

## Wstęp

Zebrane w Roczniku prace powstały w ramach seminarium z rachunku prawdopodobieństwa i jego dydaktyki, prowadzonym od szeregu lat w Instytucie Matematyki WSP w Krakowie oraz w ramach współpracy naukowej jego uczestników z Uniwersytetem Pedagogicznym im. Ciołkowskiego w Kałudze (Rosja) i Uniwersytetem w Doniecku (Ukraina).

Kształcenie w zakresie rachunku prawdopodobieństwa staje się integralną częścią powszechnego kształcenia matematycznego. Wiele znanych aktualnie dydaktycznych ujęć tej dziedziny matematyki odrywa ją od statystyki matematycznej. W dydaktyce matematyki mówi się o kształceniu stochastycznym. Przez *stochastykę* rozumie się w tym kontekście pewną fuzję rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej (a także — w sensie szerszym — statystyki opisowej i kombinatoryki).

Dydaktyczne propozycje kształcenia stochastycznego nauczyciela matematyki a także ucznia, powstające w ramach wspomnianego seminarium, charakteryzuje ścisła integracja idei probabilistycznych i statystycznych. Tę fuzję obu powyższych dziedzin matematyki motywują: statystyczny aspekt pojęć probabilistycznych, losowo-hazardowa natura pojęcia prawdopodobieństwa i nadziei matematycznej z jednej strony i statystyczne metody oparte na aparacie probabilistycznym z drugiej. We wspomnianych podejściach do kształcenia w zakresie stochastyki dane statystyczne stanowią nie tylko źródło informacji o modelu probabilistycznym danej sytuacji (estymacja) czy podstawę weryfikacji hipotez, ale także kreują matematyczne myślenie, inspirując szczególnie formę i problematykę zadań, w których chodzi o poszukiwanie środków pozwalających wyjaśniać na gruncie matematyki pewne odkryte fakty empiryczne. Chodzi tu więc o matematyczne zadania, które uczeń może sam formułować, sam może dobrać narzędzia ich rozwiązywania, w tym również może te narzędzia odkrywać.

Przedmiotem seminarium, w ramach którego powstały zebrane tu prace, są zagadnienia związane z organizacją szkolnych zajęć i zajęć ze studentami matematyki sekcji nauczycielskiej, w tym przede wszystkim problemy dotyczące form i treści stochastycznego kształcenia uczniów na różnych etapach ich psychofizycznego rozwoju, a także kształcenia w tym zakresie nauczyciela matematyki.

Tworzona w ramach seminarium koncepcja stochastycznego kształcenia oparta jest na szczególnym podejściu do

- matematyki, która w kontekście nauczania rozumiana jest nie jako gotowa wiedza, ale jako specyficzna intelektualną działalność,

- **jej nauczania**, które traktowane jest jako odkrywanie wiedzy w trakcie rozwiązywania problemów (*formation scientifique*), a nie prezentacja gotowej wiedzy (*information scientifique*),
- **roli nauczyciela w tym procesie**, nauczyciel jawi się jako „reżyser” matematycznego odkrycia, „pomocnik budowniczego”, nadzorca, a nie jako prezydent i kontroler gotowej wiedzy.

Pojęcia probabilistyczne — podobnie jak pojęcia geometryczne, czy arytmetyczne — mają swoją osobliwą naturę i wywodzą się z prób opisu i badania na gruncie matematyki pewnych szczególnych sytuacji i faktów empirycznych oraz towarzyszących im stosunków jakościowych i ilościowych. Tworzone w ramach wspomnianego seminarium podejścia do nauczania stochastyki biorą pod uwagę te empiryczne źródła i naturę praktycznych zastosowań idei stochastycznych w przeszłości (gry hazardowe) i dziś (procesy decyzyjne w sytuacjach niepewności i w warunkach ryzyka, organizacja i prosperowanie hazardu, ubezpieczenia społeczne itd.).

Rocznik zawiera następujące prace:

- [1] J. Brodski, *Nauczanie probabilistyki i statystyki ukierunkowane na proces stosowania matematyki*;
- [2] W. Bułyczow, *Doświadczenie losowe i jego modele probabilistyczne*;
- [3] Z. Dunikowska, M. Major, B. Nawolska, *Organizacja fazy matematyzacji, rachunków i interpretacji w procesie rozwiązywania zadań stochastycznych na różnych poziomach kształcenia matematycznego*;
- [4] H. Kąkol, S. Wołodźko, *O pewnej koncepcji dydaktycznej nauczania elementów statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa w szkole podstawowej*;
- [5] M. Major, *Nieprzechodność pewnej relacji związanej z grą typu bingo*;
- [6] B. Nawolska, *Dydaktyczne zabiegi związane z ujawnianiem strategii Kahnemana-Tversky’ego we wnioskowaniach stochastycznych*;
- [7] B. Nawolska, *Paradoksy związane z nadzieją matematyczną a proces kształtowania tego pojęcia*;
- [8] A. Płocki, *Refleksja a posteriori — mało znana w nauczaniu stochastyki forma aktywności matematycznej*;
- [9] J. Brodski, O. Łysenko, *O mocy testów statystycznych dla wybrakowywania istotnie wyróżniających się elementów próbki*.

Problematyka prac obejmuje przede wszystkim formę i treść zadań stochastycznych oraz rolę sytuacji problemowych w ich kreowaniu i motywowaniu. Prace wskazują na to, jaki udział w kształceniu przez matematykę mogą mieć zadania stochastyczne. Chodzi tu o następujące elementy tego kształcenia.

## 1. Kształtowanie pojęć, odkrywanie ich jako matematycznych narzędzi opisu rzeczywistości i narzędzi szczególnych wnioskowań, formułowanie definicji pojęcia, weryfikowanie jej poprawności.

- Praca [7] dotyczy kształtowania pojęcia wartości oczekiwanej, ukazywania tego pojęcia w różnych aspektach, w różnych interpretacjach i w różnych kontekstach, gdy chodzi o jego naturę i zakres zastosowań.
- Praca [4] zawiera dydaktyczną analizę konkretnej koncepcji nauczania stochastyki realizowanej aktualnie w serii podręczników „Błękitnej Matematyki”, w tym ujęciu w zakres stochastyki włączono także statystykę opisową.
- W pracy [2] mowa jest o ważnych aspektach kształtowania pojęcia przestrzeni probabilistycznej jako pewnego modelu doświadczenia losowego.
- Prace [6] i [8] dotyczą wyjaśniania na gruncie matematyki na ogół nieoczekiwanych faktów empirycznych, odkrytych w ich kontekście błędów, paradoksów czy rozbieżności między tym co sugeruje intuicja, a tym co ujawniają dane empiryczne, dotyczą zatem formułowania, a więc tworzenia, a następnie rozwiązywania zadań stochastycznych, doboru rozmaitych środków matematyzacji i argumentacji.

Chodzi tu więc o rolę zadań w matematycznej aktywizacji.

## 2. Kształtowanie intuicji stochastycznych jako ważnego dziś aspektu matematycznej kultury społeczeństwa.

Osobliwością stochastyki jest bogactwo paradoksów i sofizmatów.

- Prace [5], [6], [7] i [8] obejmują tę osobliwość „świata przypadku” i zawierają propozycje wykorzystania paradoksów do tworzenia matematycznych zadań, których rozwiązywanie obejmuje wszystkie trzy fazy procesu stosowania matematyki. Nie chodzi tu jednak o paradoksy, istotą których jest niejednoznacznie określony problem, jak w przypadku znanego paradoksu Bertranda czy Bernoullego, gdzie dwuznaczności wynikają z nieprecyzyjnego określenia zwrotu „rzucano losowo prostą”. Mowa tu o paradoksach, których źródłem są rozbieżności między tym co sugeruje nam „zdrowy rozsądek”, nasze naiwne intuicje, nasze postrzeganie „świata przypadku”, a tym co wynika z empirii i co następnie daje się wytłumaczyć na gruncie matematyki dzięki dedukcji i rachunkom w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. We wspomnianych pracach zaproponowano kolekcję sytuacji problemowych kreujących matematyczną refleksję nad tymi rozbieżnościami (refleksja a posteriori).
- Praca [6] zawiera propozycję dydaktycznych procedur ujawniających pewne strategie heurystyczne dotyczące przewidywania probabilistycznego i eliminujących błędne wyobrażenia.

- Zagadnienia błędnych intuicji dotyczy także praca [5].
- Propozycję sposobów odkrywania stochastycznych paradoksów za pośrednictwem danych statystycznych, ich analizy i wykorzystywania ich do kreowania aktywności matematycznych zawiera praca [8]).

### **3. Ukazywanie co się matematyzuje w rachunku prawdopodobieństwa, jakimi środkami się to robi i dlaczego.**

Mowa tu o konstrukcjach przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego, o ukazywaniu — poprzez odpowiednią tematykę zadań i charakter sytuacji, na tle których one powstają — obiektów, dla których tworzy się te modele oraz wskazywanie powodów, dla których się to robi.

- O różnych przestrzeniach probabilistycznych jako modelach tej samej sytuacji, o przykładach fizycznych zjawisk, dla których stochastyka tworzy modele, o narzędziach argumentacji dotyczących zgodności tych modeli z rzeczywistością dla której są one tworzone (schemat Ehrenfestów jako probabilistyczny model przepływu ciepła na gruncie mechaniki statystycznej) mowa jest w pracach [1], [2], [7] i [8]).

### **4. Kreowanie i dobór rozmaitych, w tym typowych dla stochastyki, środków matematyzacji i rozumowania.**

- Prace [2], [7] i [8] dotyczą takich środków matematyzacji i argumentacji, jak: graf stochastyczny i pewne typy jego redukcji (umożliwiający przejście od przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej do przestrzeni skończonej), odrębny rysunek, dane statystyczne, osobliwe symetrie, analogie i izomorfizmy.

### **5. Ukazywanie istoty procesu stosowania matematyki.**

- W pracach [1], [7] i [8] mowa jest o pojęciu nadziei matematycznej jako narzędziu wyjaśniania na gruncie matematyki prosperowania hazardu. W tych pracach ukazano grę strategiczno-losową jako model procesu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Zaprezentowano w nich dwa odmienne podejścia do istoty i ilustracji procesu stosowania matematyki.

Innym zagadnieniem dydaktycznym poruszonym w pracach jest

### **6. Kontrola i ocena kompetencji w zakresie stochastyki i to zarówno ucznia jak i studenta przygotowującego się do zawodu nauczyciela matematyki.**

- Tego zagadnienia dotyczy praca [1].

- Przedmiotem pracy [3] jest refleksja nad sposobami rozwiązywania probabilistycznych zadań przez kandydatów na studia i tych samych zadań przez te same osoby po trzech latach studiów matematycznych nie obejmujących problematyki stochastycznej.
- Praca [6] dotyczy różnych podejść do treści zadań i ich roli w kontrolowaniu wiedzy, a raczej pewnych kompetencji w zakresie tej dziedziny matematyki.
- Prace [3], [5], [6], [7] i [8] dotyczą osobliwych obiektów i narzędzi matematyzacji oraz osobliwych wnioskowań jako przedmiotu kontroli tej wiedzy.

Problematyka prac dotyczy formułowania, atakowania, poszukiwania środków matematyzacji i argumentacji oraz rozwiązywania (wraz z interpretacją rozwiązania) zadań stochastycznych jako podstawowego elementu kształcenia w zakresie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

*Adam Płocki*