FOLIA 141

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia V (2013)

Maciej Major, Barbara Nawolska

Nowe spojrzenie na gry Penneya*

Abstract. The problem of gaming is an important part of the educational process on all levels of Mathematics teaching. In this work we present certain stochastic problems, based on the so-called Penney games. It provides the opportunity to formulate new problems and to construct the tools needed to solve them. This process is accompanied by a variety of mathematical activities.

1. Wstęp

Problematyka gier była i jest nadal ważnym elementem procesu edukacyjnego na każdym szczeblu kształcenia matematycznego. Rywalizacja towarzysząca każdej grze dostarcza silnych motywacji do rozwiązywania różnorodnych problemów logicznych i matematycznych. Przy rozwiązywaniu problemów inspirowanych grami ujawniają się różnorodne aktywności matematyczne, których rozwijanie jest jednym z ważniejszych celów edukacji matematycznej. Można powiedzieć, że działalność matematyczna jest szczególnym rodzajem aktywności polegającej na rozwiązywaniu problemów. Z tym procesem wiąże się formułowanie matematycznego zadania, poszukiwanie narzędzi jego rozwiązywania wśród już znanych matematycznych pojęć i metod, odkrywanie oraz konstruowanie nowych, do tej pory nieznanych narzędzi, rozwiązywanie problemu, weryfikacja poprawności kolejnych etapów rozwiązywania, poszukiwanie prostszych dróg rozwiązania (np. przez przejście do innego modelu), uogólnianie problemu, odkrywanie analogii, wnioskowania przez symetrie, izomorfizmy i analogie itp. (por. Legutko, 1987).

W niniejszej pracy prezentujemy pewną problematykę stochastyczną, powstałą na tle tak zwanych gier Penneya, i stwarzającą okazję do formułowania nowych problemów (poprzez uogólnienie) i konstruowania narzędzi ich rozwiązywania. Procesowi temu towarzyszą różnorodne aktywności matematyczne.

Praca bazuje na pewnym dydaktycznym ujęciu teorii przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych, adresowanym do studentów matematyki sekcji nauczycielskich (Płocki, 1997a; Płocki, 2011; Płocki, 2005b; Płocki, 2005a; Major, Nawol-

*A new look at Penney games

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97C30

Key words and phrases: Penney game, mathematical activity

ska, 1999b). Skończone przestrzenie probabilistyczne (w tym przestrzenie klasyczne) stanowią tylko mały fragment tego ujęcia rachunku prawdopodobieństwa. Proponujemy zatem inną definicję prawdopodobieństwa, która służy do obliczania prawdopodobieństwa każdego zdarzenia w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej.

2. Gra Penneya a czekanie na serie orłów i reszek

Na wstępie, korzystając z prac A. Płockiego (1997a; 1997b; 2004) oraz M. Majora i B. Nawolskiej (1999b) wyjaśnimy kilka niezbędnych pojęć.

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. *Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω nazywamy każdą funkcję p określoną na zbiorze Ω, nieujemną i taką, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(\omega_j) = 1.$$

Parę (Ω, p) nazywamy *ziarnistą* (*dyskretną*) *przestrzenią probabilistyczną.*

Niech (Ω, p) będzie przestrzenią probabilistyczną ziarnistą. Jeżeli Ω jest zbiorem możliwych wyników pewnego doświadczenia losowego, a funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie może zakończyć się tym wynikiem, to tę przestrzeń nazywamy *modelem probabilistycznym* wspomnianego doświadczenia. Taka przestrzeń opisuje wówczas (modeluje) to doświadczenie losowe. Mówimy, że jest ona *zgodna* z tym doświadczeniem losowym.

Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$. *Prawdopodobieństwem* w przestrzeni (Ω, p) nazywamy każdą funkcję $P\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną następująco:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \displaystyle\sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Liczbę $P(A)$ nazywamy *prawdopodobieństwem zdarzenia A*. *Przestrzenią probabilistyczną* nazywamy także trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, gdzie $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$, P zaś jest prawdopodobieństwem na $\mathcal{Z}$ w sensie powyższej definicji.

Rozważmy rzut monetą (symetryczną). Doświadczenie to ma dwa jednakowo możliwe wyniki, które kodujemy literą r, gdy wypadnie reszka, zaś literą o, gdy wypadnie orzeł. Zbiór $\{o, r\}$ jest więc zbiorem jednakowo możliwych wyników rzutu monetą. Ponieważ wyniki doświadczeń wieloetapowych kodujemy jako ciągi wyników kolejnych etapów, więc wynik k-krotnego rzutu monetą jest k-wyrazową wariacją[1] zbioru $\{o, r\}$ (jej j-ty wyraz to kod wyniku j-tego rzutu monetą).

Każdy wynik k-krotnego rzutu monetą, dla $k \geqslant 1$, nazywamy *serią orłów i reszek.* Liczbę k nazywamy *długością serii.*

Niech a będzie ustaloną serią orłów i reszek o długości k. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki k ostatnich rzutów utworzą serię a, nazywamy *czekaniem na serię a orłów i reszek* i oznaczamy δ_a.

[1] zwaną też wariacją z powtórzeniami

Jeśli czas trwania doświadczenia δ_a odmierzać liczbą wykonanych rzutów monetą, to jest on zmienną losową. Oznaczmy ją przez T_a. Można zatem mówić o jej wartości oczekiwanej, a więc o średnim czasie czekania $E(T_a)$ na serię a.

Niech a i b będą ustalonymi seriami orłów i reszek o długości k. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki k ostatnich rzutów utworzą albo serię a, albo serię b, nazywamy *czekaniem na jedną z serii a, b orłów i reszek* i oznaczamy δ_{a-b}.

Doświadczenie δ_{a-b} jest doświadczeniem losowym wieloetapowym o losowej liczbie etapów, a więc można rozważać zmienną losową T_{a-b} będącą czasem jego trwania mierzonym liczbą wykonanych rzutów monetą oraz jej wartość oczekiwaną $E(T_{a-b})$, czyli średni czas trwania doświadczenia.

Zauważmy, że ciąg ω, którego wyrazami są elementy zbioru $\{o, r\}$ jest wynikiem czekania δ_{a-b} wtedy i tylko wtedy, gdy: ω jest ciągiem co najmniej k-wyrazowym i takim, że:

1° podciąg k jego ostatnich wyrazów tworzy serię a albo serię b,

2° żaden podciąg k kolejnych wcześniejszych wyrazów nie jest serią a, ani nie jest serią b.

Niech a i b będą ustalonymi seriami orłów i reszek o długości k. W grze z udziałem dwóch graczy G_1 i G_2 powtarzany jest rzut monetą tak długo, aż wyniki k ostatnich rzutów utworzą:

– albo serię a i wówczas zwycięża gracz G_1,

– albo serię b, i wówczas zwycięża gracz G_2.

Tego typu grę nazywamy grą Penneya (zob. Płocki, 2011, s. 135-136).

Można rozważać gry Penneya w sytuacji, gdy serie orłów i reszek są różnej długości lub gdy w grze bierze udział więcej niż dwóch graczy. Gra Penneya jest grą losową. Jest ona sprawiedliwa, gdy wszyscy gracze mają jednakowe szanse zwycięstwa.

Problematyka takich gier była prezentowana w (Major, Nawolska, 1999b; Major, Nawolska, 2006; Płocki, 2011; Płocki, 2005b; Kapela, 2002; Nawolska, 2002; Nawolska, 2002; Nawolska, 2008; Major, Nawolska, 1999a; Nawolska, Płocki, 2000).

W pracach tych przedstawiano wyniki badań dotyczących sprawiedliwości gier Penneya w zależności od rodzaju serii orłów i reszek, od ich długości oraz od średniego czasu czekania na każdą z serii oddzielnie.

Pierwsze przypuszczenia, że serie równej długości gwarantują sprawiedliwość gry, okazały się fałszywe.

Kolejna hipoteza, że równość średnich czasów czekania na każdą z serii z osobna jest wystarczającym kryterium sprawiedliwości gry, okazała się również fałszywa.

O pewnych uogólnieniach gier Penneya na serie sukcesów i porażek (rzut monetą zastąpiono próbą Bernoulliego) pisał I. Krech (1999; 2002). Autor tych prac badał, w jaki sposób sprawiedliwość uogólnionej gry zależy od rodzaju serii sukcesów i porażek, od długości tychże serii i od prawdopodobieństwa sukcesu. Wyniki zostały zebrane w pracy (Krech, 2006).

Kolejne uogólnienie gier Penneya polegało na zastąpieniu monety urną z kulami w trzech kolorach. Próba Bernoulliego została zastąpiona tu doświadczeniem o trzech możliwych wynikach (Krech, 2001).

3. Propozycja uogólnienia gier Penneya

W niniejszej pracy zaproponujemy kolejne – inne niż dotychczas – uogólnienie gry Penneya.

Ustalmy dwie serie orłów i reszek a oraz b, każda o długości k. Rozważmy grę z udziałem dwóch graczy G_1 i G_2. Każdy z graczy czeka na jedną z ustalonych serii, np. gracz G_1 na serię a, gracz G_2 na serię b. Gracze równocześnie rzucają monetami, każdy własną, i obserwują wyniki swoich rzutów. Równoczesny rzut monetami powtarzają tak długo, aż któryś z nich doczeka się swojej serii orłów i reszek i wówczas on zwycięża. Gdy obaj gracze jednocześnie doczekają się swoich serii, gra kończy się remisem. Opisaną grę oznaczmy symbolem $g_{a|b}$.

Zauważmy, że w tej wersji gry, inaczej niż ma to miejsce w przypadku oryginalnych gier Penneya czy też wspomnianych wcześniej uogólnień, gra może zakończyć się remisem. Ponadto, co wcześniej nie miało sensu, gracze mogą czekać na tę samą serię. W takim przypadku gra nie musi zakończyć się remisem – choć (co łatwo zauważyć) jest grą sprawiedliwą.

Symbolem $\delta_{a|b}$ oznaczmy doświadczenie przeprowadzane w grze $g_{a|b}$. Wyniki tego doświadczenia są parami ciągów $((a_n),(b_n))$ co najmniej k-wyrazowych o¨takiej samej liczbie n wyrazów. Pierwszy ciąg prezentuje wyniki kolejnych rzutów gracza G_1, drugi – gracza G_2. Ponadto k ostatnich wyrazów ciągu (a_n) tworzy serię a lub k ostatnich wyrazów ciągu (b_n) tworzy serię b.

Oznaczmy zbiór wyników doświadczenia $\delta_{a|b}$ symbolem $\Omega_{a|b}$. Jeśli $\omega \in \Omega_{a|b}$ i¨ω jest parą ciągów n-wyrazowych $((a_n),(b_n))$, gdzie $n \geqslant k$, to jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{4})^n$. Wynika stąd, że modelem[2] doświadczenia $\delta_{a|b}$ jest para $(\Omega_{a|b}, p_{a|b})$, gdzie $p_{a|b}$ jest funkcją określoną wzorem:

$$p_{a|b}(\omega) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla} \quad \omega \in \Omega_{a|b},$$

gdzie $|\omega|$ oznacza liczbę wyrazów ciągów zarówno (a_n) jak (b_n), czyli ich długość.

Z doświadczeniem losowym $\delta_{a|b}$ zwiążmy trzy zdarzenia:

$$A = \{\textit{doświadczenie } \delta_{a|b} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } a \ (\textit{serii gracza } G_1)\},$$

$$B = \{\textit{doświadczenie } \delta_{a|b} \textit{ zakończy się uzyskaniem serii } b \ (\textit{serii gracza } G_2)\},$$

$$R = \{\textit{doświadczenie } \delta_{a|b} \textit{ zakończy się równoczesnym uzyskaniem serii } a \textit{ oraz } b\},$$

które oznaczamy $A = \{\ldots a|*\}$, $B = \{\ldots *|b\}$ i $R = \{\ldots a|b\}$, a ich prawdopodobieństwa odpowiednio przez $P(\ldots a|*)$, $P(\ldots *|b)$ i $P(\ldots a|b)$.

Jeśli $P(\ldots a|*) = P(\ldots *|b)$, to serie a i b nazywamy *jednakowo dobrymi* i oznaczamy $a \approx b$.

Jeśli $P(\ldots a|*) > P(\ldots *|b)$, to serię a nazywamy *lepszą* od serii b i oznaczamy $a \gg b$.

W zbiorze serii orłów i reszek o długości k określone zostały zatem dwie relacje: $\approx$ i $\gg$.

---

[2] Zob. (Płocki, 2004), rozdział 2.

W grze $g_{a|b}$ zwycięży gracz G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie zdarzenie $A = \{\ldots a|*\}$. Zwycięstwo gracza G_2 jest równoznaczne z zajściem zdarzenia $B = \{\ldots *|b\}$. Jeśli zajdzie zdarzenie R, to gra kończy się remisem.

Jeśli $P(\ldots a|*) = P(\ldots *|b)$, to gra jest sprawiedliwa, serie a i b dają graczom równe szanse na zwycięstwo. Ten fakt tłumaczy nazwę *serie jednakowo dobre.*

Jeśli $P(\ldots a|*) > P(\ldots *|b)$, to seria a daje graczowi G_1 w grze $g_{a|b}$ większe szanse na zwycięstwo, niż seria b daje jego przeciwnikowi. Ten fakt tłumaczy zwrot *seria a jest lepsza od serii b.* Oczywiście, gra $g_{a|b}$ nie jest wówczas sprawiedliwa.

Rozstrzyganie sprawiedliwości gry $g_{a|b}$ sprowadza się do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń A i B w nieskończonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{a|b}, p_{a|b})$.

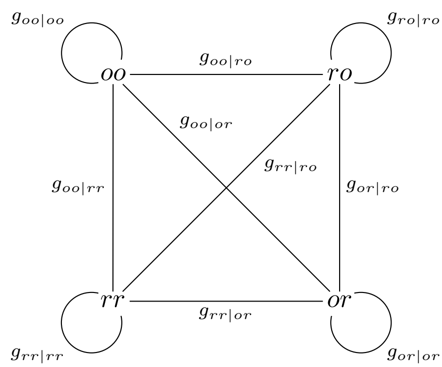
W dalszej części pracy pokażemy, jak w przypadku pewnych serii orłów i reszek można te prawdopodobieństwa wyznaczać.

Mamy 4 serie orłów i reszek długości 2. Są to: oo, rr, or, ro. Można zatem rozważyć 16 różnych gier typu $g_{a|b}$, gdzie a i b są seriami orłów i reszek długości 2. Z punktu widzenia analizy sprawiedliwości tych gier wystarczy rozważyć tylko 10 z nich, gdyż gry typu $g_{a|b}$ i $g_{b|a}$ można utożsamić (zob. tab. 1).

Tab. 1. Wszystkie istotnie różne gry $g_{a|b}$ dla serii orłów i reszek długości 2

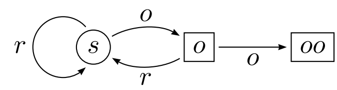
	oo	rr	or	ro
oo	×	×	×	×
rr		×	×	×
or			×	×
ro				×

Wszystkie rozważane gry można przedstawić za pomocą grafu – ryc. 1. Każda krawędź grafu prezentuje jedną z możliwych gier.



Ryc. 1. Graficzna prezentacja wszystkich różnych gier $g_{a|b}$ dla serii orłów i reszek długości 2

Na początek rozważmy grę $g_{oo|oo}$. Jak wspomniano wcześniej, taka gra jest sprawiedliwa. Wykażemy ten fakt, konstruując graf stochastyczny jako planszę do tej gry (zob. Major, Nawolska, 1999b, s. 61-63). Taki graf jest zarazem przestrzenią probabilistyczną będącą pewną prezentacją modelu doświadczenia $\delta_{oo|oo}$. Do konstrukcji tego grafu wykorzystamy graf będący prezentacją przestrzeni probabilistycznej czekania na serię *oo* (por. Major, Nawolska, 1999b, s. 206).



Ryc. 2. Graf czekania na serię *oo*

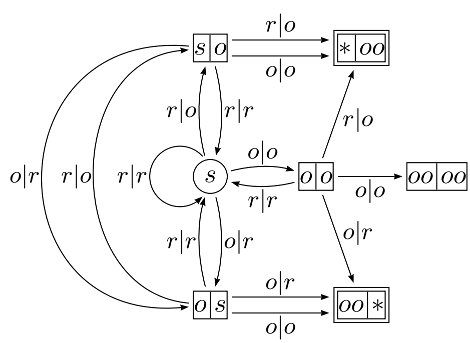
Na grafie czekania na serię *oo*, są trzy węzły, o etykietach s, o, i oo.

W grze $g_{oo|oo}$ przeprowadza się doświadczenie losowe, którego model jest w istocie drugą potęgą kartezjańską przestrzeni probabilistycznej będącej modelem czekania na serię *oo*. Etykiety jego węzłów wyznaczmy jako drugą potęgę kartezjańską zbioru etykiet węzłów grafu czekania na serię *oo*. Sposób ich wyznaczenia prezentujemy w tabeli 2.

Tab. 2.

	etykiety czekania na serię *oo*			
	s	o	oo	
s	s	$s\mid o$	$s\mid oo$	$\boxed{*\mid oo}$
o	$o\mid s$	$o\mid o$	$o\mid oo$	
oo	$oo\mid s$	$oo\mid o$	$oo\mid oo$	
	$\boxed{oo\mid *}$			

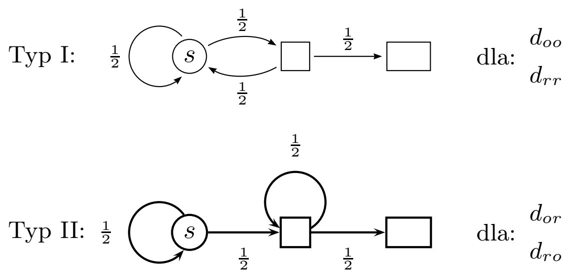
Zauważmy, że węzły brzegowe $\boxed{oo|s}$ i $\boxed{oo|o}$ można utożsamić ze sobą (z węzłów tych nie wychodzi żadna krawędź a dotarcie do każdego z nich jest równoznaczne ze zwycięstwem pierwszego z graczy) sklejając je w jeden węzeł o etykiecie $\boxed{oo|*}$. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla węzłów $\boxed{s|oo}$ i $\boxed{o|oo}$ – z ich sklejenia powstaje węzeł $\boxed{*|oo}$. Ostatecznie na grafie doświadczenia $\delta_{oo|oo}$ mamy 7 węzłów, w tym 3 węzły brzegowe (ryc. 3).



Ryc. 3.

Z doświadczeniem $\delta_{oo|oo}$ zwiążmy zdarzenia $A = \{...oo|*\}$ i $B = \{... *|oo\}$. Zajście zdarzenia A jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza G_1, zaś zajście zdarzenia

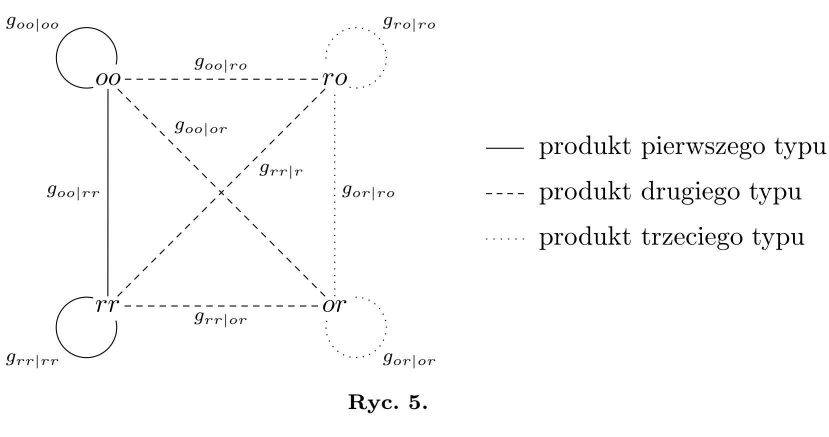
B ze zwycięstwem gracza G_2. Zdarzeniu A sprzyjają wszystkie te wyniki, którym na grafie z ryc. 3 odpowiadają trasy prowadzące z węzła s do węzła $\boxed{oo|*}$. Zdarzeniu B sprzyjają zaś te wyniki, którym na grafie z ryc. 3 odpowiadają trasy prowadzące z węzła s do węzła $\boxed{*|oo}$. Każdej trasie o pewnej długości k, prowadzącej z węzła s do węzła $\boxed{oo|*}$ odpowiada dokładnie jedna trasa o takiej samej długości prowadząca z węzła s do węzła $\boxed{*|oo}$ i na odwrót. Oznacza to, że $P(A) = P(B)$. Powyższa argumentacja dotyczy pewnych symetrii grafu stochastycznego. Graf z ryc. 3 jest w pewnym sensie symetryczny, tzn., można tak rozmieścić węzły grafu i krawędzie, że da się wskazać prostą, będącą osią symetrii grafu, z dokładnością do węzłów i krawędzi (bez uwzględnienia etykiet i opisów krawędzi). Gra $g_{oo|oo}$ jest sprawiedliwa. Jak już wspomniano wcześniej, dla serii orłów i reszek długości 2, jest 10 istotnych gier. Zauważmy jednak, że dla serii długości 2 mamy tylko dwa typy grafów doświadczeń δ_a. Są nimi grafy z ryc. 4.



Ryc. 4.

Pierwszy z nich jest grafem czekania zarówno dla doświadczania δ_{oo} jak i doświadczenia δ_{rr}, drugi zaś jest grafem czekania zarówno dla doświadczania δ_{or} jak i doświadczenia δ_{ro} (po odpowiednim uzupełnieniu etykiet i stosownym przypisaniu krawędziom litery o albo r).

Ponieważ przestrzeń probabilistyczna dla doświadczenia przeprowadzanego w grze $\delta_{a|b}$, gdzie a i b są seriami orłów i reszek długości 2, jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni probabilistycznych δ_a i δ_b, zatem są trzy – istotne z punktu widzenia gry – takie produkty kartezjańskie.



Ryc. 5.

Pierwszy jest drugą potęgą kartezjańską przestrzeni probabilistycznej prezentowanej przez graf typu I, drugi – produktem kartezjańskim przestrzeni probabilistycznych prezentowanych przez graf typu I i graf typu II, trzeci zaś jest drugą potęgą kartezjańską przestrzeni probabilistycznej prezentowanej przez graf typu II.

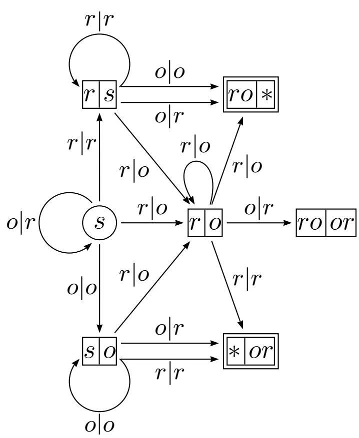
W zbiorze doświadczeń $\delta_{a|b}$ można zatem wprowadzić relację równoważności. Mówimy, że dwa doświadczenia należą do tej samej klasy równoważności, gdy ich modele probabilistyczne są izomorficznymi przestrzeniami probabilistycznymi.

Model probabilistyczny każdej z 10 zmodyfikowanych gier Penneya jest jednym z trzech wspomnianych produktów kartezjańskich. Oznacza to, że w analizie gier wystarczy rozważyć tylko reprezentantów trzech klas abstrakcji wspomnianej relacji równoważności.

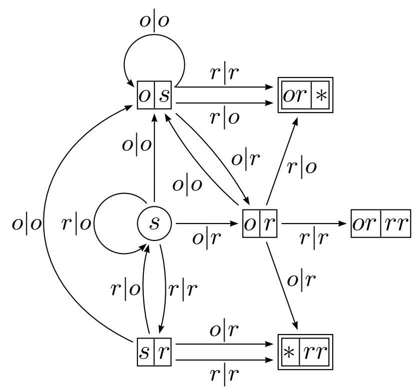
Do pierwszej z klas abstrakcji należą doświadczenia: $\delta_{oo|rr}$, $\delta_{oo|oo}$, $\delta_{rr|rr}$; do drugiej z klas abstrakcji należą doświadczenia: $\delta_{rr|or}$, $\delta_{oo|or}$, $\delta_{rr|ro}$ i $\delta_{oo|ro}$; do trzeciej zaś należą doświadczenia: $\delta_{or|ro}$, $\delta_{or|or}$, $\delta_{ro|ro}$.

Jako reprezentantów klas abstrakcji wybierzmy doświadczenia: $\delta_{oo|oo}$, $\delta_{rr|or}$, $\delta_{or|ro}$.

Graf z ryc. 3 jest pewną prezentacją przestrzeni probabilistycznej doświadczenia $\delta_{oo|oo}$. Na rycinach 6 i 7 zamieszczone są grafy dla doświadczeń $\delta_{or|ro}$ oraz $\delta_{rr|or}$.



Ryc. 6.



Ryc. 7.

Z symetrii grafów z rysunków 3 oraz 6 wynika w sposób oczywisty, że sprawiedliwe są gry: $g_{or|ro}$, $g_{or|or}$, $g_{ro|ro}$, $g_{oo|rr}$, $g_{oo|oo}$, $g_{rr|rr}$. Prawdopodobieństwa zwycięstwa każdego z graczy w tych grach są równe. Można je wyznaczyć korzystając z algorytmu pochłaniania dla grafów stochastycznych[3]. Wynoszą one odpowiednio dla gier $g_{or|ro}$, $g_{or|or}$, $g_{ro|ro}$ po $\frac{11}{27}$, zaś dla $g_{oo|rr}$, $g_{oo|oo}$, $g_{rr|rr}$ – po $\frac{11}{25}$.

Graf z rys. 7 nie jest symetryczny, co nie musi oznaczać, że gry $g_{rr|or}$, $g_{or|oo}$, $g_{rr|ro}$ i $g_{ro|oo}$ nie są sprawiedliwe.

[3] Algorytm ten pozwala na efektywne wyznaczanie prawdopodobieństw dotarcia do węzłów brzegowych grafu. Ma on zastosowanie w sytuacji, gdy przebieg doświadczenia jest interpretowany jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym. Obliczanie prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń sprowadza się do rozwiązywania układu równań liniowych. Algorytm ten został przedstawiony w (Engel, 1980) oraz wraz z dowodem w (Płocki, 2005b, s. 398-399).

Prawdopodobieństwa zwycięstwa graczy w omawianych grach (wyznaczane z algorytmu pochłaniania) prezentujemy w tabeli 3.

Tab. 3.

	oo	rr	or	ro
oo	$\frac{11}{25} \vert \frac{11}{25}$	$\frac{11}{25} \vert \frac{11}{25}$	$\frac{39}{121} \vert \frac{65}{121}$	$\frac{39}{121} \vert \frac{65}{121}$
rr	$\frac{11}{25} \vert \frac{11}{25}$	$\frac{11}{25} \vert \frac{11}{25}$	$\frac{39}{121} \vert \frac{65}{121}$	$\frac{39}{121} \vert \frac{65}{121}$
or	$\frac{65}{121} \vert \frac{39}{121}$	$\frac{65}{121} \vert \frac{39}{121}$	$\frac{11}{27} \vert \frac{11}{27}$	$\frac{11}{27} \vert \frac{11}{27}$
ro	$\frac{65}{121} \vert \frac{39}{121}$	$\frac{65}{121} \vert \frac{39}{121}$	$\frac{11}{27} \vert \frac{11}{27}$	$\frac{11}{27} \vert \frac{11}{27}$

Dane zawarte w tabeli 3 można zaprezentować też w uproszczony sposób (tab. 4).

Tab. 4.

<table>
<tr><th></th><th>oo</th><th>rr</th><th>or</th><th>ro</th></tr>
<tr><td>oo</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{11}{25} \vert \frac{11}{25}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{39}{121} \vert \frac{65}{121}$</td></tr>
<tr><td>rr</td></tr>
<tr><td>or</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{65}{121} \vert \frac{39}{121}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\frac{11}{27} \vert \frac{11}{27}$</td></tr>
<tr><td>ro</td></tr>
</table>

Każdy wiersz i każda kolumna tabeli 3. oraz jej uproszczonej wersji (tab. 4) odpowiada pewnej serii orłów i reszek długości 2. W przecięciu się wiersza odpowiadającego serii a z kolumną odpowiadającą serii b wpisano liczby $P(...a|*)$ i $P(...*|b)$ (rozdzielone znakiem |), będące prawdopodobieństwami zwycięstwa graczy w grze $g_{a|b}$, czyli prawdopodobieństwami dotarcia do węzłów $\boxed{a|*}$ oraz $\boxed{*|b}$ na grafie, który jest planszą dla rozważanej gry.

Zwróćmy uwagę na fakt, że dla każdej z rozważanych gier suma prawdopodobieństw zwycięstw obu graczy jest mniejsza niż 1. Tak jest, ponieważ każda z gier może zakończyć się remisem.

Dla niektórych typów grafów, jak np. graf z rys. 6 prawdopodobieństwa dotarcia do węzłów brzegowych grafu można wyznaczać bez użycia algorytmu pochłaniania. Można to uzyskać redukując nieskończoną przestrzeń do przestrzeni skończonej. Na grafie doświadczenia $\delta_{or|ro}$ (rys. 6.) istnieje szczególny węzeł $\boxed{r|o}$. Osobliwość tego węzła polega na tym, że gra $g_{or|ro}$ może skończyć się remisem tylko wtedy, gdy błądząc po grafie dotrzemy do tego węzła. Z węzła s możemy dotrzeć do każdego z węzłów $\boxed{r|s}$, $\boxed{s|o}$ i $\boxed{r|o}$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Ponadto prawdopodobieństwo dotarcia z węzła $\boxed{r|s}$ do $\boxed{r|o}$ (analogicznie z węzła $\boxed{s|o}$ do $\boxed{r|o}$) wynosi też $\frac{1}{3}$. Zatem prawdopodobieństwo dotarcia z węzła startowego s do węzła $\boxed{r|o}$ wynosi $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, czyli $\frac{5}{9}$. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo remisu (dotarcia do węzła $\boxed{ro|or}$) wynosi $\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3}$, tj. $\frac{5}{27}$, a prawdopodobieństwo zwycięstwa każdego z graczy jest połową z $1 - \frac{5}{27}$, czyli wynosi $\frac{11}{27}$.

W kontekście przeprowadzonej analizy rodzi się pytanie: Czy wśród serii orłów i reszek długości 2 jest seria najlepsza, tzn. taka, że gracz, który na nią czeka, ma większe szanse na zwycięstwo w grze $g_{a|b}$ niż jego przeciwnik, bez względu na to na jaką serię czeka jego przeciwnik?

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Jest to oczywiste, ponieważ gracze mogą czekać na te same serie (gra $g_{a|a}$) i wtedy szanse na zwycięstwo obydwu graczy są takie same. Można jednak mówić o *serii optymalnej*, tzn. takiej że szanse na zwycięstwo gracza, który na nią czeka, są nie mniejsze od szans jego przeciwnika, bez względu na to, na jaką serię czeka przeciwnik. Takimi seriami są serie or i ro, ponieważ serie or i ro są jednakowo dobre, natomiast seria or (ro) jest lepsza od każdej z serii oo i rr (oo i rr).

Na koniec przeanalizujmy jeszcze czy średni czas czekania na każdą z serii orłów i reszek długości 2 pozostaje w jakiejś relacji ze średnim czasem trwania doświadczenia $\delta_{a|b}$ (średni czas błądzenia po grafie stochastycznym będącym modelem doświadczenia $\delta_{a|b}$).

W pracy (Major, Nawolska, 1999b, s. 201, 205-207) wykazano, że $E(T_{or}) = E(T_{ro}) = 4$ oraz $E(T_{oo}) = E(T_{rr}) = 6$. Za pomocą tak zwanego algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym[4] można wyznaczyć $E(T_{oo|oo})$, $E(T_{rr|or})$ oraz $E(T_{or|ro})$. Jest

$$E(T_{oo|oo}) = 3.68, \quad E(T_{rr|or}) \approx 3.17, \quad E(T_{or|ro}) \approx 2.96.$$

Wynika stąd, że najkrótszy średni czas trwania doświadczenia $\delta_{a|b}$ (gry $g_{a|b}$) ma miejsce w przypadku serii o najkrótszych średnich czasach czekania, zaś najdłuższy średni czas – w przypadku serii o najdłuższych średnich czasach czekania.

Można też sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1
Niech a i b będą seriami orłów i reszek długości 2. Dla doświadczeń losowych $\delta_{a|b}$, δ_a i δ_b zachodzi

$$E(T_{a|b}) < \frac{E(T_a) + E(T_b)}{2}.$$

Warto też odnotować jeszcze jedną zaobserwowaną prawidłowość, którą ujmiemy w formie twierdzenia:

Twierdzenie 2
Niech a i b będą seriami orłów i reszek długości 2. Dla doświadczeń losowych $\delta_{a|b}$, δ_a i δ_b zachodzi

1° $P(\ldots a|*) = P(\ldots *|b) \Longleftrightarrow E(T_a) = E(T_b)$;

2° $P(\ldots a|*) < P(\ldots *|b) \Longleftrightarrow E(T_a) > E(T_b)$;

3° $P(\ldots a|*) > P(\ldots *|b) \Longleftrightarrow E(T_a) < E(T_b)$.

[4]Algorytm ten pozwala na efektywne wyznaczanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej będącej czasem trwania doświadczenia losowego wieloetapowego (mierzonego liczbą etapów). Ma on zastosowanie w sytuacji, gdy przebieg doświadczenia jest interpretowany jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym. Obliczanie średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym sprowadza się, podobnie jak ma to miejsce w przypadku algorytmu pochłaniania, do rozwiązywania układu równań liniowych. Algorytm ten został przedstawiony w (Engel, 1980) oraz wraz z dowodem w (Płocki, 2005b, s. 399-401).

W przypadku serii orłów i reszek długości 2 twierdzenia są prawdziwe. Konsekwencją twierdzenia 2. jest fakt, że gra $g_{a|b}$ jest sprawiedliwa wtedy i tylko wtedy, gdy średnie czasy czekania na serię a oraz serię b są równe.

Otwarte pozostaje pytanie, czy twierdzenia można uogólnić na przypadek serii orłów i reszek długości większej niż 2.

4. Zakończenie

W pracy zaprezentowano kolejne uogólnienie gry Penneya i różne problemy z tym związane. Ponadto ukazano wykorzystanie elementarnych środków badania nieskończonych przestrzeni probabilistycznych, takich jak graf stochastyczny, symetrie i analogie, dzięki którym możliwe były nowe metody obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych oparte na interpretacji przebiegu łańcucha Markowa jako błądzenia losowego po grafie stochastycznym (redukcje grafu, wyróżnianie węzłów osobliwych, symetrie grafu, algorytmy pochłaniania i średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym).

Dzięki zaproponowaniu elementarnych narzędzi organizacji fazy matematyzacji oraz fazy dedukcji i rachunków badanie nieskończonych przestrzeni probabilistycznych staje się możliwe na gruncie matematyki elementarnej, dostępnej nawet uczniom szkół ponadgimnazjalnych, a tym samym propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa na studiach matematycznych specjalności nauczycielskiej.

Literatura

Engel, A.: 1980, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik,* Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Kapela, T.: 2002, Hazardowa wersja gry Penney'a, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Calculum Probabilitatis Didacticam Pertinentia* **I**, 29-38.

Krech, I.: 1999, Probability in probability spaces connected with generalised Penney's games, *Acta Univ. Purkynianae* **42**, 71-77.

Krech, I.: 2001, Waiting for series of colours and properties of some relations in a set of these series, *Acta Univ. Purkynianae Studia Mathematica* **72**, 112-124.

Krech, I.: 2002, Osobliwe własności modeli probabilistycznych czekania na serie sukcesów i porażek, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Calculum Probabilitatis Didacticam Pertinentia* **I**, 39-55.

Krech, I.: 2006, Graf stochastyczny a proces czekania na serie kolorów w uogólnieniach problemów Penney'a. Rozprawa doktorska (praca niepublikowana) obroniona w 2006 roku na Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

Legutko, M.: 1987, Przykłady behawioralno-poznawcze postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 51-102.

Major, M., Nawolska, B.: 1999a, Gry Penneya i wartość oczekiwana, *Matematyka* **1**, 19-22.

Major, M., Nawolska, B.: 1999b, *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Major, M., Nawolska, B.: 2006, Aktywności matematyczne studentów inspirowane grami Penneya, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 137-161.

Nawolska, B.: 2002, Wartość oczekiwana czasu trwania pewnych doświadczeń losowych o losowej liczbie etapów, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Calculum Probabilitatis Didacticam Pertinentia* **I**, 91-103.

Nawolska, B.: 2008, Argumentacje w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych na przykładzie gier Penneya, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Calculum Probabilitatis Didacticam Pertinentia* **II**, 67-98.

Nawolska, B., Płocki, A.: 2000, Problemy i paradoksy rachunku prawdopodobieństwa związane z grami Penneya, *Gradient* **1**, 11-24.

Płocki, A.: 1997a, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi”*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Płocki, A.: 1997b, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Płocki, A.: 2004, *Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Wilkowice.

Płocki, A.: 2005a, *Dydaktyka stochastyki. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element kształcenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Płocki, A.: 2005b, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi”*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Płocki, A.: 2011, *Prawdopodobieństwo wokół nas*, Wydawnictwo Dla Szkoły, Bielsko-Biała.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail mmajor@up.krakow.pl

Instytut Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
e-mail bnawol@up.krakow.pl