ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 191 Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki II 1998

Владимир А. Булычев

Случайный эксперимент и его вероятностные модели

Одна из главных задач в преподавании элементарной теории вероятностей — обучить правильному выбору математической (вероятностной) модели эксперимента.

Как известно, вероятностной моделью (или вероятностным пространством) принято называть тройку $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, где
Ω — непустое множество, элементы которого идентифицируют возможные исходы эксперимента;
$\mathcal{Z}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств (наблюдаемые события);
P — вероятность.

Почти всегда существует произвол в выборе Ω, определении $\mathcal{Z}$ и P — именно эту проблему мы и собираемся здесь обсудить.

Начнем с простейшего примера — розыгрыша лотереи. Один из наиболее популярных видов лотереи в России — *Спортлото*, в котором нужно правильно угадать 6 счастливых номеров из 49.

Ситуация 1

Мы наблюдаем за ходом тиража по телевизору: шары перемешиваются в барабане и затем ПО ОЧЕРЕДИ выкатываются из него. В этом случае естественно взять в качестве Ω все размещения из 49 по 6:

$$\operatorname{Card}\Omega = A_{49}^{6} = 10068347520$$ [1]

а в качестве $\mathcal{Z}$ — все подмножества Ω.

Ситуация 2

Мы узнаем о результатах тиража на следующий день из газеты: указывается ТОЛЬКО СОСТАВ выигравшей комбинации без информации о ходе тиража.

[1] Card A обозначает мощность события A

У нас есть две возможности:

а) взять в качестве Ω множество всех сочетаний из 49 по 6:

$$\operatorname{Card}\Omega = C_{49}^{6} = 13983816$$

а в качестве $\mathcal{Z}$ — все подмножества Ω;

б) как и в ситуации 1 взять в качестве Ω множество всех размещений из 49 по 6 (ведь механизм лотереи не изменился от того, что мы за ней не наблюдали); но в качестве $\mathcal{Z}$ рассматривать только такие подмножества размещений A, которые вместе с любым размещением содержат и все его перестановки:

$$(a_1, a_2, ..., a_6) \in A \Longrightarrow (a_{1_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_6}) \in A$$

для любой перестановки $i_1, i_2, ..., i_6$. Именно эти события являются в данном эксперименте наблюдаемыми („через газету").

Хотя подход б) кажется, на первый взгляд, искусственно усложненным, он имеет свои преимущества: в подходе а) менее естественным (хотя в данном случае и верным) выглядит предположение о равновероятности всех ω из Ω (самом тонком моменте во всех элементарных вероятностных моделях). Вообще здесь мы полностью согласны с А. Реньи, который рекомендует „дробить" Ω как можно сильнее, что позволяет во многих случаях избежать досадных ошибок — достаточно вспомнить самую знаменитую из них — ошибку Даламбера. Напомним, Даламбер вычислял вероятность выпадения орла и решки при бросании двух монет. В этом эксперименте можно взять Ω, состоящее из трех исходов:

а) $\Omega = \{[oo], [or], [rr]\}$ (монеты не различимы);

а можно из четырех:

б) $\Omega = \{oo, or, ro, rr\}$ (монеты различимы).

Только в случае б) мы получим правильный (согласующийся с опытом) ответ — $\frac{1}{2}$. Природа ВСЕГДА РАЗЛИЧАЕТ монеты, поэтому исходов у этого опыта четыре. Для наблюдателя монеты могут быть и неразличимыми — в этом случае нам придется взять $\mathcal{Z}$, порожденное разбиением:

$$A_1 = \{oo\}, \quad A_2 = \{or, ro\}, \quad A_3 = \{rr\}$$

(к примеру, событие $B = \{or\}$ будет ненаблюдаемым).

Продемонстрируем методические преимущества такого подхода еще на одной задаче: в урне 3 красных, 3 желтых и 3 зеленых шара. Вынимаем наугад 3 шара. Какова вероятность, что все они разных цветов?

Решение 1

Считаем, что шары вытаскиваются одновременно. Возможны следующие варианты их состава:

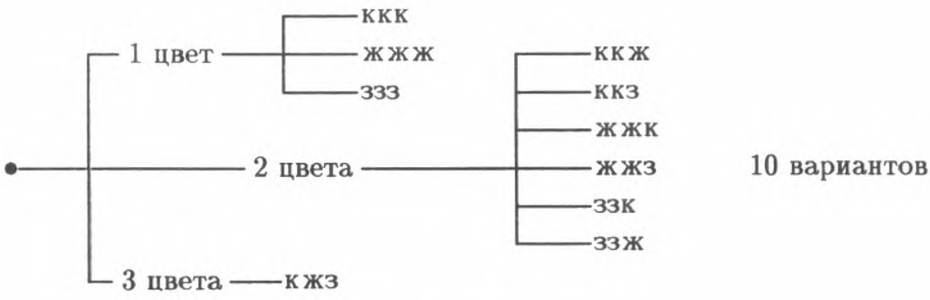

Рис. 1.

$$\operatorname{Card}\Omega = 10, \quad \operatorname{Card} A = 1, \quad P(A) = \frac{1}{10}.$$

Решение 2

Считаем, что шары вытаскиваются последовательно друг за другом. Теперь вариантов больше:

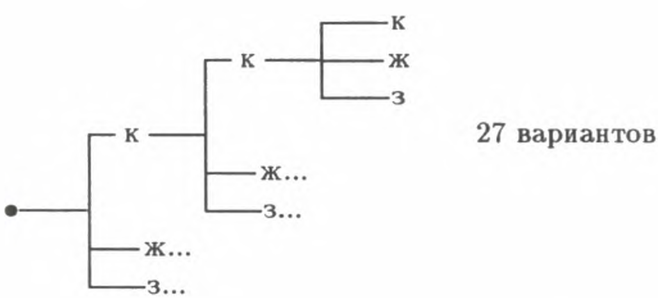

Рис. 2.

$$\operatorname{Card}\Omega = 27, \quad \operatorname{Card} A = 6, \quad P(A) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Оба решения, понятное дело, неверные. К ошибкам нас привел неверный выбор Ω. Мы забыли, что природа НЕ РАЗЛИЧАЕТ ЦВЕТА, НО РАЗЛИЧАЕТ ОБЪЕКТЫ, то есть, в нашем опыте — шары.

Решение 3

Пометим (мысленно) все 9 шаров так, чтобы их можно было различать, например:

$$К_1, К_2, К_3, Ж_1, Ж_2, Ж_3, З_1, З_2, З_3.$$

В качестве Ω возьмем все размещения из 9 по 3. Тогда

$$\operatorname{Card}\Omega = 9 \cdot 8 \cdot 7, \quad \operatorname{Card} A = 9 \cdot 6 \cdot 3, \quad P(A) = \frac{9}{28}$$

это и будет правильным ответом задачи.

Так как шары одного цвета для нас неразличимы, то наблюдаемыми будут только те события, которые вместе с каждым размещением

$$X_i Y_j Z_k$$

содержат все размещения с той же последовательностью букв X, Y, Z и любыми последовательностями индексов i, j, k. Например, событие

$$B = \{К_1К_2К_3, Ж_1Ж_2Ж_3, З_1З_2З_3\}$$

ненаблюдаемое.

Другая сторона обсуждаемой проблемы — эквивалентность самих экспериментов. Описанный словами случайный эксперимент часто можно заменить другим, который кажется абсолютно идентичным и позволяет проще добраться до ответа. Кто не сталкивался с ситуацией, когда длинные комбинаторные формулы в процессе решения задачи вдруг сокращаются и в ответе остаются каких-нибудь $\frac{2}{3}$, которые так и хочется получить „из других соображений". Посмотрим, всегда ли эти соображения оправданы. Для этого приведем несколько задач, которые решались со студентами на первых занятиях по вероятности.

Задача 1

В лотерее участвуют 100 билетов и разыгрываются 20 призов. Перед розыгрышем все билеты кладутся в барабан и перемешиваются. Затем для каждого приза из барабана вытаскивается билет, обладатель которого и получает этот приз. Какова вероятность, что на свой единственный билет я ничего не выиграю?

Пространство исходов Ω — это размещения из 100 по 20:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= A_{100}^{20} = 100 \cdot 99 \cdot \cdots \cdot 81, \\ \operatorname{Card} A &= A_{99}^{20} = 99 \cdot 98 \cdot \cdots \cdot 80, \\ P(A) &= \frac{80}{100} = 0.8. \end{aligned}$$

Интересно, что почти всегда студенты давали этот ответ сразу, утверждая что число всех исходов в опыте 100, а число благоприятных — 80.

После этого ставился вопрос — какой же эксперимент они имеют в виду, когда говорят о 100 равновозможных исходах. Выяснялось, что имелась в виду следующая схема: в барабан кладется 100 бумажек, 20 из которых помечены крестиком (они выигрышные). Затем я подхожу к барабану ПЕРВЫМ и вытаскиваю наугад одну бумажку: если она с крестиком — получаю приз. Эквивалентность этих экспериментов выглядела весьма сомнительной, особенно после того, как ставилось условие подходить к барабану вторым или последним. Студенты сами отказывались от эквивалентности и решали задачу „в лоб", получая в итоге тот же самый ответ. После этого снова обсуждался вопрос об эквивалентности экспериментов.

Задача 2

Замок на сейфе открывается набором определенной комбинации из 5 цифр от 0 до 9. С какой вероятностью мы откроем сейф в течение часа, если будем тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

Пространство исходов Ω — это размещения из 100000 по 3600:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= A_{100000}^{3600}, \\ \operatorname{Card} A &= A_{100000}^{3600} - A_{99999}^{3600}, \\ P(A) &= 1 - \frac{99999 - 3600 + 1}{100000} = \frac{3600}{100000} = 0.036. \end{aligned}$$

Как и в предыдущей задаче, большинство дали этот ответ сразу, указав число возможных исходов 100000, а число благоприятных — 3600. Какой случайный эксперимент имелся в виду на этот раз? Сначала мы выбираем 3600 разных пятизначных шифров (назовем их „черными", а остальные — „белыми"), после чего владелец (не зная о наших попытках открыть его сейф) выбирает ту, которая будет открывать замок. Вероятность, что он выберет „черную" — $\frac{3600}{100000}$.

На этот раз эквивалентность экспериментов кажется более правдоподобной: мы просто „запустили время вспять" — сначала пытаемся открыть сейф, а после этого владелец закрывает его на определенный шифр. Этот прием позволяет иногда упростить решение задачи.

Задача 3

Русская рулетка. Некий господин G решил свести счеты с жизнью: заложил в барабан револьвера 2 пули (всего в нем 7 отверстий), прокрутил его несколько раз и приставил к виску. Какова вероятность, что он останется в живых?

Ответ $\frac{5}{7}$ получается сразу, если считать, что G тащит шар из урны, в которой 2 черных и 5 белых шаров. Будет ли этот эксперимент эквивалентен нашему?

У студентов вызывает сомнение только один момент: G мог вставить пули в барабан не случайно, а, скажем, в два подряд идущих отверстия. Повлияет ли это на ответ задачи?

Рассмотрев произвольное (неслучайное) расположение пуль в барабане и взяв в качестве Ω множество всех его циклических сдвигов, получаем (все пули и отверстия, как говорилось выше, различимы):

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= 7, \\ \operatorname{Card} A &= 5, \\ P(A) &= \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

(событие A состоит в том, что господин G остался жив). Если расположение пуль также считать случайным, то ответ будет тот же. Таким образом, получаем эквивалентность нашего эксперимента простейшей урновой схеме.

Этот вывод придется пересмотреть, если господину G настолько надоела жизнь, что он делает два выстрела.

Урновая модель без возвращения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= 7 \cdot 6, \\ \operatorname{Card} A &= 5 \cdot 4, \\ P(A) &= \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{10}{21} = 0.476. \end{aligned}$$

Урновая модель с возвращением:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= 7 \cdot 7, \\ \operatorname{Card} A &= 5 \cdot 5, \\ P(A) &= \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7} = \frac{25}{49} = 0.510. \end{aligned}$$

(с возвращением шансы выжить, естественно, больше).

В нашей ситуации многое будет зависеть от выбора начальной расстановки пуль и от того, прокручивается ли барабан после первого выстрела (если, конечно, еще есть кому его крутить). Для урновой схемы это несущественно — можно перемешивать шары после первого вынутого шара, можно нет. Посмотрим, что будет у нас.

а) пули вставлены в отверстия СЛУЧАЙНО, барабан после первого выстрела ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

пусть $A_1 = \{$*остался жив после первого выстрела*$\}$, тогда

$$P(A_1) = \frac{5}{7},$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A|A_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{49} = 0.510.$$

Получили урновую схему с возвращением.

б) пули вставлены в отверстия СЛУЧАЙНО, барабан после первого выстрела НЕ ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

$$P(A_1) = \frac{5}{7},$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A|A_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{10}{21} = 0.476.$$

Получили урновую схему без возвращения.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда начальная расстановка пуль фиксирована.

в) начальная расстановка пуль ФИКСИРОВАНА, барабан после первого выстрела ПРОКРУЧИВАЕТСЯ — при любой начальной расстановке годится решение пункта а):

$$P(A) = \frac{25}{49} = 0.510$$

г) пули вставлены в отверстия ПОДРЯД, барабан после первого выстрела НЕ ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

$$\operatorname{Card}\Omega = 7,$$
$$\operatorname{Card} A = 4,$$
$$P(A) = \frac{4}{7} = 0.571.$$

д) пули вставлены в отверстия НЕ ПОДРЯД, барабан после первого выстрела НЕ ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

$$\operatorname{Card}\Omega = 7,$$
$$\operatorname{Card} A = 3,$$
$$P(A) = \frac{3}{7} = 0.429.$$

Еще два новых ответа! Таким образом, можно получить четыре разных вероятности в зависимости от выбранных условий эксперимента:

$$0.429 < 0.476 < 0.510 < 0.571.$$

Рассмотрим еще одну ситуацию: теперь стреляются из одного пистолета по очереди два господина G_A и G_B (каждый делает по выстрелу). У кого шансы выжить больше?

В урновой схеме — с возвращением или без — ответ одинаковый: у обоих шансы по $\frac{5}{7}$ (без возвращения — это знаменитая задача об экзаменационных билетах). В нашей ситуации, как и раньше, получаем несколько разных ответов:

а) пули вставлены в отверстия СЛУЧАЙНО, барабан после первого выстрела ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5}{7} = 0.714, \\ P(B) &= P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) + P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{37}{49} = 0.755, \\ P(B) &> P(A). \end{aligned}$$

В отличие от обеих урновых схем, у G_B больше шансов выжить, чем у G_A.

б) пули вставлены в отверстия СЛУЧАЙНО, барабан после первого выстрела НЕ ПРОКРУЧИВАЕТСЯ:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5}{7} = 0.714, \\ P(B) &= P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) + P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{7} = 0.714, \\ P(B) &= P(A). \end{aligned}$$

Шансы одинаковы — как в урновых схемах.

в) начальная расстановка пуль ФИКСИРОВАНА, барабан после первого выстрела ПРОКРУЧИВАЕТСЯ — при любой начальной расстановке годится решение пункта а):

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{5}{7} = 0.714, \\ P(A) &= \frac{37}{49} = 0.755, \\ P(B) &> P(A). \end{aligned}$$

г),д) начальная расстановка пуль ФИКСИРОВАНА, барабан после первого выстрела НЕ ПРОКРУЧИВАЕТСЯ — при любой начальной расстановке получаем:

$$P(A) = \frac{5}{7} = 0.714,$$
$$P(B) = \frac{5}{7} = 0.714,$$
$$P(B) = P(A).$$

Шансы снова одинаковы.

Таким образом, на этот раз мы можем свести нашу задачу к урновой схеме при любой начальной расстановке пуль (случайной или фиксированной), если НЕ БУДЕМ ПРОКРУЧИВАТЬ барабан после первого выстрела.

Получился интересный результат: в первой ситуации (G_{A} делает два выстрела) удается свести задачу к одной из урновых схем, если есть хотя бы одна из двух „случайностей": расстановка пуль или прокрутка барабана (можно и то и другое); во второй (G_{A} и G_{B} делают по выстрелу) — если вторая „случайность" исключается: барабан не прокручивается, а пули можно вставлять как случайно, так и фиксировано.

Задача 4

При игре в хоккей $2n$ школьников делятся на команды следующим образом. Каждый кладет свою клюшку в общую кучу, которую затем один из игроков (с завязанными глазами) делит на две равные части, по очереди раскладывая клюшки налево и направо. Так образуются две команды. Пусть в игре собираются участвовать два сильных игрока. Какова вероятность того, что они попадут в разные команды?

Решение 1

Выбираем в качестве Ω множество всех перестановок из $2n$ элементов. Благоприятные исходы — те перестановки, в которых два сильных игрока стоят на местах разной четности.

$$\mathrm{Card}\,\Omega = (2n)!\,,$$
$$\mathrm{Card}\,A = 2n \cdot n \cdot (2n-2)!\,,$$
$$P(A) = \frac{2n \cdot n \cdot (2n-2)!}{(2n)!} = \frac{n}{2n-1}$$

(событие A состоит в том, сильные игроки попали в разные команды). Такой простой ответ подсказывает более простую модель:

Решение 2

Урновая схема: $2n$ шаров, n черных, n белых. Игроки по очереди тащат шары без возвращения: черные — в одну команду, белые — в другую. Так как вероятность вытащить белый (черный) шар не зависит от очередности, можем запустить сильных игроков в самом начале. Тогда пространство Ω — все размещения из $2n$ по n:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\Omega &= A_{2n}^{n} = 2n\cdot(2n-1),\\ \operatorname{Card}A &= 2n\cdot n,\\ P(A) &= \frac{n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Ответ, как видим, тот же.

Подумаем, как еще можно было бы справедливо организовать деление игроков на две команды. Заставим их, например, ПО ОЧЕРЕДИ бросать монету: „орлы" — в одну команду, „решки" — в другую. Чтобы в командах было поровну игроков, процесс деления придется остановить в момент, когда в одной из них окажется ровно n игроков — остальных надо отправить в противоположную команду.

Можно ли считать такое деление справедливым? По крайней мере, у любого игрока одинаковые шансы попасть в команду „орлов" и „решек". Будет ли такое деление эквивалентно предыдущему? Попробуем в этих условиях посчитать вероятность того, что сильные игроки попадут в разные команды.

Если они бросают монету друг за другом да еще в самом начале, то $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Тот же ответ мы получим, если оба сильных игрока бросают монету в первой половине (среди первых n).

Пусть теперь один из них первый, а другой последний (ему, очевидно, вовсе не придется бросать монету). Выпишем все возможные исходы жребия для простейшего случая — $n = 2$:

oo	oro	roo	rr	orr	ror
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} A &= \{oo, oro, rr, ror\},\\ P(A) &= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3} = \frac{n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Для произвольного n несложно вывести формулу:

$$P(A) = \sum_{k=n-2}^{2n-3} \frac{C_k^{n-2}}{2^{k+1}}$$

При разных значениях n получаем такие вероятности:

$n = 2$	$P(A) = \frac{3}{4} = 0.750$
$n = 3$	$P(A) = \frac{11}{16} = 0.688$
$n = 4$	$P(A) = \frac{21}{32} = 0.656$
$n = 5$	$P(A) = \frac{163}{256} = 0.637$
$n = 100$	$P(A) = 0.528$
$n = 200$	$P(A) = 0.520$
$n = 300$	$P(A) = 0.516$

Можно доказать, что $P(A)$ стремится к $\frac{1}{2}$ все время оставаясь больше $\frac{n}{2n-1}$.

Таким образом, при такой жеребьевке сильные игроки с большей вероятностью попадут в разные команды. Вообще, чем дальше они стоят друг от друга в очереди на бросание, тем больше вероятность попасть в разные команды. С другой стороны, с ростом n эта разница нивелируется и приближается к $\frac{1}{2}$ при любой расстановке сильных игроков. Интересно, что будет, если порядок бросания определяется случайно (все $(2n)!$ перестановок равновероятны) — получим ли мы снова $\frac{n}{2n-1}$? Этот вопрос мы оставляем читателю.

В заключение отметим, что обсуждение всех рассмотренных выше проблем (эквивалентность моделей, замена одного эксперимента другим) требуют много учебного времени, но окупаются на наш взгляд, более глубоким понимание природы вероятностных законов и развитием вероятностного мышления и интуиции учащихся.

Литература

[1] А., Плоцки, *Вероятность в задачах для школьников*, Просвещение, Москва 1996.

[2] A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[3] В. Н. Тутудалин, *Теория вероятностей. Краткий курс и научно-методические замечания*, Издательство Московского Университета, Москва 1972.

Кафедра алгебры и информатики
Калужский государственный педагогический университет
им. К.Э.Циолковского
ул. Степана Разина 26
248 023 Калуга
Russia
E-mail: bul@kgpu.kaluga.su