek, 1985). Takie badanie wymaga znaczącego doświadczenia matematycznego (metodologicznego), którego większość licealistów nie ma. Właśnie program Winplot umożliwił im wyjście poza zwykły przekaz wiedzy prezentowanej w podręcznikach i na lekcjach; stał się narzędziem wyzwalającym twórcze doświadczenie ucznia. Przekonali się o tym ci uczniowie, którzy nie posługiwali się programem komputerowym. Żaden z nich nie wykrył omawianych wyżej zależności; ograniczali się oni jedynie do tradycyjnego badania trójmianu kwadratowego oraz położenia jego wykresu w stosunku do osi układu współrzędnych w zależności od znaku wyróżnika trójmianu i współczynnika a.

Na lekcjach z reguły nie ma czasu na prowadzenie przez uczniów badań; bez pomocy programu komputerowego trudno byłoby przeprowadzić takie obserwacje i wyciągnąć wnioski. Rozwiązywanie tego typu zadania metodą „kartki i ołówka" jest praktycznie niewykonalne. Warunki takie stworzyło wykonywanie długoterminowej pracy domowej.

Warto też zwrócić uwagę na język prezentacji rozumowań przez Kasię. Jej opisy są formułowane w sposób poprawny językiem matematycznym. Nie wszystkie prace uczniów miały tę cechę, choć w instrukcji uczniowie zobligowani byli nie tylko do przedstawienia rozwiązania, ale także do ujawnienia sposobu dojścia do celu oraz opisu napotykanych trudności. Wiedzieli oni również, że ocenie podlegać będzie poprawne posługiwanie się językiem i symboliką matematyki.

6. Uwagi końcowe

Jest oczywiste, że opisane tu zachowania uczniów nie mogą być przenoszone wprost na inne sytuacje dydaktyczne, w których wykorzystujemy programy komputerowe. Tym niemniej przedstawione obserwacje, wyniki badania i ich analiza pokazują, że:

1. Wypracowana koncepcja długoterminowej pracy domowej z matematyki (łącząca samodzielne badanie danego zagadnienia z dyskusją oraz prezentacją wyników badania) pozwalała uczniom organizować naukę we właściwym dla siebie tempie, zwiększać samodzielność, zaktywizować swój udział w procesie uczenia się matematyki, wzbudzając przy tym pozytywne nastawienie do przedmiotu i usuwając obciążenia psychiczne. Wykonanie tej pracy może ułatwić program komputerowy, który staje się użytecznym narzędziem dobrze organizującym proces uczenia się.
2. Nie wszyscy uczniowie samorzutnie sięgają po programy komputerowe. Warunkiem wstępnym posługiwania się nimi w pracy domowej jest wcześniejsze dobre poznanie ich możliwości technicznych i operacyjnych. Dla osób wykorzystujących program Winplot okazał się on użytecznym narzędziem w fazie wstępnego badania problemu, prowadzenia eksperymentów, dostrzegania zależności, formułowania i poglądowego weryfikowania hipotez.
3. Praca z matematycznym programem komputerowym Winplot umożliwiła prowadzenie rozumowań na innym piętrze abstrakcji niż zwykle odbywa się to na lekcjach matematyki w liceum. Bez jego pomocy uczennica nie byłaby w stanie zrozumieć problemu, który badała.

Literatura

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119-138.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Okoń, W.: 1968, *Zarys dydaktyki ogólnej*, PZWS, Warszawa.

Siwek, H.: 1985, *Naśladowanie wzorca i dostrzeganie prawidłowości w prostych sytuacjach matematycznych i paramatematycznych przez dzieci upośledzone w stopniu lekkim*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Szpiter, M.: 1998, Znaczenie nauki domowej, *Życie Szkoły* **6**, 339-342.

Treliński, G.: 2004, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I-III*, Wszechnica Świętokrzyska, Kielce.

Zborowski, J.: 1972, *Nauka domowa ucznia szkoły średniej*, PWN, Warszawa.

Wyższa Szkoła Umiejętności
im. S. Staszica w Kielcach
ul. Wesoła 52
PL 25-353 Kielce
e-mail: renatawojtus@gmail.com