ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 191 Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki II 1998

Zofia Dunikowska, Maciej Major, Barbara Nawolska

Organizacja fazy matematyzacji, rachunków i interpretacji w procesie rozwiązywania zadań stochastycznych na różnych poziomach kształcenia matematycznego

Résumé. L'article est une voix dans une discussion générale relative aux formes de contrôle des compétences mathématiques (les connaissances et certaires capacités dans le domaine de mathématiques).

Dans l'article on s'est servi d'un problème lequel ont dû solutionner les candidats aux études de mathématiques à L'Ecole Supérieure de Pédagogie de Cracovie en 1993. Les mêmes personnes, en tant qu'étudiants du 3^e année de mathématiques, résolvaient ce problème juste avant les cours des probabilités.

L'article présente l'analyse des solutions de ce problème par lesdits étudiants. La recherche avait comme but de vérifier si et comment la connaissance générale en mathématiques acquise au cours des études a influencé la façon de solutionner les problèmes de probabilités.

1. Uwagi wstępne

Niniejsza praca jest głosem w ogólnej dyskusji nad formami kontroli wiedzy matematycznej i pewnych zdolności w zakresie matematyki. Aktualność tego problemu, zwłaszcza w kontekście rachunku prawdopodobieństwa, uświadamiają nam zadania proponowane od ponad kilkunastu lat na egzaminach maturalnych i egzaminach wstępnych na wyższe uczelnie. Forma i problematyka zadań z rachunku prawdopodobieństwa na tych sprawdzianach wiedzy matematycznej nasuwają pytanie: czy i jaką wiedzę pozwalają te zadania kontrolować. Rozważmy kilka typowych zadań ze wspomnianych egzaminów.

1) Ze zbioru $A = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{4}t^2 - t + (7 - x + \sqrt{68 - x^2}) \geq 0\}$ losujemy kolejno (bez zwrotu) trzy cyfry układając je w kolejności losowania w liczbę trzycyfrową. Zakładając, że wszystkie możliwe

do otrzymania w ten sposób liczby są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 368.[1]

2) Sto osób, wśród których znajdują się panowie A i B, ustawia się w szereg w sposób losowy. Jakie jest prawdopodobieństwo ustawienia, w którym między panami A i B znajduje się dokładnie 40 osób.[2]

3) Przy okrągłym stole posadzono w sposób losowy 16 trenerów drużyn piłkarskich I ligi. Oblicz prawdopodobieństwo, że trener Lecha siedzi obok trenera Widzewa, pod warunkiem, że trener Ruchu siedzi obok trenera Górnika.[3]

Można dyskutować, czy zacytowane zadania są w ogóle zadaniami z rachunku prawdopodobieństwa. Zadanie 1 dotyczy i sprawdza wiadomości w zakresie rozwiązywania równań z parametrem, funkcji kwadratowej i teorii zbiorów. Pytanie o prawdopodobieństwo jest tu raczej pozbawione sensu. Rachunki w zasadzie obejmują obliczanie mocy pewnych zbiorów. Zadanie to (choć mowa w nim o losowaniu i prawdopodobieństwie) nie ma w istocie wiele wspólnego z rachunkiem prawdopodobieństwa. Można toczyć spory, czy i jaką wiedzę z rachunku prawdopodobieństwa pozwala ono kontrolować i oceniać. Rozwiązywanie tego zadania nie obejmuje nawet konstrukcji przestrzeni probabilistycznej, w której rozwiązuje się (poprawnie) każdy problem probabilistyczny (rozwiązujący nawet nie musi rozstrzygnąć czy wyniki są jednakowo prawdopodobne, bo to zawarto w treści zadania).

Zadania 2 i 3 są w zasadzie zadaniami kombinatorycznymi. Cała trudność przy ich rozwiązywaniu sprowadza się do wyznaczenia (za pomocą odpowiednich wzorów) mocy pewnych zbiorów. Ponadto ich treść tylko z pozoru jest opisem pewnej rzeczywistej sytuacji.

Tego typu zadania z rachunku prawdopodobieństwa rozpowszechniano w ostatnich latach poprzez publikowane zbiory zadań maturalnych i egzaminacyjnych (por. [1]). Tematyka tych zadań nie ukazuje prawdziwego obrazu przedmiotu rachunku prawdopodobieństwa, natury jego pojęć i jego problematyki. Taka forma zadań (a także ich treść) służących do kontroli wiedzy probabilistycznej nie może nie mieć wpływu na sposób nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole. Nauczanie to zostaje sprowadzone do rozwijania technik rachunkowych i to w zasadzie dotyczących kombinatoryki. Podstawowymi usterkami takiego nauczania są:

1) sztuczna tematyka zadań,

[1]egzamin maturalny w woj. olsztyńskim, 1993r., profil mat.-fiz.

[2]egzamin maturalny w woj. łomżyńskim, 1993r, profil mat.-fiz.

[3]egzamin wstępny z matematyki na kierunki: Informatyka i Matematyka na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w 1993r

2) brak konstrukcji przestrzeni probabilistycznej[4], w której rozwiązuje się zadanie na obliczanie prawdopodobieństwa (chodzi tu o organizację fazy matematyzacji jako typową w rachunku prawdopodobieństwa aktywność matematyczną),
3) brak ustalonej definicji prawdopodobieństwa (najczęściej wspomina się o „klasycznej definicji", która nie jest definicją i jej zakres stosowania jest ograniczony, albo mówi się o aksjomatycznej definicji, która w zasadzie nie nadaje się do rachunków),
4) rozwiązywanie zadań nie obejmuje fazy interpretacji (chodzi o formułowanie wniosków wynikających dla praktyki z wielkości obliczonego prawdopodobieństwa).

Te uwagi i zarzuty stawiane problematyce zadań z rachunku prawdopodobieństwa sformułowano w większości odpowiedzi na ankietę „rachunek prawdopodobieństwa w twoich szkolnych wspomnieniach" zaproponowaną absolwentom szkół średnich (w większości byli to nauczyciele, w tym także słuchacze studiów podyplomowych i zaocznych, por. [5]).

Zadania z rachunku na egzamin wstępny na kierunek matematyka w krakowskiej WSP przygotowuje się od kilku lat w ramach seminarium naukowego ze stochastyki i jej dydaktyki. Chodzi o formułowanie zadań w taki sposób, aby ich rozwiązywanie obejmowało wszystkie etapy rozwiązania zadania probabilistycznego, tj. etap konstrukcji przestrzeni probabilistycznej, jako modelu opisanej w zadaniu sytuacji (doświadczenia losowego), etap rachunków i dedukcji w tej przestrzeni, a oprócz tego kreowały proces stosowania matematyki. Rozwiązywanie obejmuje wówczas organizację fazy matematyzacji (konstrukcję przestrzeni probabilistycznej poprzedza tu przekład pozamatematycznego problemu na język matematyki), oraz fazy interpretacji (chodzi o wnioski jakie z rachunków wynikają na temat wyjściowej sytuacji). W ten sposób można sprawdzać pewne intuicje związane z pojęciami i metodologią rachunku prawdopodobieństwa, a także możliwości w zakresie argumentacji (chodzi o to, by dowiedzieć się, czy i jak egzaminowany rozumie co rachuje i po co). W tym celu na egzaminie wstępnym proponowane są zadania nieco odmienne, niż ma to miejsce na innych uczelniach. Taka forma i problematyka zadań pozwala pełniej kontrolować wiedzę stochastyczną i ogólnomatematyczną przez co łatwiej ocenić predyspozycje kandydata do studiowania matematyki.

[4] jako modelu opisanej w zadaniu sytuacji losowej

2. Zadania z rachunku prawdopodobieństwa na egzaminie wstępnym do krakowskiej WSP w latach 1993-1995

W latach 1993-95 na egzaminie wstępnym do krakowskiej WSP zaproponowano następujące zadania z rachunku prawdopodobieństwa:

Zadanie 1. (1993 r.)

1-1. Z urny o sześciu kulach ponumerowanych liczbami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, losujemy jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) suma numerów wylosowanych kul będzie liczbą parzystą (zdarzenie A),

b) suma numerów wylosowanych kul będzie liczbą nieparzystą (zdarzenie B).

1-2. W grze losuje się równocześnie dwie kule z powyższej urny. Przed losowaniem gracz skreśla na kuponie (rys. 1) jedną z liczb od 3 do 11. Jeśli suma numerów wylosowanych kul jest równa wcześniej skreślonej liczbie, to gracz zdobywa punkt. Czy taka gra przypomina Ci w czymś totolotka i dlaczego? Czym, według Ciebie, różni się ona od prawdziwego totolotka?

1-3. Postanowiłeś wziąć udział w tej grze. Jaką podejmiesz w tej sytuacji decyzję co do wypełniania kuponu?

3	4	5	6	7	8	9	10	11

rys. 1.

Zadanie 2. (1994 r.)

2-1. W urnie U są 3 kule białe i 4 czarne, a w urnie V jest 6 kul białych i 1 czarna. Obie urny są identyczne z wyglądu. Najpierw losujesz jedną z tych urn i nie zaglądając do jej wnętrza losujesz z niej kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?

2-2. Znajdź prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w takim doświadczeniu losowym, gdy w urnie U jest 9 kul białych i 1 czarna, a w urnie V — 2 białe i 8 czarnych.

2-3. Czy dostrzegasz, czym jest zarazem w obu przypadkach policzone prawdopodobieństwo? Czy jest to jakaś prawidłowość czy zbieg okoliczności? Spróbuj ująć tę prawidłowość w formie twierdzenia. Udowodnij je.

Zadanie 3. (1995 r.)

Dane są trzy urny:

— urna u_1 z jedną kulą o numerze 6 i dwiema kulami o numerze 1,

— urna u_2 z jedną kulą o numerze 0 i dwiema kulami o numerze 4,

— urna u_3 z jedną kulą o numerze 2 i dwiema kulami o numerze 3.

3-1. Spośród dwu urn: u_1 i u_2 masz prawo wybrać sobie jedną, drugą bierze Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Na wybór której urny się zdecydujesz i dlaczego?

3-2. Masz prawo wybrać sobie jedną z trzech urn, jedną z dwu pozostałych wybierze sobie Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje następnie liczbę i zwycięża ten, kto wylosuje liczbę większą. Czy jest wśród tych urn najlepsza? Czy prawo pierwszeństwa jest w tej sytuacji dla Ciebie przywilejem? Jak uzasadnisz odpowiedzi na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Te same zadania zaproponowano również 32 studentom III roku matematyki przed rozpoczęciem zajęć z rachunku prawdopodobieństwa. To ci sami studenci, którzy rozwiązywali już zadanie 1 na egzaminie wstępnym w roku 1993.[5]

Niniejsza praca dotyczy analizy rozwiązań tych zadań przez wspomnianych studentów a celem badań było sprawdzenie, czy i w jaki sposób, ogólna wiedza matematyczna zdobyta w czasie studiów (5 semestrów studiowania matematyki) wpływa na sposób rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa. W toku dotychczasowych studiów ci studenci nie zetknęli się z pojęciami i zadaniami z tej dziedziny matematyki. Jednocześnie można sądzić, że znaczna część wiedzy szkolnej z rachunku prawdopodobieństwa została przez nich zapomniana. W rozwiązaniach nie powinno być zatem miejsca na mechaniczne stosowanie pewnych wyuczonych w szkole algorytmów, stosowanych często bez ich zrozumienia. Oczekiwano natomiast, że pomimo braku odpowiednich narzędzi (wzorów i twierdzeń) ogólna kultura matematyczna pozwoli na racjonalne podejście do problemu i inne niż przed laty poprawne jego rozwiązanie.

Analizując prace studentów zwracano w szczególności uwagę na następujące zagadnienia:

(α) Jak rozumiana jest treść zadania;

(β) Jak organizowana jest faza przekładu pozamatematycznego problemu na język matematyki;

(γ) Jak organizowana i przeprowadzana jest faza dedukcji i rachunków;

(δ) W jaki sposób i jakim językiem interpretowane są uzyskane wyniki.

Pierwsze zagadnienie wiąże się z umiejętnością odczytywania tekstu matematycznego. Drugie dotyczy racjonalnego doboru przestrzeni probabilistycznej jako modelu dla doświadczenia losowego opisanego w zadaniu (rozwiązując zadanie można konstruować różne nieizomorficzne modele probabilistyczne).

[5] Trzy osoby z tej grupy, z różnych powodów, nie zdawały tego egzaminu w 1993 r.

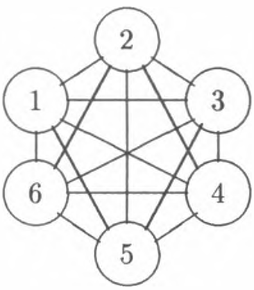
Trzecie zagadnienie dotyczy stosowania matematycznej wiedzy do usprawniania rozwiązania, wykorzystywania analogii i pewnych „symetrii". Ostatnie zagadnienie wiąże się z fazą interpretacji uzyskanych wyników liczbowych w „realnym świecie" a więc z podejmowaniem pewnych praktycznych decyzji w oparciu o wielkości uzyskanych prawdopodobieństw, uogólnianiem pewnych zaobserwowanych faktów, ocenianiem czy zaobserwowane zależności są przypadkowe, czy jest to dająca się udowodnić prawidłowość.

3. Analiza rozwiązań zadania 1

Zadania 1-1 można rozwiązać następująco.

Rysunek 2 prezentuje klasyczną przestrzeń probabilistyczną Ω dla równoczesnego losowania dwu kul z urny.

Zdarzenie B jest w tym ujęciu modelu zbiorem tych odcinków, które łączą wierzchołek „nieparzysty" z „parzystym". Jest takich odcinków $3 \cdot 3$, a więc 9 jest mocą zbioru B. Model jest klasyczny, a zatem $P(B) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. Zdarzenie A jest w tym modelu zbiorem pozostałych odcinków. A i B są zdarzeniami przeciwnymi, a więc $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.



Każdy odcinek reprezentuje inną dwuelementową kombinację zbioru sześciu kul. Wszystkich wyników losowania jest zatem tyle, ile wspomnianych odcinków, a więc $\frac{6 \times 5}{2}$, tj. 15.

rys. 2.

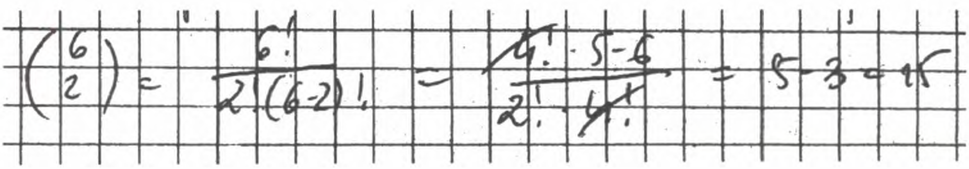
3.1. Analiza rozwiązań zadania 1-1

W pisemnym sprawdzianie wzięło udział 32 studentów III roku matematyki.

— Jedna osoba nie podjęła próby rozwiązania zadania.

— Pozostałe osoby rozwiązanie uzyskały prowadząc rozumowanie w modelu klasycznym i wykorzystując twierdzenie klasyczne rachunku prawdopodobieństwa. Nie wszystkie osoby konstruowały model w sposób jawny.

Zaledwie w 22 pracach znajdują się zapisy pozwalające na jednoznaczne stwierdzenie, jaki model został przyjęty dla doświadczenia opisanego w zadaniu. W jedenastu pracach przedstawiono zbiór Ω poprzez wypisanie możliwych wyników jednoczesnego losowania dwu kul z urny; w dziesięciu przypadkach zbiór ten jest piętnastoelementowy, w jednym przypadku zbiór Ω przedstawiono za pomocą tabeli (macierzy) o wymiarach 6×6 bez przekątnej (jednoczesne losowanie dwu kul z urny zostało zastąpione dwukrotnym losowaniem bez zwracania kuli z urny). Jedenaście osób z tej grupy nic nie wspomina o zbiorze Ω i ogranicza się do podania wyników, które sprzyjają zdarzeniom A i B. Pozostałe 9 osób prowadzi jedynie pewne rozumowania, oparte na kombinatorycznych wzorach, które pozwalają im na wyznaczenie mocy pewnych zbiorów. Liczby występujące w rachunkach pozwalają wnioskować, że obliczane są moce zdarzeń A i B. Przykład najczęściej prowadzonego rozumowania przedstawia rys. 3.



rys. 3.

Po obliczeniu mocy zdarzeń A i B wszyscy rozwiązujący (31 osób), korzystają z twierdzenia klasycznego do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A. Prawdopodobieństwo zdarzenia B siedem osób oblicza za pomocą twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego, pozostali korzystają ponownie z twierdzenia klasycznego.

W dwóch rozwiązaniach wystąpiły błędy, których źródło tkwi w braku konstrukcji zbioru Ω. W pierwszym przypadku poprawnie wyznaczono wyniki sprzyjające zdarzeniom A i B (w omawianym rozwiązaniu są one podzbiorami 15 elementowego zbioru Ω). Błąd powstał przy obliczaniu prawdopodobieństw zdarzeń. Obliczono je dzieląc moce zbiorów A i B przez $5 \cdot 6$ a więc przez 30 (należało podzielić przez 15). W drugim przypadku w pracy widnieje jedynie następujący błędny zapis: $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$. Być może zapis jest efektem następującego rozumowania:

W urnie są kule o numerach parzystych i nieparzystych:

— jeśli wylosujemy dwie kule o numerach parzystych, to suma będzie parzysta,

— jeśli wylosujemy dwie kule o numerach nieparzystych, to suma będzie parzysta,

— jeśli wylosujemy dwie kule: jedną z numerem parzystym a drugą z numerem nieparzystym, to suma będzie nieparzysta,

Są trzy możliwości, zdarzeniu A sprzyjają dwie, zdarzeniu B jedna. Rozwiązanie oparto na niewłaściwym postulacie, że te trzy możliwości są jednakowo prawdopodobne.

3.2. Analiza rozwiązań zadań 1-2. i 1-3

Większość studentów nie miała problemów z rozwiązywaniem zadania 1-2.

Na pytanie „Czy ta gra przypomina Ci totolotka" 24 osoby odpowiedziały twierdząco i wskazały najważniejszą cechę podobieństwa tych dwu gier: w obydwu przed losowaniem skreśla się liczby na kuponach, a o zwycięstwie decyduje przypadek (wygrana jest zmienną losową). Siedem osób nie wypowiada się w ogóle na temat podobieństwa gier.

Podstawową różnicę a więc to, że totolotek jest grą losową a gra z zadania 1 — grą strategiczno-losową, zauważyły 22 osoby, cztery nie wypowiedziały się na temat różnic. Pozostali wskazywali na inne, mniej istotne różnice:

— *w totolotku typujemy numery kul, w grze z zadania — sumę numerów kul,*
— *tu jest tylko* 11 *liczb a w totolotku* 49 *liczb.*
— *w totolotku są mniejsze szanse niż w tej grze.*

W odpowiedzi na pytanie „Jaką podejmiesz decyzję co do wypełniania kuponu?" prawie wszystkie osoby zdecydowały się na wybór liczby siedem. Decyzję uzasadniano następująco:

— *Skreślę* 7 *bo jest najwięcej, aż* 3, *możliwości wylosowania dwóch kul takich, że suma* $= 7$;
— *Skreślę* 7 *ponieważ prawdopodobieństwo wylosowania kul wynosi* $\frac{3}{5}$.

W kilku pracach wnioskowania te poparto konstrukcją nowego modelu probabilistycznego, generowanego przez zmienną losową X, która losowanym kulom przypisuje sumę ich numerów. W tym modelu wynikami są sumy wylosowanych kul. W pozostałych pracach ograniczono się jedynie do wypisania trzech wyników, które dają sumę 7.

W dwu przypadkach swoją decyzję uzasadniano następująco:

— *W podanym kuponie skreśliłabym na pewno liczbę nieparzystą, bo prawdopodobieństwo, że suma jest liczbą nieparzystą jest większe od zdarzenia A.*[6] *Myślę, że wybrałabym* 7.
— *Skreślę liczbę nieparzystą, gdyż prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzystą jest większe od tego, że suma wylosowanych*

[6] jest to dosłowny cytat

liczb będzie liczbą parzystą. Nie będę skreślać 3 *i* 11, *bo prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma daje* 3 *i* 11 *jest najmniejsze, wynosi ono* $\frac{1}{15}$. *Skreślę* 7 *bo prawdopodobieństwo liczb, których suma daje* 7 *jest największe i wynosi* $\frac{1}{5}$. *Prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma daje* 5 *lub* 9 *jest już mniejsze i wynosi* $\frac{2}{15}$.

Ostatnie stwierdzenia nie są poprawne. Z faktu, że prawdopodobieństwo zdarzenia {*suma numerów wylosowanych kul będzie nieparzysta*} jest większe od prawdopodobieństwa zdarznia {*suma numerów wylosowanych kul będzie parzysta*} nie wynika, że liczba na którą warto postawić jest liczbą nieparzystą. Pomimo braku odpowiednich narzędzi prawie wszyscy podejmowali próbę atakowania problemu, co dobrze ilustruje następujący fragment rozwiązania zaczerpnięty z pracy studenta.

Muszę przyznać, że nie do końca pamiętam wzory na kombinacje, permutacje i wariacje. Nie chciałbym się pomylić więc spróbuję to zrobić w trochę inny sposób. Mogą być pary:

$$\begin{array}{lllll}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & \\
(3,4) & (3,5) & (3,6) & & \\
(4,5) & (4,6) & & & \\
(5,6) & & & &
\end{array}$$

Więcej par nie ma bo np. para $(5,6)$ *i* $(6,5)$ *to w treści zadania to samo. Wszystkich możliwości jest więc* 15. *Przy okazji pogrupowałem rozwiązanie (trochę nieświadomie) w kolumny, w których sumy liczb są parzyste i nieparzyste (naprzemian). Prawdopodobieństwo* $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ *(Wszystkich możliwości jest* 15, *sześć par daje liczbę parzystą).*

4. Analiza porównawcza rozwiązań zadania 1 na egzaminie wstępnym i po pięciu semestrach studiowania matematyki

Analizie porównawczej poddano prace z rozwiązaniami zadania 1 dwudziestu dziewięciu studentów[7] III roku matematyki, którzy przed trzema laty rozwiązywali to samo zadanie na egzaminie wstępnym. Analizę przeprowadzono porównując imiennie obie wersje ze szczególnym zwróceniem uwagi na podobieństwa i różnice indywidualnie każdej pary prac. Porównywano jak te same osoby kiedyś i dzisiaj rozwiązywały to samo zadanie. Celem tego porównania

[7]Na sprawdzianie zadanie to rozwiązywało 32 studentów, z których trzech nie pisało egzaminu wstępnego (dołączyli do grupy w trakcie I i II roku studiów).

było uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy i jak studia matematyczne wpływają na sposób rozwiązywania zadania z rachunku prawdopodobieństwa przed rozpoczęciem kursu tego przedmiotu (w programie studiów matematycznych w krakowskiej WSP zajęcia z rachunku prawdopodobieństwa rozpoczynają się w VI semestrze). W szczególności interesowano się jak dotychczas zdobyta wiedza z innych działów matematyki (zwłaszcza z logiki i teorii mnogości) wpływa na umiejętność organizacji trzech faz procesu stosowania matematyki (por [2]). W tym celu w analizie porównawczej rozwiązań brano pod uwagę następujące kryteria:

— sposób konstrukcji modelu probabilistycznego;
— dobór środków matematyzacji i argumentacji (porównywanie, formułowanie i wyciąganie wniosków, dostrzeganie analogii i istotnych różnic);
— racjonalizację rachunków;
— umiejętność posługiwania się językiem matematycznym;
— umiejętność redagowania tekstu (forma prezentacji rozwiązania).

W wyniku prowadzonej, według powyższych kryteriów, analizy 29 par prac wyodrębniono dwie grupy:

I grupę (20 prac), w której zauważono pewną „poprawę" sposobu rozwiązania,

II grupę (9 prac), w której można dostrzec, w przeciwieństwie do grupy I, pewnego rodzaju „pogorszenie" wyników.

W pracach I grupy „poprawa" dotyczyła:

a) logiki, konsekwencji i racjonalizacji prowadzonych rozumowań czyli:
   — konstrukcji modelu właściwego dla danego doświadczenia losowego,
   — racjonalnego korzystania z modelu,
   — umiejętności formułowania wniosków,
   — podejmowania racjonalnych decyzji w oparciu o wielkości obliczonych prawdopodobieństw,
   — dostrzegania i opisywania istotnych różnic i podobieństw,
b) zastąpienia mechanicznego stosowania wyuczonych schematów (algorytmów) prowadzeniem rozumowania zgodnie z naturalną dedukcją (zdrowym rozsądkiem), czyli:
   — konstruowania modelu bez zbędnej formalizacji,
   — zaniechania niepotrzebnego, w tym zadaniu, stosowania wzorów kombinatorycznych,

— rezygnacji ze zbędnego, w tym przypadku, obliczania wartości oczekiwanej na rzecz rozsądnych wnioskowań,

c) sposobu redakcji i prezentacji rozwiązania.

Do omawianej I grupy prac zaliczono również dwie prace, w których nie można zaobserwować poprawy, ponieważ zarówno na egzaminie wstępnym jak i teraz zaprezentowano w pełni poprawne rozwiązanie. W grupie tej znalazły się ponadto dwie prace, w których poprawa dotyczyła rozumowania (patrz punkt a)), niestety sposób ich redakcji pozostawia wiele do życzenia.

Zaprezentowane zestawienie nie jest klasyfikacją, niektóre prace są zaliczane jednocześnie do kilku grup.

Zauważone postępy ilustrują następujące przykłady zaczerpnięte z prac.

Poprawa rozumowania w zakresie konstrukcji modelu

Fragment rozwiązania studentki z egzaminu wstępnego

$\Omega = \{(x,y) : x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, A — *zdarzenie polegające na tym, że suma numerów wylosowanych kul będzie liczbą parzystą, Zdarzenie to zajdzie, gdy wylosujemy:*

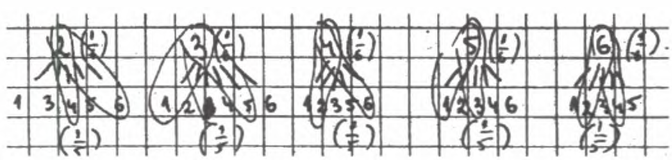
1° dwie liczby parzyste, $(2,4,6)$

2° dwie liczby nieparzyste, $(1,3,5)$

$N(\Omega) = C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$, $N(A) = C_3^2 + C_3^2 = 6$, $P(A) = \frac{6}{15}$.

Fragment rozwiązania tej samej studentki ze sprawdzianu przed VI semestrem:

Na początku rozwiązania pojawia się rysunek:



rys. 4.

a następnie zapis:

Aby wylosowane kule miały numery, aby ich suma była liczbą parzystą, to mogą to być dwie kule o numerach parzystych, albo dwie kule o numerach nieparzystych.

$P(A_1)$ = *prawdop. tego, że dwie kule mają nr. parzyste,*

$P(A_2)$ = *prawdop. tego, że dwie kule mają nr. nieparzyste,*

$P(A)$ = *prawdop. tego, że suma nr. wylosowanych kul jest parzysta.*

$P(A) = P(A_1)+P(A_2)$, $P(A_1) = 3\cdot(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5})$, $P(A_2) = 3\cdot(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$ $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

Prawdopodobieństwo wylosowania kul o numerach, których suma jest parzysta, wynosi $\frac{2}{5}$.

Przytoczone cytaty ilustrują istotną poprawę dotyczącą rozumowania. Na egzaminie rozwiązanie uzyskano stosując pewien wyuczony w szkole algorytm, bez głębszego jego zrozumienia. W pierwszym kroku studentka opisuje przestrzeń wyników jako zbiór dwuwyrazowych wariacji zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, a następnie oblicza $N(\Omega)$ i $N(A)$ korzystając ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji zbioru sześcioelementowego.[8] Analizując rozwiązanie można wnioskować, że studentka myśli o wynikach doświadczenia jako o dwuelementowych podzbiorach. Przyczyną błędu w zapisie mogła być zbyt powierzchowna wiedza w zakresie logiki. W rozwiązaniu zauważa się tendencję do zbyt dużej, niepotrzebnej w tym przypadku, formalizacji zapisu (por. [5].[9]) Rozwiązując to samo zadanie po upływie dwóch i pół roku studiowania matematyki studentka nie pamięta o „szkolnym algorytmie rozwiązywania", ale analizując treść zadania uzyskuje poprawne rozwiązanie. Rozumowanie rozpoczyna od wyznaczenia (w formia ikonicznej) wszystkich wyników doświadczenia i określenia ich prawdopodobieństw. Następnie „rozkłada" zdarzenie A na dwa zdarzenia rozłączne, A_1 oraz A_2 i wyznacza wyniki sprzyjające tym zdarzeniom. Ostatnim krokiem jest obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A_1 i A_2. Studentka liczy je tak jakby korzystała z definicji prawdopodobieństwa.[10] Należy tu zwrócić uwagę, że studentka nie zna tej definicji a jej sposób obliczania prawdopodobieństwa jest konsekwencją poprawnie prowadzonego rozumowania.

Poprawa rozumowania w zakresie formułowania wniosków i podejmowania decyzji

Fragment rozwiązania studenta z egzaminu wstępnego (zad 1-3):

Przypuszczalnie gracz będzie skreślał liczby nieparzyste, a więc 3, 5, 7, 9, 11, *ponieważ wyżej dowiedliśmy, że wylosowanie kul, których suma numerów jest nieparzysta jest większe.*

---

[8] symbol $N(C)$ oznacza liczbę elementów zbioru C

[9] tę formalizację ilustruje cytat z zeszytu ucznia: *Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych dla dwukrotnego rzutu monetą:* $\Omega = \{\omega : \omega = (m_1, m_2) \wedge m_i \in \{O, R\} \wedge i = 1,2\}$, $l(\Omega) = W_2^2 = 2^2 = 4, W_n^k = n^k = 4$

[10] chodzi tu o definicję prawdopodobieństwa proponowaną w [6]

Fragment rozwiązania tego samego studenta ze sprawdzianu przed VI semestrem:

Wiemy, że wylosowanie kul, których suma jest liczbą nieparzystą jest bardziej prawdopodobne, niż gdy jest parzystą, dlatego na kuponie na pewno powinienem skreślić liczbę nieparzystą, teraz zobaczę, która z liczb od 3 *do* 11 *(oczywiście nieparzystych) występuje najczęściej jako suma numerów dwu kul. Jest to liczba* 7, *bo sprzyjające takiemu wynikowi są losowania:* $(1,6)$ $(2,5)$ $(3,4)$

Rozumowanie przedstawione na sprawdzianie nie jest w pełni poprawne, gdyż należało rozpatrzyć wszystkie liczby występujące na kuponie. (Z faktu, że prawdopodobieństwo uzyskania liczby nieparzystej jest większe niż prawdopodobieństwo uzyskania parzystej, nie wynika, że liczbą na którą warto postawić jest liczba nieparzysta.). Pomimo to jednak warto podkreślić, że student zauważa potrzebę weryfikacji postawionej hipotezy.

Poprawa rozumowania w zakresie dostrzegania różnic

Fragment rozwiązania studentki z egzaminu wstępnego (zad 1-2):

Moim zdaniem jest to gra różniąca się nieco od totolotka, ponieważ jest w tej grze do skreślenia tylko jedna cyfra na 9 *możliwości, a w totolotku skreśla się* 5 *cyfr na* 45

Fragment rozwiązania tejże studentki ze sprawdzianu przed VI semestrem:

...w naszej grze prawdopodobieństwo wylosowania 1 *jest* $\frac{1}{15}$, *natomiast* $7 - \frac{3}{15}$.

Na egzaminie wstępnym studentka podała jedynie niezbyt istotną różnicę a obecnie zauważa, że opisana w zadaniu gra jest strategiczno-losowa, bo nie wszystkie wyniki, na które stawia się w grze, są jednakowo prawdopodobne.

W pracach II grupy „pogorszenie” zaobserwowano w następujących aspektach:

a) brak logiki i konsekwencji w prowadzonych rozumowaniach,

— brak konstrukcji modelu probabilistycznego,

— nieumiejętność korzystania z modelu i podejmowania racjonalnych decyzji,

— nieporadność w formułowaniu wniosków,

— niedostrzeganie istotnych różnic i zasadniczych podobieństw,

b) bezradność rozwiązującego w przypadku, gdy nie pamięta on wzorów z rachunku prawdopodobieństwa poznanych w szkole średniej (student nie szuka innych dróg rozwiązania),

c) sposób redakcji tekstu matematycznego,

— brak objaśnień używanej symboliki,

— kolizje oznaczeń,

— brak komentarzy,

— nieporządek w zapisach,

— nieprecyzyjność sformułowań.

Do omawianej II grupy prac zaliczono ponadto dwie prace, które prezentowały ten sam poziom w obydwu wersjach (były słabe i są słabe, studenci nie zrobili postępów).

Powyższe spostrzeżenia ilustrują przykłady.

Pogorszenie rozumowania w zakresie konstrukcji modelu

Fragment rozwiązania studentki z egzaminu wstępnego (zad 1-1)

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na wyciągnięciu kul, których suma numerów będzie liczbą parzystą
$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}$
$A = \{13, 15, 24, 26, 35, 46\}$, $\#A = 6$ $P(A) = \frac{6}{15}$.

Studentka obliczyła następnie w analogiczny sposób prawdopodobieństwo zdarzenia B.

W rozwiązaniu zadania 1-1 przez tę studentkę na sprawdzianie przed VI semestrem pojawił się bez żadanego komentarza błędny zapis: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, którego próbę interpretacji przedstawiono już na str 43.

Pogorszenie rozumowania w zakresie dostrzegania istotnych różnic

Fragment rozwiązania studenta z egzaminu wstępnego (zad 1-2):

... w naszej grze (...) skreślenie liczby 6 *jest korzystniejsze dla nas niż skreślenie liczby* 3. *Aby się o tym przekonać rozpatrzmy dwa zdarzenia:*
X — *suma numerów wylosowanych kul wynosi* 3
Y — *suma numerów wylosowanych kul wynosi* 6
$X = \{\{1,2\}\}, \#X = 1,\ Y = \{\{1,5\},\{2,4\}\}, \#Y = 2,\ P(X) = \frac{1}{15},\ P(Y) = \frac{2}{15}$
Prawdopodobieństwo zdarzenia Y *jest większe niż prawdopodobieństwo zdarzenia* X.

Fragment rozwiązania tegoż studenta ze sprawdzianu przed VI semestrem:

[Gra] *różni się od totolotka tym, że w naszej grze skreślamy na kuponie sumę wylosowanych kul, a w totolotku skreślamy wylosowane liczby.*

Jedna ze studentek na egzaminie rozwiązała poprawnie zadania 1-1 i 1-3, a na sprawdzianie ograniczyła się do rozwiązania tylko zadania 1-1. Inna studentka na egzaminie rozwiązała zadanie 1-1, na sprawdzianie stwierdziła: *Nie potrafię rozwiązać tego zadania.*

Reasumując, wyniki analizy porównawczej ukazują pozytywny wpływ dotychczasowych studiów matematycznych na rozwój zdolności doboru matematycznych środków argumentacji przy rozwiązywaniu zadań stochastycznych. Na 29 analizowanych par prac zaobserwowano tylko 7 prezentujących gorszy poziom w stosunku do egzaminu wstępnego. Pozostali, pomimo braku odpowiednich narzędzi (zapomniane wzory i twierdzenia), wykazali się lepszą umiejętnością organizacji wszystkich trzech faz procesu stosowania matematyki.

5. Analiza rozwiązań zadania 2

Zadanie 2-1 jest tradycyjnym zadaniem na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia. Zadanie można rozwiązać trzema sposobami (por. [3]). Przedstawmy te dwa z nich, które pojawiły się w analizowanych pracach.

Sposób 1.

Rozważmy następujące zdarzenia:

A_U — zostanie wylosowana urna U,

A_V — zostanie wylosowana urna V,

C — zostanie wylosowana kula czarna.

Z treści zadania wynika, że suma zdarzeń A_U i A_V jest zdarzeniem pewnym, $A_U \cap A_V = \emptyset$ oraz, że $P(A_U) = P(A_V) = \frac{1}{2}$. W urnie U są 3 kule białe i 4 czarne, a w urnie V jest 6 białych i jedna czarna więc $P(C|A_U) = \frac{4}{7}$ i $P(C|A_V) = \frac{1}{7}$. Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy:

$$P(C) = P(A_U)P(C|A_U) + P(A_V)P(C|A_V) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{5}{14}.$$

Sposób 2.

Opisane w tym zadaniu doświadczenie losowe jest dwuetapowe. Pierwszy etap (nazwijmy go wstępnym) to losowanie jednej z dwóch urn, drugi — to losowanie kuli z wylosowanej urny. Skonstruujmy probabilistyczny model tego doświadczenia korzystając z drzewa stochastycznego z rysunku 5. Modelem probabilistycznym jest tu para (Ω, p), gdzie

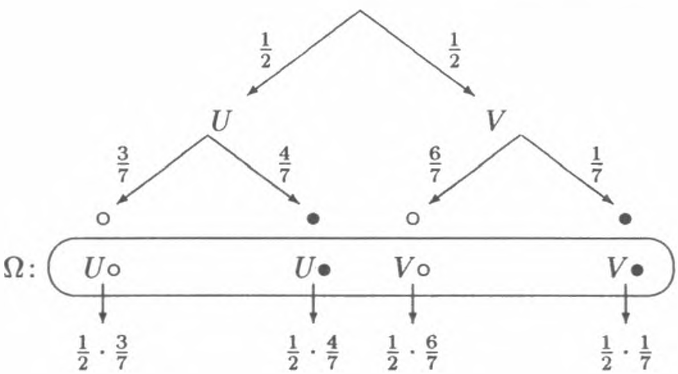
$$\Omega = \{U\circ, U\bullet, V\circ, V\bullet\},$$

p zaś jest funkcją określoną następująco:

$\omega \in \Omega$:	$U\circ$	$U\bullet$	$V\circ$	$V\bullet$
$p(\omega)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

Rozważmy zdarzenie $C = \{$*wylosowana kula będzie czarna*$\}$. W modelu probabilistycznym (Ω, p) jest $C = \{U\bullet, V\bullet\}$, a więc

$$P(C) = p(U\bullet) + p(V\bullet) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}.$$



rys. 5.

Zadanie 2-2 różni się od zadania 2-1 tylko danymi liczbowymi, a zostało ono umieszczone jedynie po to, aby sugerowało odkrycie twierdzenia, o którym mowa w zadaniu 2-3. Dla danych z zadania 2-2 mamy $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{9}{20}$.

Rozwiązanie zadania 2-3 wymaga przeanalizowania danych zawartych w zadaniach 2-1 i 2-2, a także zinterpretowania uzyskanych w tych zadaniach wyników liczbowych. Zadanie to sprawdza umiejętność formułowania wniosków z uzyskanych wyników liczbowych i uogólniania ich w formie twierdzenia. Wartości prawdopodobieństw uzyskane w zadaniach 2-1 i 2-2 można zinterpretować następująco:

W zadaniu 2-1 mamy: $P(C) = \frac{5}{14}$, w zadaniu 2-2 mamy: $P(C) = \frac{9}{20}$. W obydwu przypadkach policzone prawdopodobieństwo jest stosunkiem liczby kul czarnych w obydwu urnach do liczby wszystkich kul w tych urnach (liczba kul w poszczególnych urnach została tak dobrana, aby w każdym przypadku uzyskane wyniki liczbowe były ułamkami nieskracalnymi). Wartość $P(C)$ można więc zinterpretować jako prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z urny powstałej ze zsypania wszystkich kul z tych dwu urn. Ale liczby kul w urnach U i V są równe. Czy ta równość jest istotna? Jak to rozstrzygnąć? Są to kolejne pytania, które powinny pojawić się w trakcie rozwiązywania zadania. Sformułujmy (w formie hipotezy) następujące twierdzenie:

Jeżeli w urnie U jest b_1 kul białych, c_1 kul czarnych, a w urnie V b_2 kul białych, c_2 kul czarnych oraz $b_1 + c_1 = b_2 + c_2 = s$, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej według schematu opisanego w zadaniu 2-1 *jest równe prawdopodobieństwu wylosowania kuli z urny, w której jest $b_1 + b_2$ kul białych i $c_1 + c_2$ kul czarnych (tj. urny powstałej ze zsypania do jednego pojemnika zawartości obu urn U i V).*

Postępując analogicznie jak przy rozwiązaniu zadania 2-1 otrzymujemy

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{b_1 + c_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{b_2 + c_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s}\right) = \frac{c_1 + c_2}{2s}.$$

5.1. Prezentacja rozwiązań zadań 2-1 i 2-2.

Zadania 2-1 rozwiązywało 32 studentów, z których 25 uzyskało poprawne wyniki

— bądź korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym — sposób 1 (postąpiło tak 16 osób, lecz tylko jedna sprawdziła, czy spełnione są założenia twierdzenia),

— bądź konstruując model za pomocą drzewa — sposób 2 (postąpiło tak 9 osób).

Z pozostałych siedmiu osób dwie nie rozwiązały zadania, a pięć zamieściło chaotyczne i niepoprawne rachunki nie prowadzące do oczekiwanego wyniku.

Poniższe cytaty pochodzą z prac, w których wykonywano niezrozumiałe obliczenia:

$P(U)$ — *prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z urny U,*
$P(V)$ — *prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z urny V,*

$$P = \frac{1}{2}P(U) \cdot P(V)$$

$P(U) = \frac{4}{7}$, $P(V) = \frac{1}{7}$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{98} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$.

— *a) zd A) losuję urnę U*, $P(A) = \frac{4}{7}$,
zd B) losuję urnę V, $P(B) = \frac{1}{7}$,

$$P(A) \cap P(B) = \frac{1}{7}$$

b) zd A) losuję urnę U, $P(A) = \frac{1}{10}$,
zd B) losuję urnę V, $P(B) = \frac{8}{10}$,

$$P(A) \cap P(B) = \frac{1}{10}$$

W obu przypadkach prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest prawdopodobieństwem wylosowania czarnej kuli z urny gdzie prawdopodobieństwo to jest mniejsze.

W rozwiązaniach tych zauważyć można dodatkowo błędy wynikające z mylenia pojęć: zdarzenie i jego prawdopodobieństwo, iloczyn zdarzeń i iloczyn prawdopodobieństw.

Zadanie 2-2, różniące się od poprzedniego tylko danymi liczbowymi każdy rozwiązywał sposobem stosowanym w rozwiązaniu zadania 2-1. Tu również uzyskano 25 poprawnych odpowiedzi (kto nie rozwiązał zadania 2-1 nie rozwiązał też zadania 2-2).

5.2. Analiza rozwiązań zadania 2-3

Analizując rozwiązania zadania 2-3 można stwierdzić, że 11 osób nie zauważyło tezy, o jaką tu chodzi, w tym:

— dwie osoby wcale nie rozwiązały zadania, więc nie mogły niczego zaobserwować,

— pięć osób rozwiązało zadanie błędnie, nie zauważyło więc występującej w zadaniu prawidłowości,

— trzy osoby, mimo dobrych wyników liczbowych, nie zauważyły żadnej prawidłowości,

— jedna popełniła błąd rachunkowy w drugiej części zadania, więc nie dostrzegła prawidłowości.

Pozostali (21 osób) zauważyli prawidłowość, o którą chodzi w zadaniu i różnie ją formułowali np:

— *Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest w obu przypadkach wyrażone stosunkiem ilości kul czarnych do ilości wszystkich kul.*

— *W obu przypadkach prawdopodobieństwo jest prawdopodobieństwem wylosowania kuli czarnej z urny gdyby wszystkie kule były w jednej urnie.*
— *Obliczone prawdopodobieństwo wyraża sumę czarnych kul w obu urnach przez sumę wszystkich kul w obu urnach.*
— *Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej będzie takie samo, gdy wrzucimy kule z urn U i V do jednej i będziemy losować z tej jednej.*
— *Prawdopodobieństwo w obu przypadkach liczymy jakby kule znajdowały się w jednej urnie.*
— *Prawdopodobieństwo wylosowania kul czarnych z obu urn sumuje się i wynosi tyle ile prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej spośród kul z urn $U+V$.*
— *...prawdopodobieństwo jest łączną sumą czarnych kul w obu urnach.*
— *...prawdopodobieństwo jest w obu przypadkach ilorazem ilości wszystkich kul czarnych przez ilość wszystkich kul w obu urnach.*
— *...prawdopodobieństwo to jest równe średniej arytmetycznej odpowiednich prawdopodobieństw dla każdej z urn.*

Stwierdzenia te nie są w pełni poprawne, gdyż brak jest stosownych założeń, a część z nich jest błędna. Niektórzy (z tych 21 osób) poprzestali na takim sformułowaniu, inni (11 osób) próbowali ująć swoje spostrzeżenia w formie twierdzenia. Udało się to siedmiu osobom, w tym tylko pięć podało poprawny dowód twierdzenia (jedna z nich podała i udowodniła twierdzenie ogólniejsze dla n równolicznych urn).

Prześledźmy fragment jednej pracy ilustrujący proces odkrywania i formułowania twierdzenia.

W obu przypadkach[11] *policzone prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest takie samo jakbyśmy wrzucili wszystkie kule z obu urn do jednej urny i z tej jednej urny losowali kulę czarną. Ale czy ważne to, że w obu urnach jest taka sama liczba kul?*

Weźmy urnę U jak w zadaniu 1-1 i weźmy urnę U', która ma dwie kule czarne i 3 białe.

Policzę prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej opisaną metodą

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=(\ldots)=\frac{17}{35}$$

A gdybyśmy kule z urn U i U' wrzucili do jednej to prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej wyniesie $\frac{1}{2}$ Czyli ta prawidłowość zachodzi dla dwóch urn o równych liczbach kul.

Spróbuję teraz sformułować jakieś twierdzenie.

[11]chodzi tu o prawdopodobieństwo obliczone w zad 2-1 i 2-2

Mamy dwie urny U i V. W obu urnach jest po k kul. W urnie U jest m kul czarnych a reszta białych, w urnie V n kul czarnych , reszta białych. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej metodą jak wyżej jest takie samo jak prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z urny do której wsypano zawartość urn U i V.

Dowód

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej metodą jak wyżej

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{k}=\frac{1}{2}\frac{m+n}{k}=\frac{m+n}{2k}$$

Kul w urnie jest $2k$ a kul czarnych $m+n$. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z jednej urny wynosi $\frac{m+n}{2k}$

Pokazałem tę równość ckd.

Warto zauważyć, że powyższy cytowany fragment oraz fragment rozwiązania cytowany w zadaniu 1 (ilustrujący proces atakowania problemu pomimo braku odpowiednich narzędzi) pochodzą z tej samej pracy, autor tej pracy na egzaminie wstępnym nie rozwiązał zadania z rachunku prawdopodobieństwa.

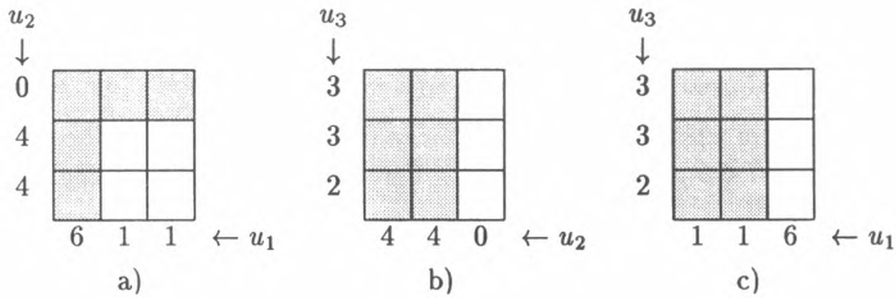
Podsumowując rozwiązania zadań 2-1 i 2-2 można stwierdzić, że przeważająca większość osób, które podjęły próbę ich rozwiązania, uzyskała poprawne wyniki. Jednak nie wszystkie rozwiązania są kompletne. W wielu wypadkach zabrakło komentarzy objaśniających sposób rozwiązania i prowadzone rachunki. Szczególnie jest to widoczne w grupie osób, które stosowały twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Można przypuszczać, że wiele z nich rozwiązywało to zadanie według poznanego w szkole schematu (algorytmu).

Niepokojącym jest to, że tylko nieliczne osoby (po pięciu semestrach studiów matematycznych) są świadome, że wykorzystując tezę twierdzenia należy sprawdzić, czy spełnione są jego założenia.

Zadanie 2-3. nie było typowe. Do problematyki probabilistycznej włączono idee związane z logiką (formułowanie i weryfikacja pewnego twierdzenia). Istotność założenia, że w urnach jest taka sama liczba kul, ujawnia się dopiero podczas prowadzenia dowodu, którego w wielu pracach zabrakło. Być może właśnie to jest przyczyną gorszych wyników niż w przypadku dwóch poprzednich części tego zadania.

6. Analiza rozwiązań zadania 3

Najkrótszy sposób rozwiązania zadania uzyskać można stosując formę ikoniczną (miarowa interpretacja przestrzeni probabilistycznej, [6]).



rys. 6.

Zakreskowane oczka kwadratu na rysunku

— 6a) prezentują wyniki sprzyjające zdarzeniu

$A_1 = \{$*wygra gracz losujący kulę z urny* u_1, *gdy przeciwnik losuje z urny* $u_2\}$,

— 6b) prezentują wyniki sprzyjające zdarzeniu

$A_2 = \{$*wygra gracz losujący kulę z urny* u_2 *gdy przeciwnik losuje z urny* $u_3\}$,

— 6c) prezentują wyniki sprzyjające zdarzeniu

$A_3 = \{$*wygra gracz losujący kulę z urny* u_3 *gdy przeciwnik losuje z urny* $u_1\}$.

Prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń wynoszą odpowiednio

$$P(A_1) = \frac{5}{9}, \quad P(A_2) = \frac{6}{9}, \quad P(A_3) = \frac{6}{9}.$$

Zatem urna u_1 jest lepsza od urny u_2, urna u_2 lepsza od urny u_3, a urna u_3 lepsza od urny u_1. Wśród urn u_1, u_2, u_3 nie ma urny najlepszej.

Zestawienie liczbowe dotyczące rozwiązań zadania 3 ilustruje poniższa tabela[12].

	ROZWIĘZANIE		
	POPRAWNIE	BŁĘDNIE	BRAK
(α)	17	14	1
(β)	5	—	27
(γ)	11	7	14
(δ)	11	16	5

Omówimy teraz rozumienie treści zadania (zagadnienie (α)).

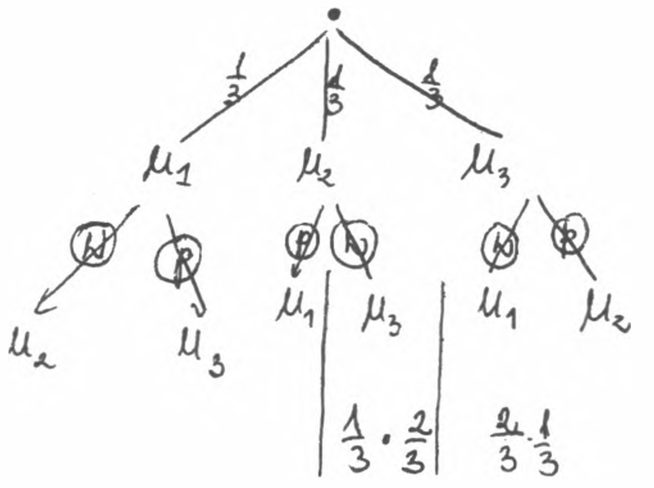
[12]symbole: (α), (β), (γ), (δ) określono na str. 41

1) Liczne błędy potwierdzają, że nie zrozumiano zasad gry. Interesowano się wyłącznie szansami wylosowania kuli o większym numerze z wybranej urny i natychmiast formułowano wnioski:

Urna u_2 jest lepsza, bo prawdopodobieństwo wylosowania z niej liczby większej (4) wynosi $\frac{2}{3}$ a prawdopodobieństwo wylosowania z urny u_1 liczby większej (6) wynosi $\frac{1}{3}$;

Z dwu urn u_2 i u_3 wybieram u_2 (lepszą), bo co prawda prawdopodobieństwo wylosowania z tych urn liczby większej jest takie samo (z u_2 liczby 4, z u_3 liczby 3), ale liczba 4 jest większa niż 3.

2) Nie wszyscy właściwie zrozumieli co to znaczy „wybieram urnę". W rozwiązaniach konstruowano drzewo odpowiadające losowaniu urn, np. dla trzech urn przebieg doświadczenia zilustrowano drzewem (rys. 7):



rys. 7.

W tych zapisach w oznacza najprawdopodobniej wygraną, p zaś przegraną, co sugeruje komentarz obok zapisu: $p(w) = \frac{5}{27}$ *prawdopodobieństwo wygranej gdy wybrałem urnę u_1.*

3) Na ogół źle interpretowano zwrot „prawo pierwszeństwa jest przywilejem".

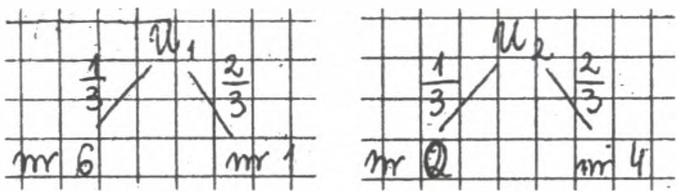
Pierwszeństwo wyboru nie jest przywilejem bo nie daje możliwości stuprocentowej wygranej;

Źle interpretowano zwrot „urna najlepsza".

Wśród urn nie ma najlepszej, która zapewniłaby zwycięstwo;
Nie ma urny najlepszej, bo wybierając urnę zawsze ryzykuję.

Problemy związane z organizacją fazy matematyzacji ((β)) ilustrują poniższe obserwacje:

1) Na ogół nie konstruowano jawnie zbioru Ω wyników (w niektórych przypadkach można się tylko domyślać o jaki zbiór chodzi). Na ogół wypisywane są, lub tylko sygnalizowane pary: pierwszy element to numer kuli wylosowanej z jednej urny, drugi element to numer kuli wylosowanej z drugiej urny, lub rysowane fragmenty drzewa, np.



rys. 8.

2) Konstruowano klasyczną przestrzeń probabilistyczną bez zadumy nad tym, czy jest ona modelem rozważanego doświadczenia losowego. Wyniki doświadczenia zapisano następująco:

6 - 0 +
6 - 4 +
1 - 0 +
1 - 4 -

opatrując ów zapis komentarzem: + *wygrana gra,* — *przegrana gra* i wniosek: *wybieram urnę* u_1 *bo prawdopodobieństwo wygranej wynosi* $\frac{3}{4}$.

Rozróżniano zatem cztery wyniki, które uznano za jednakowo prawdopodobne (niezależnie od faktu że w składzie u_1 są np. dwie kule o nr 1). Bezkrytycznie przyjmowanie w każdej sytuacji postulatu jednakowego prawdopodobieństwa wszystkich wyników, ilekroć są one losowe, jest rezultatem wyłącznego posługiwania się klasycznymi przestrzeniami probabilistycznymi w wielu szkolnych ujęciach rachunku prawdopodobnieństwa.

3) Popełniano błędy w konstrukcji modelu wynikające z niezrozumienia przepisów gry. Zbiór wyników zapisywano (bez komentarza) następująco:

$$W = \{60, 64, 64, 10, 14, 14, 10, 14, 14, 62, 63, 63, 12, 13, 13, 12, 13, 13\}.$$

Zapis sugeruje chęć rozróżniania np. jedynek, ale pomija w wynikach losowania przypadek, gdy jeden z graczy losuje z urny u_2, a drugi z u_3. Pojawił się także „tajemniczy" sposób zapisywania wyników: wybieram urnę u_1 bo:

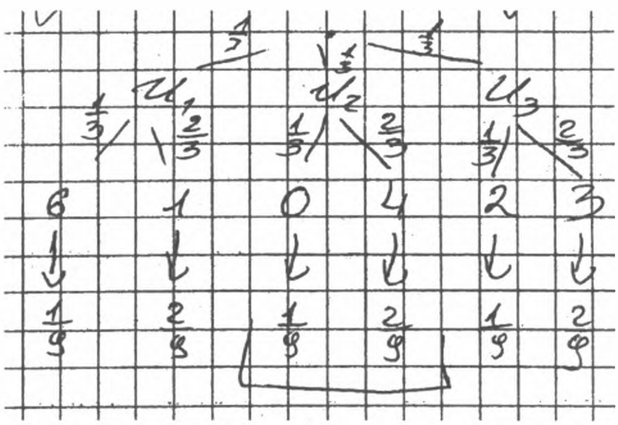
u_1	+	+	+	−	3 : 1
u_2	−	−	−	+	1 : 3

W organizacji fazy rachunków ((γ)) oprócz błędów będących konsekwencją powyższych błędów, pojawiały się błędy dotyczące działań na ułamkach, błędy w mnożeniu, pomijanie niektórych wyników sprzyjających rozważanym zdarzeniom.

W fazie interpretacji ((δ)) formułowane wnioski można podzielić na grupy:

1) Wyciągano błędne wnioski dotyczące wyboru urny spowodowane niezrozumieniem zasad gry zaproponowanej w zadaniu.

W urnie u_3 *wszystkie numery są mniejsze od* 4, *a w urnie* u_2 *dwa numery są mniejsze niż* 4 — *wybieram urnę* u_2*;*
Prawdopodobieństwo wylosowania liczb 3, 4, 1 *z urn* u_3, u_2, u_1 *jest takie samo. Wybieram urnę* u_2 *bo wylosowana* 4 *to największa z liczb* 1, 3, 4*;*
Uważam, że wśród tych urn najlepsza jest urna u_2 *ponieważ największe prawdopodobieństwo* ($\frac{2}{3}$) *ma kula nr* 4 *w losowaniu z urny* u_2, *a kula o nr* 1 *ma największe prawdopodobieństwo wylosowania z urny* u_1, *z urny* u_3 *największe prawdopodobieństwo ma kula nr* 3 *a ponieważ* $4 > 3 > 1$ *zatem urna* u_2 *jest najlepsza;*



rys. 9.

Po wykonaniu rysunku 9 pojawia się komentarz:

...tu widać, że najlepiej wylosować urnę u_2 *ponieważ prawdopodobieństwo wylosowania liczby większej jest* $\frac{2}{9}$, *a przeciwnik jeśli nawet wylosuje urnę* u_3 *to chociaż prawdopodobieństwo wylosowania liczby większej jest też* $\frac{2}{9}$ *ale przecież* $3 < 4$*;*
Wybiorę urnę u_2 *gdyż* $4 > 1$ *a prawdopieństwo wylosowania* 6 *z urny* u_1 *wynosi tylko* $\frac{1}{3}$. *Wybór urny* u_1 *byłby więc dużym ryzykiem;*

Spośród urn u_3 u_2 lepsza jest u_2, gdyż $p(4) = p(3) = \frac{2}{3}$ ale $4 > 3$;

2) Formułowano błędne wnioski pomimo poprawnie skonstruowanego modelu oraz poprawnych rachunków:

u_2 jest najlepszą urną bo największą liczbę można z niej wylosować z największym prawdopodobieństwem;
z urn u_1 u_2 lepsza jest u_1
z urn u_2 u_3 lepsza jest u_2
z urn u_3 u_1 lepsza jest u_3
wybieram urnę u_2 bo: gdy mam urnę u_1 a przeciwnik jedną z dwu pozostałych to prawdopodobieństwo mojej wygranej wynosi $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$ gdy mam urnę u_2 to prawdopodobieństwo mojej wygranej wynosi $\frac{4}{9} + \frac{6}{9} = \frac{10}{9}$
gdy mam urnę u_3 to prawdopodobieństwo mojej wygranej wynosi $\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9}$.

W ostatnim wniosku pojawia się zatem sumowanie prawdopodobieństw zwycięstw przy dwu różnych zestawach rekwizytów, np. $\frac{5}{9}$ to prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza losującego kulę z urny z u_1, gdy przeciwnik losuje kulę z urny u_2, a $\frac{3}{9}$ — to prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza losującego z u_1, gdy przeciwnik losuje z u_3. Fakt, że jedna z tych sum przekroczyła jedynkę nie budzi u rozwiązującego żadnych zastrzeżeń, co więcej, preferuje ten przypadek jako najlepszy z możliwych;

3) Formułowano bez komentarza i uzasadnienia niepoprawne wnioski:

Każda urna daje taką samą szansę wygranej (nie ma urny najlepszej);
Wybiorę urnę jakąkolwiek bo i tak nic to nie da;
Wybór urny jest zupełnie niepotrzebny gdyż:

6 *z* u_1 *lub* 4 *z* u_2 $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$

6 *z* u_1 *lub* 0 *z* u_2 $\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$

1 *z* u_1 *lub* 0 *z* u_2 $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$

1 *z* u_1 *lub* 4 *z* u_2 $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$

widać, że wybierając którąkolwiek urnę mamy jednakowe szanse.

4) Wyciągano błędne wnioski wynikające, jak można przypuszczać, z przyjęcia błędnego założenia że relacja „bycia lepszą urną" jest przechodnia. Student poprawnie wykazał, że urna u_1 jest lepsza od u_2 oraz że urna u_2 jest lepsza od urny u_3. Następnie stwierdził, że urna u_1 jest najlepsza (przypuszczalnie skorzystał z przechodniości tej relacji). Takie postępowanie jest charakterystyczne dla jednej ze strategii heurystycznych ((C) Anchoring — reguła zakotwiczenia) opisanych przez Kahnemana i Tversky'ego (por. [7]).

Ilościowe zestawienie rozwiązania zadania przedstawia tabela

	Poprawne odpowiedzi	Błędne odpowiedzi	Brak odpowiedzi
Pytanie 1	13	17	2
Pytanie 2	8	22	2

7. Wnioski końcowe

Celem pracy było uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy i w jaki sposób studiowanie matematyki przed rozpoczęciem kursu rachunku prawdopodobieństwa wpływa na sposób rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Przeprowadzone badania skłaniają do wielu refleksji na temat sposobu kształcenia nauczycieli matematyki. Można przypuszczać, że w kształceniu przyszłych nauczycieli zbyt wiele uwagi poświęca się teoretycznym aspektom omawianych pojęć, kładąc nacisk na dedukcję i rachunki, a zbyt mało uwagi poświęca się kształtowaniu intuicyjnego rozumienia pojęć. W części rachunkowej często nie zwraca się uwagi na sens prowadzonych rachunków. Niezbyt często etap weryfikacji jawi się jako pewna refleksja nad otrzymanym wynikiem, jego sensem i jego konsekwencjami. Niekiedy zaobserwować można skutki szufladkowania problemów. Niepokojącym jest obserwowany często brak zrozumienia treści zadania wynikający ze słabej umiejętności czytania tekstu matematycznego. Wyniki badań sugerują brak dbałości o omawiane wyżej zagadnienia w kształceniu nauczycieli. Ponadto, w kształceniu tym więcej troski należałoby poświęcać zagadnieniom dotyczącym języka opisu i argumentacji, zarówno jego poprawności, precyzji jak i stylistyki oraz gramatyki, zwłaszcza, że chodzi o kształcenie przyszłego nauczyciela matematyki. W pracach studentów zaobserwowano mało czytelną, czasem nawet niezrozumiałą formę słownej i symbolicznej prezentacji rozwiązania. Zagadnieniom zapisu, prezentacji rozwiązania, stosowanej symboliki i przejrzystej formy zewnętrznej należałoby również poświęcać więcej uwagi.

W pracach studentów zauważono pewną nieporadność językową. Ilustrują to poniższe cytaty:

— *Prawdopodobieństwo wyraża sumę czarnych kul,*
A zdarzenie wylosowania kuli czarnej,
U — wylosowanie urny U,
$A|U$ — wylosowanie kuli czarnej pod warunkiem, że z urny U;
— *Urna u_2 ma większe szanse;*
— *Prawdopodobieństwo, że w urnie u_1 wypadnie 6;*
— *Urna u_2 wygrywa z największym prawdopodobieństwem;*
— *Jeżeli mamy dwie urny z kulami i losujemy z nich jedną, a następnie z urny wylosowanej losujemy kulę określonego koloru, to ....*

W ostanim stwierdzeniu zwrot *losujemy kulę określonego koloru* jest niepoprawny, losujemy bowiem kulę, a o jej kolorze można mówić dopiero po jej wylosowaniu (jest to częsty wyniesiony ze szkoły zwrot typu „losuję kulę czarną").

Zauważono, że studenci III roku matematyki mają nierzadko spore trudności natury logicznej.

Rozwiązanie zadania 2-3 wymagało pewnych umiejętności w zakresie formułowania i dowodzenia twierdzeń. Prawie 40% badanych studentów nie podjęło próby sformułowania odpowiedniego twierdzenia. Z pozostałych (próbujących zapisać twierdzenie) mniej niż połowa czyni to poprawnie, a zaledwie 30% z tej grupy przeprowadza dowód.

W zadaniu 1 najczęściej przyjmowanym modelem probabilistycznym jest taki, w którym Ω jest zbiorem dwuelementowych kombinacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jednakże w wielu pracach wyniki zapisywane są niepoprawnie z punktu widzenia logiki, w postaci par, a traktowane tak jak dwuelementowe podzbiory.

Rachunek prawdopodobieństwa posługuje się specyficznym językiem, w którym używa się terminów nie występujących w innych działach matematyki. Można przypuszczać, że w szkolnym kursie rachunku prawdopodobieństwa nie przywiązuje się do języka zbyt dużej wagi. Ponadto, używana w szkole terminologia może powodować niejasności (np. mylone jest pojęcie zdarzenia elementarnego, zdarzenia losowego i prawdopodobieństwa zdarzenia). Ilustruje to następujący cytat

— *W obu przypadkach prawdopodobieństwo policzone jest jako suma dwóch zdarzeń prowadzących do tego samego określonego wyniku.*

Rozwiązujący nie dostrzegają specyficznej roli czasu w probabilistycznych analizach. Szczególnie uwidacznia się to w opisie zdarzeń. W analizowanych zadaniach zdarzenia określane są przy użyciu czasu przeszłego co niesie w konsekwencji informację o zajściu tego zdarzenia, a więc nie ma sensu pytać o jego prawdopodobieństwo.

— *A wylosowałem kulę białą.*[13]
— *Suma wylosowanych numerów jest liczbą parzystą.*
— *B — zdarzenie polegające na tym, że wylosowana jest kula czarna.*
— *A — wylosowanie kuli czarnej.*

Wyniki rozwiązań dwóch pierwszych zadań są bardzo zbliżone. Zrozumienie treści tych zadań nie sprawiło studentom większych trudności $((\alpha))$. Po skonstruowaniu modelu probabilistycznego opisywanych tam doświadczeń losowych $((\beta))$, w większości uzyskano dobre rozwiązania $((\gamma))$ i dokonano po-

[13]zamiast „zostanie wylosowana kula biała"

prawnej interpretacji wyników liczbowych (zad. 1.) oraz zauważono pewne prawidłowości, chociaż nie zawsze umiano je poprawnie sformułować w języku matematyki ((δ)). Zadanie 3 sprawiło rozwiązującym duże trudności. Najwięcej kłopotów było ze zrozumieniem treści ((α)). Trudności pojawiły się także w kolejnych fazach rozwiązania. Szczególnie problemy ujawniły się w fazie interpretacji, kiedy to mimo uzyskania poprawnych wartości liczbowych, ich zinterpretowanie okazało się niełatwe. Porównując liczbę poprawnych odpowiedzi dla poszczególnych zadań, można stwierdzić, że zadanie 3 sprawiło rozwiązującym najwięcej problemów.

Dla zadań 2 i 3 nie przeprowadzono analizy porównawczej tak jak w przypadku zadania 1, bo studentów rozwiązujących te zadania na egzaminie wstępnym będzie można przebadać w podobny sposób: jedną grupę za rok (kandydaci z 1994 r.) drugą grupę za dwa lata (kandydaci z 1995 r.). Opracowanie dotyczące wyników egzaminu wstępnego obejmujące zadania 2 (rok 1994) i 3 (rok 1995) można znaleźć w pracach [3] i [4]. Z tychże powodów nie możemy wyciągać żadnych wiarygodnych wniosków, jak to miało miejsce w przypadku zadania 1. Posiadane materiały pozwalają jedynie na postawienie hipotezy, że obecnie prezentowane rozwiązania są:

— bardziej precyzyjne,

— bardziej czytelne,

— lepiej interpretowane,

— zawierają większy procent poprawnych wyników.

Należy zwrócić na koniec uwagę, że więcej (niż na egzaminie wstępnym) osób podejęło próbę rozwiązania zadania (oddano mniej pustych kartek).

Literatura

[1] A. Cewe, C. Grajek, H. Nachorska, *Matura zbiór zadań część II*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 1994.

[2] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, t. III, WSiP, Warszawa, 1980.

[3] M. Major, *I na egzaminie można wymyślić twierdzenie*, Matematyka **1** (1996), 11-15.

[4] M. Major, A. Płocki, *Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy ucznia jako nowy problem dydaktyki matematyki*, Dydaktyka Matematyki **15** (1993), 57-84.

[5] A. Płocki, *Jak uczyć rachunku szans bez szansy na sukces*, Nauczyciele i Matematyka **18** (1996), 10-11.

[6] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.

[7] A. Tversky, D. Kahneman, *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Science **185** (1974), 1124-1131.

Zofia Dunikowska, Maciej Major
Instytut Matematyki
WSP
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Poland
E-mail: mmajor@wsp.krakow.pl

Barbara Nawolska
Katedra Pedagogiki Przedszkolnej
i Wczesnoszkolnej
WSP
ul. Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
Poland