FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Jan Górowski, Adam Łomnicki

Kilka uogólnień reguł pewnej gry strategicznej*

Abstract. In the paper a set of strategy games is presented. It is shown how the "manipulative" developing of the winning strategy of a known and simple game can lead to conceptual reasoning based on reduction; then it is suggested how to formalise and generalise such a game, similar games and the procedure of finding the winning strategy.

Wstęp

W artykule przedstawimy ciąg gier strategicznych, które uzyskaliśmy formułując najpierw gry analogiczne do znanej gry *bieg do liczby 33*, a następnie gry o regułach istotnie ogólniejszych (bo dotyczących elementów grupy archimedesowskiej). Opisane gry mogą być wykorzystywane na różnych poziomach nauczania matematyki dla wyzwalania i kształtowania aktywności matematycznych takich, jak dostrzeganie analogii, uogólnianie, dowodzenie, na przykładzie atrakcyjnej dla uczących się tematyki gier i zabaw.

I.

Gra 1: bieg do 33

Dwaj gracze A i B wybierają na przemian po jednej liczbie spośród liczb $1, 2, 3, 4, 5$. Każda z tych liczb może być wybierana wielokrotnie. Wygra ten z graczy, który jako pierwszy wybierze taką liczbę (spośród – jak pamiętamy – liczb $1, 2, 3, 4, 5$), że jej suma i wszystkich liczb wcześniej wybranych przez obu graczy jest większa lub równa 33.

Czysto teoretyczne rozważania lub kilka prób gry może doprowadzić do wniosku, że gracz rozpoczynający zawsze może wykonać taki pierwszy ruch, który zapewni mu zwycięstwo.

Każdy wybór będziemy nazywali krokiem (lub ruchem), a gracza rozpoczynającego w grach opisanych w artykule – oznaczali literą A. Łatwo zanotować

*A few generalizations of some strategic game

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 91A26, 91A05, Secondary: 97A20, 91A40

Key words and phrases: strategic game, winning strategy, game heuristic model

przebieg konkretnej partii tej gry w postaci ciągu. Gdy gracz A wybrał najpierw liczbę 2, po nim gracz B – liczbę 3, następnie gracz A liczbę 2, po nim gracz B – liczbę 5, a następnie każdy z graczy trzykrotnie wybrał liczbę 1, to dotychczasowy przebieg tej gry można zakodować ciągiem $(2, 3, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Przeprowadźmy następujące rozumowanie (w pewnym sensie redukcyjne). Gracz A będzie mógł wykonać decydujący, ostatni zwycięski ruch, gdy po ostatnim ruchu gracza B suma wybranych liczb będzie równa co najmniej 28, a mniejsza od 33. Wystarczy, że wtedy gracz A wybierze liczbę 5, tworząc sumę osiągnie liczbę 33 lub ją przekroczy.

Aby taka sytuacja zaistniała, w przedostatnim kroku gracz A musi osiągnąć liczbę 27, a więc w poprzednim ruchu – liczbę 21, a poprzednim 15, w poprzednim 9, a więc w pierwszym ruchu powinien wybrać liczbę 3.

Grę, której wynik nie zależy od losu, a od przyjętej przez gracza strategii, nazywać będziemy grą strategiczną. Opisana powyżej gra 1 nie jest sprawiedliwa w tym sensie, że istnieje strategia prowadząca gracza rozpoczynającego grę do wygranej. Jest to więc przykład gry strategicznej.

Gra 2: bieg do 62

Zmieniamy w regułach pierwszej gry liczbę 33 na 62 oraz tylko to, że gracze A i B wybierają teraz liczby spośród liczb $1, 2, 3$. Rozumowanie analogiczne do podanego powyżej prowadzi do wniosku, że istnieje strategia prowadząca do wygranej gracza rozpoczynającego. W pierwszym ruchu powinien wybrać liczbę 2.

Gra 3: bieg do 55

Zmieniamy w regułach pierwszej gry liczbę 33 na 55 oraz to, że gracze wybierają teraz liczby spośród liczb $1, 2, 3, 4$. Nietrudno uzasadnić, że nie istnieje strategia prowadząca do wygranej gracza rozpoczynającego.

Gra 4: bieg do liczby L

Zmieniamy w regułach pierwszej gry liczbę 33 na liczbę L, większą od każdej liczby ze zbioru $X = \{1, 2, \ldots, t\}$, gdzie $t \geqslant 2$, z którego gracze A i B wybierają liczby. Poprzednie przykłady gier dają podstawę do stwierdzenia, że istnienie strategii prowadzącej do wygranej gracza rozpoczynającego zależy od związku liczby L z liczbą t.

Intuicja, rozwinięta omówionymi powyżej grami, dobrze podpowiada odpowiednie twierdzenie i jego dowód. Zamiast je tu przedstawiać, dokonamy dalszego uogólnienia i dopiero wtedy podamy pełne rozumowanie, uzasadniające prawdziwość postawionych hipotez.

Gra 5: bieg do liczby naturalnej L

Przyjmijmy, że X jest niepustym, skończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych dodatnich, co najmniej dwuelementowym. Niech ponadto będzie ustalona liczba naturalna L, taka że $L \geqslant \min X + \max X$. Dwaj gracze A i B wybierają na przemian po jednej liczbie ze zbioru X ze zwracaniem, ta sama liczba może być więc wielokrotnie wybierana. Niech $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ oznacza ciąg liczb wybieranych przez graczy A i B, przy czym jeśli gracz A rozpoczyna grę, to kolejnymi wybieranymi przez niego liczbami są x_1, x_3, x_5 itd., natomiast x_2, x_4, x_6 itd. są liczbami kolejno wybieranymi przez gracza B. Gra kończy się wygraną tego z graczy, który wybrał liczbę x_n, taką że $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant L$. Inaczej mówiąc, wygrywa ten z graczy, który pierwszy „osiągnie" liczbę L lub liczbę od niej większą poprzez dodawanie wszystkich uprzednio wybranych liczb. Przyjmijmy oznaczenie $\mathbb{N}_k = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Udowodnimy

Twierdzenie 1
Niech $a \in \mathbb{N}_1$, $k \in \mathbb{N}_1$, $X = \{a, a+1, a+2, \ldots, a+k\}$, $L \in \mathbb{N}$ oraz $L \geqslant 2a+k$. Wówczas

(1) jeżeli reszta z dzielenia L przez $2a+k$ należy do zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, a+k\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza rozpoczynającego grę „bieg do liczby L"

(2) jeżeli reszta z dzielenia L przez $2a+k$ należy do zbioru $\{0, a+k+1, a+k+2, \ldots, 2a+k-1\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza, który nie rozpoczyna gry.

Dowód. Niech r oznacza resztę z dzielenia L przez $2a+k$, $L = t(2a+k)+r$, gdzie $t, r \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, \ldots, 2a+k-1\}$.

(1) Przyjmijmy najpierw, że

$$r \in \{a, a+1, a+2, \ldots, a+k\} = X.$$

Wtedy strategią wygrywającą gracza A rozpoczynającego grę jest wybranie w pierwszym ruchu liczby r, a w każdym następnym liczby $2a+k-b$, gdzie b oznacza liczbę wybraną przez gracza B w poprzednim kroku (liczbę dopiero co wybraną przez gracza B). Z warunku

$$L = t \cdot (2a+k) + r$$

wynika, że gracz A osiągnie jako pierwszy liczbę L w $t+1$ ruchu.

Rozważmy teraz przypadek: $r \in \{1, 2, \ldots, a-1\}$. W przypadku tym strategią wygrywającą gracza A rozpoczynającego grę jest wybór w pierwszym ruchu liczby a, natomiast w każdym następnym liczby $2a+k-b$, gdzie b oznacza liczbę wybraną w poprzednim kroku przez gracza B. W takiej sytuacji po t ruchach gracza A suma liczb wybranych przez obu graczy będzie równa $a + (2a+k)(t-1)$, czyli liczbie $(2a+k)t + r - (a+k) - r$, która jest równa $L - (a+k) - r$.

Wobec tego po następnych ruchach gracza B oraz gracza A gra zakończy się sukcesem gracza A.

(2) Przyjmijmy teraz, że $r = 0$; wtedy $L = t(2a+k)$ dla pewnego $t \in \mathbb{N}_1$. Łatwo zauważyć, że jeśli gracz A rozpoczyna grę, to strategią wygrywającą gracza B będzie wybór liczby $2a+k-c$, gdzie c jest liczbą uprzednio wybraną przez gracza A.

Niech w końcu $r \in \{a+k+1, a+k+2, \ldots, 2a+k-1\}$. Jest oczywiste, że w tym przypadku istnieje strategia wygrywająca gracza B, który nie rozpoczyna gry. Wystarczy bowiem, by gracz B za każdym razem wybierał liczbę $2a+k-c$, gdzie c jest liczbą uprzednio wybraną przez gracza A.

Dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Przed dokonaniem dalszych uogólnień wprowadzimy pojęcie zbioru strategicznie przyjaznego, przydatne przy prowadzeniu rozumowań i ich zapisywaniu.

Definicja

Niepusty skończony podzbiór X zbioru liczb naturalnych dodatnich nazywamy strategicznie przyjaznym, gdy

$$\forall_{x\in X}\exists_{y\in X}\ x+y=\min X+\max X.$$

Przykłady zbiorów strategicznie przyjaznych:

(1) $\{1,2,3,\ldots,n\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_2$,

(2) $\{1,3,5,\ldots,2n+1\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_1$,

(3) $\{2,4,6,\ldots,2n\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_2$,

(4) $\{a,a+1,a+2\ldots,a+k\}$, gdzie $a\in\mathbb{N}_1,\ k\in\mathbb{N}_1$,

(5) $\{a,a+d,a+2d\ldots,a+kd\}$, gdzie $a\in\mathbb{N}_1,\ d\in\mathbb{N}_1\ k\in\mathbb{N}_1$,

(6) $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{2,n-1\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_3$,

(7) $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{2,3,n-2,n-1\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_6$.

Nie są zbiorami strategicznie przyjaznymi np.: $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{t\}$, gdzie $n\in\mathbb{N}_2$ i jest liczbą parzystą, a $t\in\{2,3,\ldots,n-1\}$.

Twierdzenie 2

Niech X będzie zbiorem strategicznie przyjaznym, $\min X=m$, $\max X=M$, $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_s\}$ *oraz* $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_s$, $m\geqslant\max\{x_{i+1}-x_i\colon i\in\{1,2,\ldots,s-1\}\}$, $L\in\mathbb{N}$, $L\geqslant m+M$. *Wówczas w grze „bieg do liczby L”:*

(1) jeżeli reszta z dzielenia L przez $m+M$ należy do zbioru $\{1,2,\ldots,M\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza rozpoczynającego grę,

(2) jeżeli reszta z dzielenia L przez $m+M$ należy do zbioru $\{0,M+1,M+2,\ldots,M+m-1\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza, który nie rozpoczyna gry.

Dowód. Niech r oznacza resztę z dzielenia L przez $M+m$, $L=t(M+m)+r$, gdzie $t,r\in\mathbb{N}$, $r\in\{0,1,\ldots,M+m-1\}$. Symbolem $(y_1,y_2,\ldots)$ oznaczmy ciąg liczb kolejno wybieranych ze zbioru X przez graczy A oraz B.

Przyjmijmy najpierw, że $r\in\{1,2,\ldots,M\}$. Strategią wygrywającą gracza A rozpoczynającego grę jest wybór liczb, kolejno, $y_1,y_3,y_5,\ldots$ ze zbioru X według schematu:

$y_1 = \min\{d \in X : r \leqslant d\}$,
$y_3 = m + M - y_2$, gdzie y_2 jest liczbą wybraną przez gracza B w jego pierwszym ruchu,
$y_5 = m + M - y_4$, gdzie y_4 jest liczbą wybraną przez gracza B w jego drugim ruchu, itd,
czyli ogólnie
$y_{2i+1} = m + M - y_{2i} \in X$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, gdy $y_{2i} \in X$, ponieważ X jest zbiorem strategicznie przyjaznym.

Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^{2t+1} y_i = y_1 + t(m + M) \geqslant L,$$

natomiast w poprzednim ruchu gracz B może uzyskać co najwyżej

$$\sum_{i=1}^{2t-1} y_i + M, \quad \text{czyli} \quad y_1 + (t-1)(m + M) + M,$$

a więc

$$L + y_1 - r - m.$$

Wystarczy jeszcze udowodnić, że $L + y_1 - r - m < L$.
Gdy $r \in \{1, 2, \ldots, m - 1\}$ jest to oczywiste, bo $y_1 = m$.
Gdy $r \in \{m, m + 1, \ldots, M\}$ z przyjętego założenia

$$m \geqslant \max\{x_{i+1} - x_i : i \in \{1, 2, \ldots, s - 1\}\}$$

wynika, że

$$y_1 - r - m \leqslant -1,$$

co kończy ten fragment rozumowania.

Niech teraz $r \in \{0, M+1, M+2 \ldots, M+m-1\}$. Oznaczmy kolejne wybierane przez gracza A liczby symbolami: $y_1, y_3, y_5, \ldots$ Strategią wygrywającą gracza B jest wybór liczby ze zbioru X według reguły

$$y_{2i} = m + M - y_{2i-1} \quad \text{dla} \quad i \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Wystarczy zauważyć, że
(1) dla $r = 0$ mamy

$$\sum_{i=1}^{2t} y_i = t(m + M) = L,$$

a gracz A w swoim ostatnim ruchu uzyska co najwyżej liczbę

$$\sum_{i=1}^{2t-2} y_i + M \quad \text{czyli} \quad (t-1)(m + M) + M,$$

która jest mniejsza od L,

(2) dla $r \in \{M+1, \ldots, M+m-1\}$ mamy

$$L = t(m+M) + r, \quad \text{gdzie} \quad r > M, \ \sum_{i=1}^{2t} y_i = t(m+M)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{2t} y_i + M < L \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{2t+2} y_i = L - r + m + M > L.$$

Oznacza to wygraną gracza B.

Oczywiście twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 2.

II.

W tej części artykułu opiszemy gry analogiczne pod wieloma względami do gier omówionych wcześniej, różniące się tylko i aż tym, że liczby wybierane przez graczy A i B należą do pewnego przedziału obustronnie otwartego.

Gra 6: bieg do liczby naturalnej L przy wyborze liczb z przedziału $(0,3)$, gdzie $L > 3$

Ustalmy, że gracze A i B mogą wybierać liczby z przedziału $(0,3)$, a gracz A rozpoczyna grę.

Gdy pierwszym ruchem, tzw. ruchem otwarcia, gracza A jest wybór liczby 1, gracz B wybierając liczbę $x_2 \in (0,3)$ może uzyskać jako sumę liczb dotychczas wybranych każdą liczbę należącą do przedziału $(1,4)$. Widać już strategię wygrywającą gracza A, gdy L jest liczbą 4 lub 7 lub ogólnie – liczbą postaci $1+3t$, gdzie $t \in \mathbb{N}$. W swoim drugim ruchu gracz A może bowiem wybrać taką liczbę $x_3 \in (0,3)$, że $1 + x_2 + x_3 = 4$. Po wyborze jakiejkolwiek liczby $x_4 \in (0,3)$ przez gracza B suma $1 + x_2 + x_3 + x_4$ należy do przedziału $(4,7)$. Gracz A może teraz wybrać taką liczbę $x_5 \in (0,3)$, że suma dotychczas wybranych liczb (przez obu graczy) będzie równa 7. Tak postępując, gracz A może uzyskać jako pierwszy każdą z liczb postaci $1 + 3t$, gdzie $t \in \mathbb{N}$.

Gdy pierwszym ruchem gracza A jest liczba 2 może on (wybierając liczby analogicznie jak powyżej) jako pierwszy osiągnąć każdą liczbę postaci $2+3t$, gdzie $t \in \mathbb{N}$.

Gdy L jest liczbą podzielną przez 3, istnieje strategia wygrywająca gracza B. Gdy ruchem otwarcia gracza A jest wybór liczby a z przedziału $(0,3)$, gracz B może w swoim pierwszym ruchu wybrać taką liczbę $x_2 \in (0,3)$, że $a+x_3 = 3$. Niezależnie od drugiego ruchu gracza A, w swoim drugim ruchu gracz B może wybrać taką liczbę $x_4 \in (0,3)$, że suma liczb dotychczas wybranych (przez obu graczy) jest równa 6. Postępując według tego schematu gracz B może jako pierwszy osiągnąć każdą liczbę postaci $3t$, gdzie $t \in \mathbb{N}_1$.

Gra 7: bieg do liczby naturalnej L przy wyborze liczb z przedziału $(0, k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}_2,\ L > k$

Rozumując tak jak w grze poprzedniej, nietrudno pokazać, że istnieje strategia wygrywająca gracza A, gdy L jest postaci $1 + ks$ lub $2 + ks$ lub $\ldots k - 1 + ks$, gdzie $s \in \mathbb{N}$.

Istnieje strategia wygrywająca gracza B, gdy L jest liczbą podzielną przez k.

Gra 8: bieg do liczby rzeczywistej L przy wyborze liczb z przedziału $(0, 3)$, gdzie $L > 3$

Przyjmijmy najpierw, że $L = \sqrt{2} + 7$.

Oczywiście $\sqrt{2} + 7 = \sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 3$. Strategią wygrywającą gracza A jest wybór w ruchu otwarcia liczby $1 + \sqrt{2}$. Gracz B wybierając liczbę $x_2 \in (0, 3)$, uzyska jako sumę dwóch liczb dotychczas wybranych liczbę należącą do przedziału $(1 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$. W swoim drugim ruchu gracz A może wybrać taką liczbę $x_3 \in (0, 3)$, że

$$1 + \sqrt{2} + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2}.$$

Po wyborze przez gracza B liczby x_4 z przedziału $(0, 3)$ suma

$$1 + \sqrt{2} + x_2 + x_3 + x_4$$

należy do przedziału $(4 + \sqrt{2}, 7 + \sqrt{2})$. Teraz gracz A może wykonać zwycięski wybór, po którym uzyska $\sqrt{2} + 7$.

Przyjmijmy teraz, że $L = \sqrt{17}$. Jaki ruch otwarcia ma wykonać gracz A, by wygrać? Zauważmy, że $\sqrt{17} = \sqrt{17} - 4 + 4 = \sqrt{17} - 3 + 3,\ \sqrt{17} - 3 \in (0, 3)$. Wystarczy, by w pierwszym ruchu gracz A wybrał liczbę $\sqrt{17} - 3$ i w kolejnym ruchu uzyska już $\sqrt{17}$.

Gdy $L = \sqrt{103}$ ruchem otwarcia gracza A w jego strategii wygrywającej jest $\sqrt{103} - 9$, bowiem $\sqrt{103} = \sqrt{103} - 10 + 10 = \sqrt{103} - 9 + 3 \cdot 3$, a $\sqrt{103} - 9 \in (0, 3)$.

Gra 9: bieg do liczby rzeczywistej L przy wyborze liczb z przedziału $(0, t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N},\ L > t$

Przyjmijmy najpierw, że L nie jest naturalną wielokrotnością liczby t. Zauważmy, że $L = L - nt + nt$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $L - nt \in (0, t)$. Istnieje w tym przypadku strategia wygrywająca gracza A, który w ruchu otwarcia wybiera liczbę $L - nt$. Gdy gracz B wybierze liczbę $x_2 \in (0, t)$, gracz A może po swoim drugim wyborze uzyskać sumę $L - (n - 1)t$. Zatem po n wyborach gracz A może uzyskać jako pierwszy liczbę L.

Gdy L jest wielokrotnością naturalną liczby t, istnieje strategia wygrywająca gracza B.

III.

Przed sformułowaniem kilku gier analogicznych do gier 1, 2, 3 lub od nich ogólniejszych, w których mowa o elementach wybieranych z grup uporządkowanych liniowo i mających własność Archimedesa, przypomnimy przydatne przy prowadzeniu dalszych rozumowań wiadomości o grupach uporządkowanych.

Strukturę algebraiczno-porządkową $(G, +, \leqslant)$ nazywamy grupą uporządkowaną, gdy

(1) $(G, +)$ jest grupą,

(2) $\leqslant$ jest częściowym porządkiem w G,

(3) $\forall_{x,y,z\in G}\ [x \leqslant y \Longrightarrow (x+z) \leqslant (y+z) \wedge (z+x) \leqslant (z+y)]$.

Grupę uporządkowaną $(G, +, \leqslant)$ nazywamy grupą uporządkowaną liniowo, gdy relacja $\leqslant$ jest spójna w G.

W grupie uporządkowanej $(G, +, \leqslant)$ przyjmujemy, że $x < y \Longleftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y$.

W grupie uporządkowanej $(G, +, \leqslant)$ określamy zbiory: $G_0^+ := \{x \in G : 0 \leqslant x\}$, $G^+ := \{x \in G : 0 < x\}$.

Niech $(G, +, \leqslant)$ będzie grupą uporządkowaną i niech A będzie podgrupą grupy $(G, +)$. Wówczas A nazywamy podgrupą grupy uporządkowanej $(G, +, \leqslant)$, gdy $(A, ^+|_A, ^\leqslant|_A)$ jest grupą uporządkowaną, gdzie symbolami $^+|_A$ i $^\leqslant|_A$ oznaczono działanie $+$ i relację $\leqslant$ odpowiednio, zredukowane z G do A.

Jeżeli $(G, +, \leqslant)$ jest grupą uporządkowaną liniowo, to jej podgrupę H nazywamy

(1) ograniczoną z góry, gdy $\exists_{m\in G}\forall_{x\in H}\ x \leqslant m$,

(2) ograniczoną z dołu, gdy $\exists_{d\in G}\forall_{x\in H}\ d \leqslant x$,

(3) nieograniczoną z góry (z dołu), gdy nie jest ograniczona z góry (dołu).

Podgrupę H grupy $(G, +, \leqslant)$ uporządkowanej liniowo nazywamy podgrupą wypukłą, gdy $\forall_{a,b\in H}\forall_{x\in G}\ (a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in H)$.

Jeżeli grupa uporządkowana liniowo nie ma podgrup wypukłych właściwych, to mówimy, że ma ona własność Archimedesa. Grupę taką nazywamy grupą archimedesowską.

Nietrudno udowodnić następujące twierdzenie: jeżeli $(G, +, \leqslant)$ jest grupą uporządkowaną liniowo, to następujące warunki są równoważne

(1) $(G, +, \leqslant)$ ma własność Archimedesa,

(2) każda niejednoelementowa podgrupa grupy $(G, +, \leqslant)$ jest nieograniczona,

(3) każda podgrupa cykliczna grupy $(G, +)$, generowana przez niezerowy element z G jest nieograniczona w $(G, +, \leqslant)$,

(4) $\forall_{x,y\in G}\ (0 < y \wedge 0 < x \Longrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}_1}\ y < nx)$.

Można wykazać, że grupa archimedesowska jest abelowa (Lenz, 1968, s. 103).

Odwzorowanie $\phi : G_1 \to G_2$ nazywamy izomorfizmem monotonicznym grupy uporządkowanej $(G_1, +_1, \leqslant_1)$ na grupę uporządkowaną $(G_2, +_2, \leqslant_2)$, gdy ϕ jest izomorfizmem grupy $(G_1, +_1)$ na grupę $(G_2, +_2)$ oraz $\forall_{a,b\in G_1}\ (a \leqslant_1 b \Longleftrightarrow \phi(a) \leqslant_2 \phi(b))$.

Grupy uporządkowane nazywamy izomorficznymi monotonicznie, gdy istnieje izomorfizm monotoniczny jednej z nich na drugą.

Można udowodnić, że każda grupa archimedesowska jest izomorficzna monotonicznie z pewną podgrupą grupy $(\mathbb{R},+,\leqslant)$ (Kurosz, 1965, s. 325-328).

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 3
Jeżeli $(G,+,\leqslant)$ *jest grupą archimedesowską, to*

$$\forall_{x,y\in G^+}\exists_{n\in\mathbb{N}}\exists_{r\in G_0^+}\ y=nx+r, \quad \textit{gdzie} \quad r<x.$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $x,y\in G^+$.

Gdy $y<x$, to wystarczy zauważyć, że $y=0\cdot x+y$.

Gdy $x\leqslant y$, to $y\leqslant \tilde{n}x$ dla pewnego $\tilde{n}\in\mathbb{N}$ (bo grupa $(G,+,\leqslant)$ jest archimedesowska). W przypadku $\tilde{n}x=y$ wystarczy zauważyć, że $y=\tilde{n}x+0$, a $0<x$.

Niech teraz $y<\tilde{n}x$. Przyjmijmy, że $\tilde{n}$ jest najmniejszą liczbą naturalną w zbiorze $\{m\in\mathbb{N}:y<mx\}$. Połóżmy $n=\tilde{n}-1$, $r=y-nx$. Wtedy oczywiście $y=nx+r$. Wystarczy jeszcze wykazać, że $0\leqslant r<x$.

Najpierw pokażemy, że $0\leqslant r$. Gdyby $r<0$, to mielibyśmy $y-nx<0$, $y-nx+nx<nx$, $y<nx$, $y<(\tilde{n}-1)x$. Otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkiem określającym liczbę $\tilde{n}$. Wobec tego $0\leqslant r$.

Pokażemy teraz, że $r<x$. Gdyby $x\leqslant r$, to mielibyśmy $x\leqslant y-nx$, $x+nx\leqslant y-nx+nx$, $(n+1)x\leqslant y$, $\tilde{n}x\leqslant y$. Otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkiem $\tilde{n}x>y$. Wobec tego $r<x$.

To kończy dowód twierdzenia 3.

Niech $(G,+,\leqslant)$ będzie grupą archimedesowską, $y,x\in G^+$, $y=nx+r$, gdzie $r\in G_0^+$, $r<x$. Wówczas element r będziemy nazywać resztą archimedesowską pary (y,x) i oznaczać symbolem $r_A(y,x)$.

Wprowadzimy teraz przydatne pojęcie zbioru strategicznie przyjaznego.

Niech $(G,+,\leqslant)$ będzie grupą archimedesowską, $X\subset G_0^+$. Wówczas zbiór X nazywamy strategicznie przyjaznym w grupie archimedesowskiej, gdy spełnia warunki:

(1) $\exists_{m\in X}\ m=\min X, \quad \exists_{M\in X}\ M=\max X$,

(2) $\forall_{x\in X}\exists_{y\in X}\ x+y=\min X+\max X$,

(3) $\forall_{s\in G}\ 0<s<\max X\Longrightarrow\exists_{y\in X}\ y=\min\{x\in X:s\leqslant x\}$,

(4) $\forall_{s\in G}\forall_{L\in G_+}0<s<\max X\Longrightarrow\min\{x\in X:s\leqslant x\}<r_A(L,\min X+\max X)+\ \min X$.

Przykłady zbiorów strategicznie przyjaznych w grupie archimedesowskiej $(\mathbb{R},+,\leqslant)$:

1. $\{a,a+d,a+2d,\ldots,a+kd\}$, gdzie $a\in\mathbb{N}_1$, $d\in\mathbb{N}_1$, $k\in\mathbb{N}_1$,
2. $[2,9]$,

3. $[2,3] \cup [4,5]$,
4. $[2,3] \cup [5,6]$,
5. $[1,2] \cup [3,5] \cup [6,7]$.

Nie są zbiorami strategicznie przyjaznymi np. $(1,2) \cup (3,4)$, $[1,2] \cup [4,5]$, $[2,3] \cup [6,7]$.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 4

Niech $(G, +, \leqslant)$ będzie grupą archimedesowską, X-zbiorem strategicznie przyjaznym w tej grupie, $m = \min X$, $M = \max X$, $L \in G$, $m + M \leqslant L$. Wówczas w grze „bieg do liczby L”:

(I) jeśli reszta archimedesowska r pary $(L, m+M)$ należy do zbioru $\{x \in G^+ : x \leqslant M\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza rozpoczynającego grę,

(II) jeśli reszta archimedesowska r pary $(L, m+M)$ należy do zbioru $\{0\} \cup \{x \in G : M < x < m + M\}$, to istnieje strategia wygrywająca gracza, który nie rozpoczyna gry.

Dowód. Przyjmijmy, że grają A i B, A rozpoczyna grę, $L = n(m+M) + r$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < m + M$.

(I) Niech ponadto $r \in \{x \in G^+ : x \leqslant M\}$.

Strategią wygrywającą gracza A jest wybór kolejno elementów:

$x_1 = \min\{x \in X : r \leqslant x\}$,

$x_3 = m + M + (-x_2)$, gdzie x_2 jest elementem wybranym przez gracza B w jego pierwszym ruchu,

$x_5 = m + M + (-x_4)$, gdzie x_4 jest elementem wybranym przez gracza B w jego drugim ruchu itd., czyli ogólnie

$x_{2i+1} = m + M + (-x_{2i})$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie x_{2i} jest elementem wybranym przez gracza B w jego i-tym ruchu.

Zauważmy, że elementy $x_1, x_3, \ldots, x_{2n+1}$ należą do X na mocy warunków (2) i (3) definicji zbioru strategicznie przyjaznego w grupie archimedesowskiej. Ponadto

$$\sum_{i=1}^{2n+1} x_i = x_1 + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2n} + x_{2n+1}) = x_1 + n(m+M) \geqslant L,$$

natomiast w poprzednim ruchu gracz B może uzyskać co najwyżej

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i + M, \quad \text{czyli} \quad x_1 + (n-1)(m+M) + M,$$

a więc

$$L + (-r) + (-m) + x_1.$$

Wystarczy jeszcze pokazać, że $(-r)+(-m)+x_1<0$ czyli, że $x_1<r+m$. Ale ta ostatnia nierówność to założony warunek (4) o zbiorze X.

(II) Niech teraz reszta archimedesowska r pary $(L, m+M)$ należy do zbioru

$$\{0\} \cup \{x \in G : M < x < m+M\}.$$

Oznaczmy kolejne elementy wybierane przez gracza A symbolami $x_1, x_3, x_5, \ldots$ Strategią wygrywającą gracza B jest wybór elementów według następującego przepisu: $x_{2i} = m + M - x_{2i-1}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots\}$.

Wystarczy zauważyć, że dla $r = 0$ oczywiście

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = n(m+M) = L,$$

a gracz A po swoim ostatnim ruchu uzyska co najwyżej sumę

$$\sum_{i=1}^{2n-2} x_i + M, \quad \text{czyli} \quad (n-1)(m+M)+M,$$

która jest równa $L-m$, a więc mniejsza od L.

Gdy natomiast $r \in \{x \in G : M < x < m+M\}$, to

$$\sum_{i=1}^{2n+2} x_i = (n+1)(m+M) = n(m+M)+m+M > L-r+m+M > L,$$

a gracz A po swoim ostatnim ruchu uzyska co najwyżej sumę

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i + M, \quad \text{czyli} \quad L-r+M,$$

która jest mniejsza od L. Oznacza to wygraną gracza B.

IV.

Na przykładzie powyżej przedstawionego materiału, zawierającego kilka powiązanych ze sobą rezultatów z matematyki elementarnej, postaramy się powiedzieć o możliwościach wzbogacenia procesu nauczania matematyki w szkołach różnych szczebli, w tym na studiach kształcących przyszłych nauczycieli matematyki. Wyróżnienie poziomów nauczania jest konieczne ze względu na oczywiste różnice w możliwościach percepcyjnych uczących się. Wspólne dla wszystkich etapów nauczania matematyki jest dążenie do wyzwalania różnych aktywności matematycznych uczniów.

Trudno nauczycielowi matematyki wykorzystać „czystą” matematykę poznaną z książek lub artykułów na lekcjach, głównie z braku czasu, który musiałby poświęcić na ułożenie scenariuszy lekcji, stworzenie pomocy naukowych czy tylko na napisanie ciągów powiązanych ze sobą zadań dla uczniów. Ten czas ma, musi mieć student matematyki, deklarujący chęć napisania pracy dyplomowej z dydaktyki matematyki. Nurt takich prac mógłby być interesujący i dla twórczych matematyków, szczególnie dla tych, którzy zainteresowali się pisaniem podręczników.

Jakie pytania mógłby postawić sobie student, piszący pracę z dydaktyki matematyki na temat opisanych powyżej gier, które miałyby być wykorzystywane w nauczaniu matematyki w szkole średniej?
W szczególności:

1. Czy sformułowanie reguł gry 1 jest zrozumiałe?
2. Czy gra 1 jest dla uczniów szkół średnich dostatecznie interesująca, by zachęcić ich do gry, a następnie do próby rozstrzygnięcia, czy jest sprawiedliwa w tym sensie, że daje równe szanse każdemu z graczy (czyli czy nie jest w sytuacji uprzywilejowanej np. gracz rozpoczynający grę)?
3. Czy w przypadku, gdy uczniowie nie znajdą samodzielnie (w jakim czasie?) odpowiedzi na pytania (2) postawione wyżej, mają oni wyrobiony odruch, by uprościć postawiony problem przez zmianę liczby 33 na mniejszą?
4. Czy uczniowie, po odkryciu strategii wygrywającej gracza rozpoczynającego grę 1, potrafią zmienić reguły gry 1 tak, by odkrytą strategię udało się zaadaptować do nowej sytuacji? Czy potrafią dostrzec ograniczenia tej adaptacji?
5. Czy uczniowie sami lub po pewnej sugestii nauczyciela (jakiej? jak dużej?) potrafią zaproponować sposoby czytelnego zapisywania przebiegu konkretnej partii gry 1 (czy też gier 2, 3), np. w postaci ciągów liczb wybieranych przez grających. Czy uznają, po kilku takich kodowaniach przebiegu gry, że warto z ciągiem wybieranych liczb związać ciąg kolejnych sum zbliżających się do 33?
6. Czy uczniowie sami lub po sugestii (jakiej? np. o związku z grami planszowymi) zaprojektują planszę, na której liczby $1, 2, \ldots, 33$ byłyby wpisane w kolejne pola ułożonych w ciąg kwadracików. Każdy z graczy A, B przesuwałby pionek w „kierunku liczby 33” o tyle pól, jaką liczbę wybrałby spośród dozwolonych do wyboru. Może na planszy dostosowanej do wielu analogicznych gier kolejne kwadraty miałyby numery $1, 2, \ldots, 200$, a „metę” (czyli liczbę, do której zmierzamy, by ją osiągnąć lub przekroczyć) można byłoby ustawiać dowolnie, w zakresie do 200.
7. Czy związek strategii wygrywającej z dzieleniem liczby naturalnej przez dodatnią liczbę naturalną z resztą jest do odkrycia przez uczniów, a jeśli nie, to czy jest do zrozumienia rozumowanie przedstawiające ten związek? Czy takie rozumowanie przedstawione dla gry 1 uczniowie szkoły średniej potrafią „przenieść” do sytuacji gry 2, a może i do sytuacji ogólnej – gry, w której liczbą do osiągnięcia jest L, a liczby mogą być wybierane przez graczy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, t\}$?

Dla uzyskania choćby częściowych odpowiedzi na te pytania niezbędne byłoby zaplanowanie i przeprowadzenie szeregu eksperymentów. Naturalnym eksperymentem byłoby np. przeprowadzenie lekcji według autorskiego scenariusza i analiza bardzo szczegółowego sprawozdania z tej lekcji. Równie naturalne byłoby zaplanowanie i przeprowadzenie obserwacji grających dwóch uczniów, od etapu poznawanie przez nich reguł gry, poprzez próby gry, zbieranie doświadczeń, formułowanie wątpliwości, stawianie hipotez, próby weryfikacji hipotez, itp. W planie takiej obserwacji student–badacz winien uwzględnić możliwość stawiania pytań (zaplanować listę takich pytań oraz mieć świadomość, że konkretna obserwacja mogłaby wymagać postawienia pytań spoza tej listy).

Wzorcem do organizacji badań, sposobu analizy uzyskanych materiałów i formułowania wniosków z przeprowadzonych eksperymentów dydaktycznych mógłby być artykuł H. Pieprzyk (1985) „Gra jako pomoc dydaktyczna w kształceniu rozumowania redukcyjnego u uczniów klasy IV".

Coraz trudniej wyzwalać aktywności matematyczne uczniów na lekcjach matematyki, bo dla nich wynalazki mające swą realizację w nowoczesnym sprzęcie są bardziej fascynujące i porywające od matematyki. Zrozumienie ich istoty przekracza najczęściej możliwości użytkowników. W świecie matematyki jest zupełnie odwrotnie – i to jest jego potęgą i przyszłością – tak niewiele potrzeba, by uzyskać tak wiele i często z pełnym zrozumieniem.

Literatura

Kurosz, A. G.: 1965, *Algebra ogólna*, PWN, Warszawa.

Lenz, H.: 1968, *Matematyka elementarna z wyższego stanowiska*, PWN, Warszawa.

Pieprzyk, H.: 1985, Gra jako pomoc dydaktyczna w kształceniu rozumowania redukcyjnego u uczniów klasy IV, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **5**, 7-59.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail alomnicki@poczta.fm
e-mail jangorowski@interia.pl