

Henryk Kałol, Stanisław Wołodźko

## O pewnej koncepcji dydaktycznej nauczania elementów statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa w szkole podstawowej

**Резюме.** В работе демонстрируется попытка целостного представления в школьном преподавании т. наз. стохастического содержания, т.е. описательной статистики, теории вероятностей и математической статистики. Работу открывает попытка обоснования целенаправленности анализа названной выше тематики, а также краткий исторический обзор. Дальше излагается характеристика методической концепции авторов статьи, а также ее реализация в учебниках некоторой авторской программы, именуемой *Błękitna Matematyka*. В этой программе реализуется принцип спирального обучения: а) постепенно расширяется сфера реагирования ученика на стимулы внешнего мира (V класс — мир ребенка в классе, VI класс — мир ребенка в школе, VII класс — мир ребенка в окружающей его действительности), и б) постепенно обогащаются средства для классификации статистических данных (V класс — таблицы, столбиковые диаграммы, VI класс — процентные диаграммы, VII класс — двойные диаграммы, графики).

В дальнейшей части дан обзор учебников для V-VIII классов из серии *Błękitna Matematyka* по реализации обучения стохастическому содержанию, а также приведено сопоставление подхода, разработанного авторами статьи, с другими известными концепциями (особенно Т. Варги, М. Глеймана и А. Энгеля). Работу завершают общие замечания по обучению стохастическому содержанию в средней школе.

### Wstęp

Treści statystyki opisowej, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej będziemy w niniejszej pracy nazywać treściami stochastycznymi. Ich rola i znaczenie w dzisiejszym życiu człowieka, w nauce jest ogólnie znana i uznawana. Jak pokazują badania, przeprowadzone w roku 1994 w siedmiu

krajach (Holandii, Kanadzie, Niemczech, Polsce, USA, Szwajcarii, Szwecji), uzyskane przez Polaków wyniki dotyczące umiejętności niezbędnych do rozumienia tekstów pisanych, dokumentów urzędowych, kwestionariuszy, wykresów, tabel itp. są niepokojące

...ponad 75% badanych Polaków nie potrafiło na podstawie dwu prostych wziętych z holenderskiego dziennika wykresów odpowiedzieć na pytanie o związek między poziomem sprzedaży ogni sztucznych i liczbą wypadków z nimi związanych (...). Około 40% Polaków nie potrafiło na podstawie mapki pogody z jednej z gazet (z podanymi temperaturami w poszczególnych stolicach), powiedzieć, o ile — według przewidywanych maksymalnych temperatur — stopni cieplej będzie w Bangkoku niż w Seulu. ([1], str. 7-71)

Tymczasem środki masowego przekazu (telewizja, radio, czasopisma) zasypują nas każdego dnia olbrzymią ilością informacji prezentowanych w różnorodny sposób: za pomocą grafów, wykresów, tabel itp. Informacje te mają służyć lepszemu rozumieniu procesów społecznych, socjalnych, czy naukowych. Zrozumienie ich jest warunkiem koniecznym do aktywnego udziału każdego człowieka w życiu społecznym, można by nawet powiedzieć, że jest warunkiem koniecznym demokratyzacji społeczeństwa. Natomiast fakt ich niezrozumienia przez większość społeczeństwa z jednej strony utrudnia ludziom możliwość podejmowania rozsądnych decyzji na przykład w referendum czy wyborach, z drugiej zaś pozwala na manipulowanie społeczeństwem. Przykładem tego może być następująca (przeczytana w prasie) wypowiedź: *... będziemy podejmować takie działania, aby wszystkie grupy społeczne zarabiały powyżej średniej krajowej ...*. Jak zareaguje „przeciętny Polak” na tego typu hasło: czy zauważy, że jest wprowadzany w błąd, czy też da się oszukać pięknym, niezrozumiałym słowem? Innym zagadnieniem, wartym zastanowienia jest to, czy autor tych słów mówił je świadomie? Czy rozumiał on to, co mówi?

W Polsce nie ma tradycji zajmowania się problemami statystyki opisowej w szkole podstawowej, szczególnie na lekcjach matematyki. Treści te nie znajdowały się na ogół w programach nauczania matematyki. Z tego też powodu większość Polaków nie rozumie informacji przekazywanych im w postaci diagramów słupkowych, kołowych, piktogramów, instrukcji, tabel itd. Niewątpliwie za taki stan częściowo odpowiedzialna jest szkoła. Ona to powinna przysposobić młodego człowieka do życia we współczesnym świecie i do pełnienia funkcji pełnowartościowego, inteligentnego i krytycznego obywatela, bowiem umiejętność stawiania i formułowania pytań dotyczących otaczającej człowieka rzeczywistości, odbioru, analizy i interpretacji danych, podejmowania właściwych decyzji, spełniają coraz ważniejszą rolę w demokratycznych

społeczeństwach wykorzystujących nowoczesne technologie i różnorodne środki informacji i komunikacji.

Niemniej ważną rolę w pełnym, nie tylko matematycznym wykształceniu, odgrywają także rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Trudno obecnie wyobrazić sobie w pełni wykształconego człowieka bez znajomości podstawowych metod probabilistycznych i statystycznych stosowanych w naukach empirycznych i codziennym życiu.

### **Treści stochastyczne w wykształceniu ogólnym człowieka**

Jednym z podstawowych celów szeroko rozumianej edukacji jest przygotowanie człowieka do życia w nowoczesnym społeczeństwie, w którym matematyka odgrywa coraz to większą rolę. W związku z tym jednym z celów nauczania matematyki powinno być dostarczenie uczniom właściwego materiału i odpowiednich metod do poznania i rozumienia otaczającego ich świata. Treści stochastyczne umożliwiają właściwą realizację tego celu nauczania matematyki.

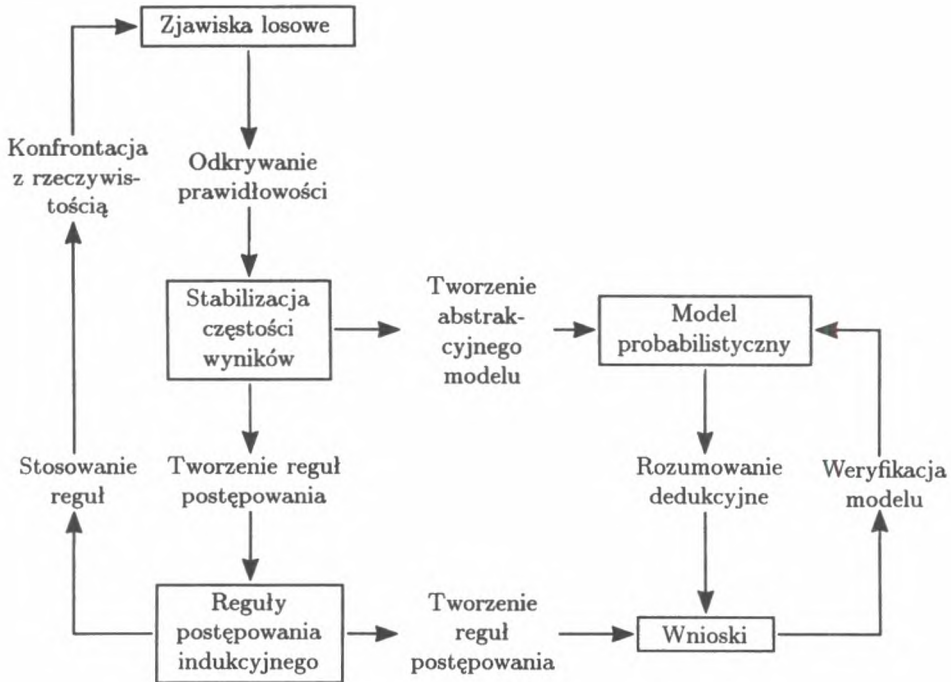
Człowiek od samego początku swego istnienia usiłował zrozumieć prawa rządzące światem, który go otacza, pragnął poznać strukturę i przebieg zjawisk losowych, z którymi miał do czynienia w codziennym życiu. Podstawową metodą, którą się na ogół posługiwano, była obserwacja. Poczynione spostrzeżenia, odkrywane prawidłowości człowiek wykorzystywał do tworzenia odpowiednich reguł, według których potem starał się postępować. Wśród wielu odkrytych w ten sposób prawidłowości takich jak wymiary przedmiotów, odległość, ciężar, równoliczność zbiorów znajdowała się także własność stabilizacji częstości względnej występowania poszczególnych wyników określonych zjawisk w długich seriach powtarzających się prób. Prawidłowość ta legła u podstaw powstania w XVII wieku odpowiedniego pojęcia abstrakcyjnego, jakim było pojęcie prawdopodobieństwa. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna pojawiły się wraz z powstaniem pytania, jak często w długiej serii prób występują określone zdarzenia. Podobnie powstawały też inne dyscypliny matematyczne.

W [9] J. Neyman tak opisuje ten rozwój:

Zazwyczaj rozwój pewnej gałęzi matematyki kształtuje się według następującego modelu. Najpierw ustala się pewną kategorię prawidłowości i to stwarza pewną ilość problemów postępowania indukcyjnego. Następnym krokiem jest opracowanie abstrakcyjnego modelu zjawisk, w którym nieco mgliste początkowo prawidłowości podnosi się do roli podstawowych pojęć i aksjomatów i czyni się starania, żeby wyrazić je za pomocą możliwie precyzyjnych określeń. Abstrakcyjny model matema-

tyczny służy do wyprowadzania różnorodnych wniosków z przyjętych aksjomatów i wtedy pojawia się rozumowanie. Wnioski te służą częściowo do zweryfikowania adekwatności modelu matematycznego, a częściowo do tworzenia reguł postępowania indukcyjnego.

Opis ten w odniesieniu do rachunku prawdopodobieństwa można przedstawić w postaci schematu przedstawionego na rys. 1 (jego analizę rozpoczynamy od górnego okna).



rys. 1. Model rozwoju statystyki i rachunku prawdopodobieństwa

Przez reguły postępowania indukcyjnego J. Neyman rozumie dostosowanie ludzkiego zachowania do obserwowanych zjawisk losowych w oparciu o zebrany zasób informacji, który w danym momencie wydaje się w miarę pełny.

Na pierwszym więc etapie ludzie obserwowali przebieg zjawisk losowych, próbowali szukać rozwiązań różnorodnych problemów związanych z tymi zjawiskami. Na ogół czynili to na drodze empirycznej. Obserwowali występujące rezultaty, liczyli częstości odpowiednich wyników, próbowali odkryć występujące prawidłowości i na ich podstawie tworzyć reguły postępowania indukcyjnego. Podczas obserwacji ciemnych chmur na niebie odkryto, że dość często po ich pojawieniu się następowały burze, gwałtowne deszcze, śnieżyce, a to zmuszało ich do szukania odpowiedniego schronienia. W podobny sposób postępowano

podczas angażowania się w gry hazardowe, które towarzyszyły człowiekowi od samego początku jego egzystencji. Stosowano więc procedury, które dziś zaliczamy do metod statystyki opisowej. W dzisiejszych czasach również, aby uzyskać odpowiedzi na stawiane przez życie problemy, zbieramy dane statystyczne, porządkujemy je, przedstawiamy w postaci graficznej i analizujemy otrzymane wykresy w celu znalezienia odpowiednich prawidłowości, by na ich podstawie uzyskać odpowiedzi na interesujące nas pytania. Różnica oczywiście polega na tym, że teraz mamy do dyspozycji nowoczesne środki techniczne oraz różnorodne metody opracowania zebranych danych statystycznych.

Opisywane powyżej postępowanie nie zawsze przynosiło oczekiwane rezultaty, często pojawiały się znaczne różnice między otrzymanymi wynikami a subiektywnymi odczuciami opartymi z jednej strony na obserwowanych częstościach, z drugiej na prowadzonych często przy tej okazji rozumowaniach, nie zawsze merytorycznie poprawnych. Dla wyjaśnienia tych różnic człowiek zaczął przenosić swoje problemy na grunt czysto teoretyczny i abstrakcyjny. Dało to początek powstania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jako dziedziny matematyki.

Stosunkowo późno, bo dopiero po II wojnie światowej, w okresie wielkiego rozwoju rachunku prawdopodobieństwa i przenikania jego pojęć oraz metod do nauk empirycznych i życia codziennego, pojawiły się postulaty wprowadzania elementów statystyki i rachunku prawdopodobieństwa do programów szkolnych. W Polsce po raz pierwszy te treści stochastyczne znalazły się w szkole w roku 1968, w ostatniej klasie szkoły średniej (zob. [19], [12]). Nieco później elementy statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa zostały także wprowadzone do programu szkoły podstawowej (zob. [7], [17]). Od samego początku problematyka ta nie cieszyła ani sympatią uczniów ani specjalnym uznaniem nauczycieli matematyki. Złożyło się na to wiele przyczyn, wśród nich:

- brak merytorycznego i dydaktycznego przygotowania nauczycieli matematyki w tym zakresie (wielu nauczycieli nie miało w programach swoich studiów tych treści),
- nie najwłaściwsze koncepcje dydaktyczne wprowadzania tych zagadnień do praktyki szkolnej zawarte w obowiązujących podręcznikach,
- brak odpowiedniej literatury dla nauczyciela (jedynych wzorców do tworzenia dydaktycznych ujęć stochastyki dostarczały akademickie ujęcia, w których rachunek prawdopodobieństwa jest prezentowany jako gotowa teoria dedukcyjna),

- zbyt mała znajomość treści stochastycznych wśród rodziców i reszty społeczeństwa, brak motywacji w zadaniach i problemach adresowanych do ucznia.

Nasilały się protesty przeciwko umieszczeniu tych treści w szkole podstawowej, stopniowo zmniejszano liczby godzin przeznaczonych na nauczanie matematyki czego konsekwencją stało się usunięcie elementów statystyki i rachunku prawdopodobieństwa z programów matematyki dla szkół podstawowych.

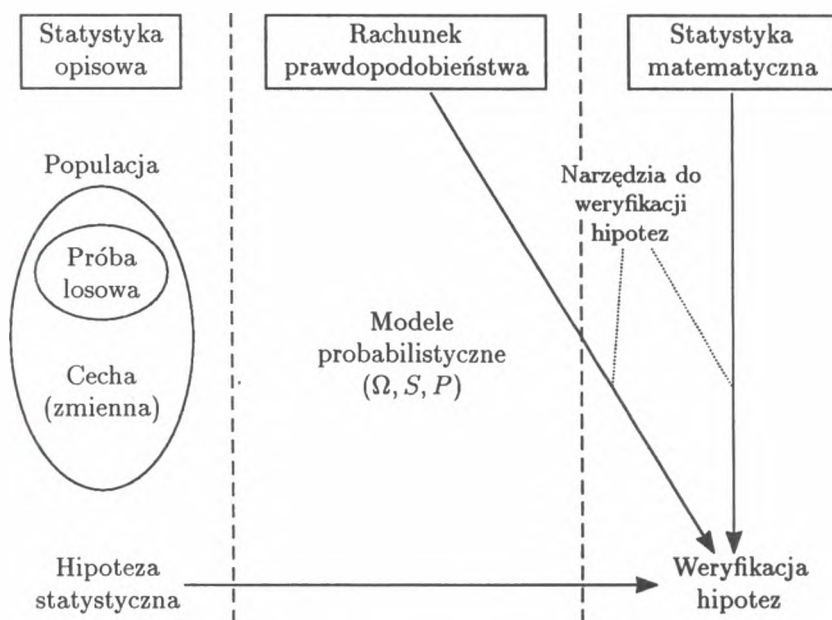
Obecnie nasilają się tendencje do ponownego włączania treści stochastycznych do programów szkolnych. W niektórych krajach, na przykład w Anglii, czy USA, elementy statystyki znajdują się już w programach matematycznego kształcenia dzieci w wieku 5 lat, a elementy rachunku prawdopodobieństwa w programach kształcenia dzieci w wieku 11 lat, oczywiście na odpowiednim materiale i odpowiednimi metodami. W Polsce idee stochastyczne trafiły ponownie do szkoły podstawowej za sprawą dwóch, zatwierdzonych przez Ministerstwo Edukacji Narodowej (MEN), programów nauczania. *Program Matematyka 2001* ([18]) wprowadza treści statystyczne i elementy rachunku prawdopodobieństwa począwszy od klasy I, natomiast *Błękitna Matematyka* ([10]) treści statystyczne wprowadza począwszy od klasy V, a treści z rachunku prawdopodobieństwa od klasy VIII. Zagadnieniom tym wiele miejsca poświęca się w publikacjach dotyczących dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa (zob. [13], [14], [4]). W przygotowywanych obecnie *Podstawach Programowych z Matematyki* ([16]) proponuje się wprowadzić treści stochastyczne w szkole podstawowej począwszy od poziomu P2 (klasy IV-VI, wiek 11-13 lat) i kontynuować przez cały okres pobytu ucznia w szkole podstawowej i średniej do poziomu P5 (klasy XI-XII, wiek 18-19 lat).

### Koncepcja dydaktyczna nauczania treści stochastycznych w szkole

W komentowanej tu koncepcji kształcenia matematycznego treści stochastyczne proponuje się wprowadzać w takiej kolejności, w jakiej treści te powstawały, to znaczy w ich historycznej kolejności. Najpierw więc nauczanie postuluje się zaczynać od elementów statystyki opisowej, by potem poprzez gry losowe przejść do rachunku prawdopodobieństwa, wreszcie zakończyć na elementach statystyki matematycznej. Schemat z rys. 2 przedstawia sposób i kolejność nauczania tych treści.

Do argumentów, przemawiających za omawianą koncepcją stochastycznego kształcenia, zaliczymy następujące:

- treści stochastyczne można włączać do programu, jak pokazują liczne badania dydaktyczne, stosunkowo wcześniej, już nawet w nauczaniu początkowym;
- problematyka statystyki opisowej jest dla uczniów łatwa i niezwykle interesująca, dotyczy bowiem problemów codziennego życia;
- pojęcie częstości względnej jest bardzo pomocne przy budowie modelu probabilistycznego jako narzędzia do rozstrzygania problemów, które mogą wystąpić w przeszłości;
- widać cel i motywację nauczania rachunku prawdopodobieństwa jako teorii, która na podstawie informacji z przeszłości i teraźniejszości może być wykorzystana przy podejmowaniu decyzji dotyczących przyszłości;
- widać konieczność konstrukcji modelu probabilistycznego potrzebnego do rozwiązania określonego problemu;
- pojęcie zmiennej losowej, jedno z najważniejszych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, jest w tym ujęciu kształtowane dość wcześniej jako cecha populacji, oczywiście w ujęciu propedeutycznym;
- jest widoczna motywacja uczenia elementów statystyki matematycznej jako narzędzi do weryfikacji stawianych w statystyce opisowej hipotez.



rys. 2. Kolejność nauczania treści stochastycznych

W powyższej koncepcji nauczania elementów stochastyki (statystyka opisowa, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna) na poziomie szkoły podstawowej (a także średniej) uwzględniono:

- matematyczny model rozwoju nauk matematycznych, a w szczególności powstania statystyki i rachunku prawdopodobieństwa ([9]);
- zasadę paralelizmu dydaktycznego ([2]).

Wprowadzenie elementów statystyki opisowej do szkoły przynosi, oprócz wspomnianych wyżej, jeszcze inne korzyści zarówno intelektualne, jak i użyteczne. Oto niektóre z nich:

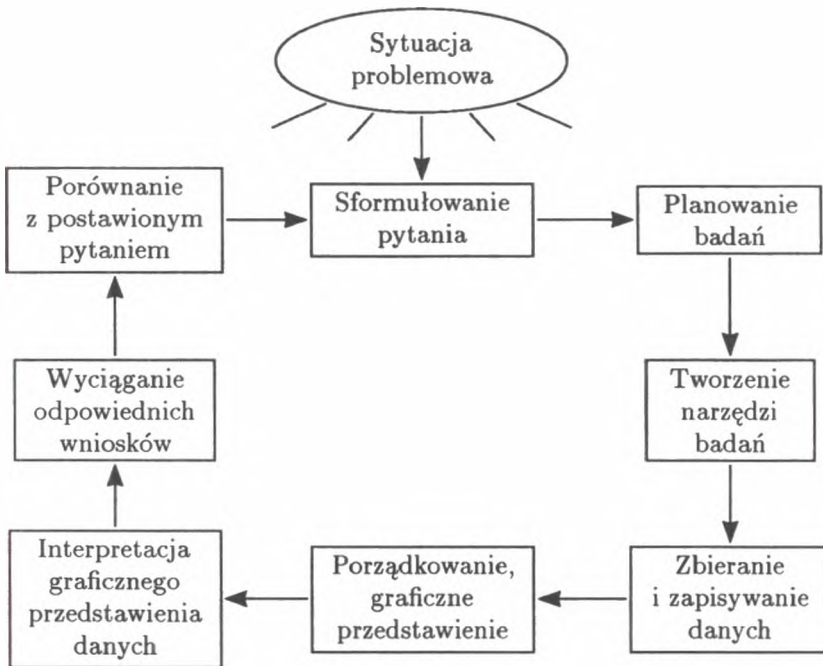
- umiejętność stawiania racjonalnych pytań-problemów w określonej sytuacji problemowej, w której się znajdujemy, jest jedną z najważniejszych umiejętności praktycznych bardzo użytecznych w życiu;
- umiejętności planowania badań, podejmowania decyzji, interpretowania zebranych danych czy też wreszcie udzielania odpowiedzi na postawione w trakcie badań pytania, to jedne z podstawowych umiejętności, które powinny cechować każdego człowieka w jego codziennym życiu;
- posługiwanie się różnorodnymi środkami graficznymi podczas opracowywania zgromadzonych danych pozwala na intuicyjne kształtowanie różnorodnych pojęć zarówno probabilistycznych (szansa, rozkład prawdopodobieństwa, zmienna losowa itd.), jak i czysto matematycznych (funkcja, wykres funkcji, różne własności funkcji itd.).

Rysunek 3 przedstawia schematycznie proponowany sposób realizacji treści statystycznych w szkole podstawowej ([3]).

Cały ten cykl składa się z kilku wzajemnie powiązanych ze sobą etapów, według których na ogół postępujemy przy badaniu poszczególnych interesujących nas własności określonej populacji. Pierwszym etapem występującym w tym schemacie jest sytuacja problemowa. Jest ona zawsze związana z określoną populacją. Sytuację tę może sprowokować nauczyciel, mogą ją stworzyć uczniowie. Najbardziej interesują uczniów sytuacje problemowe dotyczące otaczającej rzeczywistości i świata dziecka. Z każdą taką sytuacją związanych jest na ogół wiele pytań-problemów. Każde z nich dotyczy jednej, określonej cechy elementów rozważanej populacji. Ten etap stawiania (formułowania) pytań nie sprawia uczniom większych trudności. Kolejnym etapem jest planowanie badań. W statystyce zagadnieniom doboru próby i jej losowości poświęca się wiele uwagi. Następnie są tworzone narzędzia badań, tj. kwestionariusze. Zbieranie i zapisywanie danych, to jedna z najbardziej uciążliwych czynności. Prowadząc badania statystyczne z dziećmi mamy do dyspozycji od razu wielu ankietów. Zebrane dane należy zapisać, uporządkować i przedstawić



w postaci graficznej. Można tutaj posłużyć się komputerem lub kalkulatorem graficznym, pamiętając jednak o tym, aby co najmniej jeden cykl badania statystycznego był przeprowadzony bez ich użycia. Następnym etapem jest interpretacja graficznego przedstawienia danych. Odczytywanie z grafów różnych własności rozpatrywanych cech jest istotną i ważną umiejętnością, którą należy kształtować od samego początku uczenia tych zagadnień. Zebrane dane pozwalają na formułowanie szeregu spostrzeżeń i wniosków, przy czym należy być bardzo ostrożnym przy udzielaniu odpowiedzi na podstawie prowadzonych badań statystycznych. Pamiętać należy, że formułowane tutaj wnioski to tylko pewne hipotezy, które należy weryfikować.



rys. 3. Sposób realizacji treści ze statystyki opisowej

Porównywanie otrzymanych wniosków z postawionymi na wstępie pytaniami, z tym co podpowiadała nam intuicja, otrzymane często na tym polu sprzeczności mogą być doskonałą okazją do rozpatrywania takiego, czy podobnego problemu na drodze teoretycznej. W sposób naturalny przechodzimy tym samym do zagadnień związanych z nauczaniem rachunku prawdopodobieństwa. Gry losowe, które od początku stale towarzyszyły ludzkości, świetnie nadają się do wprowadzania tych zagadnień ([15]). W ich kontekście można wprowadzić pojęcie doświadczenia losowego i jego probabilistycznego modelu,

pojęcie niezależności doświadczeń, pojęcie gry sprawiedliwej. Na podstawie naturalnej akceptacji przez uczniów symetrii przyrządów losujących używanych w grach (rozumowania typu „jednakowo możliwe na podstawie symetrii”), a także na podstawie zaobserwowanej częstości względnej konkretnych rezultatów gier można kształtować pojęcie modelu probabilistycznego dla rozpatrywanych doświadczeń losowych. Pojęcie prawdopodobieństwa proponuje się w omawianej tu koncepcji wprowadzać na tle popularnych gier hazardowych, na przykład „jednorękiego bandyty”. Przyrządem losującym jest automat do gry (można go spotkać w wielu salonach gier i w różnych odmianach).

W naturalny sposób korzystamy z faktu, że wprowadzone przez nas prawdopodobieństwo ma charakter dualny ([8]). Tworząc bowiem modele probabilistyczne dla konkretnych sytuacji (doświadczeń losowych) przyjmowane prawdopodobieństwo jest określane na podstawie

— częstości względnej zdarzeń, jakie zaszły w przeszłości,  
albo

— posiadanej wiedzy o zjawiskach losowych, o ich naturalnej symetrii.

Kolejny etap dotyczący nauczania elementów statystyki matematycznej poświęcony powinien być w głównej mierze weryfikacji hipotez, formułowanych i stawianych przy okazji prowadzonych badań statystycznych. Należałoby tu wykorzystywać umiejętności uczniów dotyczące prowadzenia badań statystycznych, które nabyli na początku uczenia się omawianych treści probabilistycznych. Jest to więc okazja do spiralnego nauczania tych zagadnień. Jest też okazja do pokazania uczniom, że weryfikacja hipotez odbywa się przy pomocy metod stworzonych w tym celu w statystyce matematycznej lub wziętych z rachunku prawdopodobieństwa.

Z powyższego wynika, iż w okresie całego pobytu w szkole uczeń poznaje otaczającą go rzeczywistość, a podstawowym narzędziem służącym do tego są metody statystyki opisowej. Z drugiej strony niektóre pojęcia statystyki opisowej są podstawą do tworzenia modeli probabilistycznych dla opisu pewnego typu doświadczeń losowych. Dla wielu rozpatrywanych doświadczeń losowych podstawą konstrukcji odpowiednich modeli probabilistycznych pozostanie nasza wiedza o tych doświadczeniach, naturalna akceptacja symetrii związanych z realizacją tych doświadczeń. Umiejętność konstrukcji odpowiedniego modelu probabilistycznego opisującego doświadczenia losowe jest bowiem warunkiem koniecznym dla określenia prawdopodobieństwa zdarzenia związanego z realizacją tego doświadczenia losowego.

### Elementy statystyki opisowej i rachunku prawdopodobieństwa w podręcznikach *Błękitnej Matematyki*

Przedstawiona powyżej koncepcja dydaktyczna nauczania elementów stochastyki może być wprowadzona już w szkole podstawowej. Doświadczenia szkolne i badania psychologiczne wskazują bowiem na to, że na poziomie klas IV–VI możliwe jest stopniowe przechodzenie do systematyzowania i pogłębiania zrozumienia istoty zebranych danych, analizy rozpatrywanych sytuacji losowych, opis symboliczny i werbalny otrzymanych informacji. Z tego też powodu proponujemy wprowadzanie elementów statystyki począwszy od klasy V, a elementów rachunku prawdopodobieństwa od klasy VIII.

Poniższa tabela przedstawia proponowane treści, które znalazły się w programie *Błękitnej Matematyki* ([10]).

Klasa V	
Treści	Uczeń
Zbieranie danych związanych z sytuacjami z życia szkolnego.	
Graficzne przedstawianie danych w postaci diagramów słupkowych.	Potrafi dane przedstawić w postaci diagramów słupkowych.
Odczytywanie informacji z diagramów.	

Klasa VI	
Treści	Uczeń
Proste pytania o charakterze statystycznym związane z otaczającą ucznia rzeczywistością, z życiem szkolnym, rozrywką, nauką itp.	
Planowanie badań statystycznych w konkretnych, nieskomplikowanych sytuacjach, konstruowanie tabel i kwestionariuszy.	

1	2
Zbieranie, kodowanie, zapisywanie danych związanych ze stawianymi pytaniami i graficzne ich przedstawianie w postaci tabelki, diagramów słupkowych i kołowych (procentowych).	Potrafi przedstawić dane w postaci diagramów słupkowych, kołowych.
Średnie arytmetyczne.	
Odczytywanie z grafów informacji, a także próby formułowania wniosków dotyczących badanej własności.	Potrafi na podstawie grafu sformułować różnorodne wnioski.

Klasa VII	
Treści	Uczeń
Planowanie i przeprowadzanie prostych badań statystycznych.	Potrafi przeprowadzić proste badanie statystyczne, opracować zebrane dane i przedstawić je w postaci odpowiedniego diagramu.
Zbieranie i zapisywanie danych, także przy użyciu komputera.	
Częstość względna.	
Graficzne przedstawianie danych przy pomocy różnorodnych środków.	
Porównywanie zależności pomiędzy dwiema cechami. Diagram podwójny.	
Interpretowanie danych przedstawionych w różny sposób. Wyciąganie wniosków z danych.	Umie odczytywać z grafów różnorodne własności i formułować wnioski.

Klasa VIII	
Treści	Uczeń
Proste gry losowe. Doświadczenia losowe im towarzyszące.	
Ocenianie i szacowanie wyników gier.	
Prowadzenie gier (także przy użyciu komputera), gromadzenie, organizowanie, kodowanie, przedstawianie i interpretacja uzyskanych danych empirycznych.	Potrafi w różny sposób przedstawić oraz zinterpretować dane otrzymane podczas gier.
Wyjaśnienie pojawiających się sprzeczności na drodze teoretycznej: tabele, drzewa, kwadraty.	Potrafi wyjaśnić na przykładzie przydatność modelu teoretycznego dla opisu przebiegu doświadczenia losowego.
Odróżnianie gier „sprawiedliwych” od „niesprawiedliwych”.	

Przy konstruowaniu programu przyjęliśmy zasadę nauczania spiralnego, która jest realizowana m.in. następująco:

- poszerzamy stopniowo zakres reagowania na bodźce świata zewnętrznego (klasa V — świat dziecka w klasie, klasa VI — świat dziecka w szkole, klasa VII — świat dziecka w otaczającej go rzeczywistości);
- wzbogacamy stopniowo narzędzia do klasyfikacji danych statystycznych (klasa V — tabelki, diagramy słupkowe, klasa VI — diagramy procentowe, klasa VII — diagramy podwójne, wykresy).

### Realizacja programu *Błękitna Matematyka*

W podręczniku dla klasy V ([11]) hasła programowe realizujemy w liczącym 6 stron rozdziale pt. *Statystyka opisowa* podzielonym na dwa paragrafy: *Jakie lubisz zwierzęta?* oraz *Ile masz pieniędzy?* W pierwszym rozdziale, na kanwie nowelki o uczniu klasy V i jego psie, animujemy lekcję, na której uczniowie opowiadają o własnych domowych zwierzętach. Zebrane dane uczniowie zapisują w tabeli nazwanej przez nauczycielkę tabelą częstości oraz ilustrują przy pomocy tzw. diagramu słupkowego. Z diagramu uczniowie odczytali, że w ich klasie pies jest najczęściej trzymany w domach zwierzęciem, na

drugim miejscu występuje papuga, na trzecim ryby, najrzadziej zaś występuje kanarek. Drugi przykład gromadzenia i prezentacji graficznej danych statystycznych dotyczył wielkości kieszonkowego ucznia. Tematy służące do dyskusji nad sposobami gromadzenia danych i ich prezentacji mogą pochodzić od uczniów (np. ilość czasu poświęconego na naukę w domu, liczebność rodzin uczniowskich, dyscypliny sportowe uprawiane przez uczniów danej klasy itp.). Należy podkreślić, iż uczniowie niższych oddziałów szczególnie żywo interesują się problemami swojej klasy (świat dziecka w klasie), a uczniowie klasy V dysponują ponadto odpowiednimi umiejętnościami matematycznymi, zatem są przygotowani psychofizycznie do przyswojenia i opanowania proponowanych tematów.

W podręczniku do klasy VI ([6]) rozdział *Statystyka opisowa* liczy 18 stron i jest podzielony na trzy paragrafy: *Koło fortuny, Kto jest bardziej pracowity?* oraz *Jak odpoczywamy?* W pierwszym z nich na tle znanej gry telewizyjnej badamy częstości występowania poszczególnych spółgłosek i samogłosek w języku polskim. Uczniowie próbują dostrzegać praktyczne korzyści (dotyczące szans wygranej w konkursie) wynikające z porównywania tych częstości. W drugim paragrafie porównujemy średnie oceny z poszczególnych przedmiotów, w trzecim zaś wskazujemy na możliwość zilustrowania danych z ankiety przy użyciu diagramu procentowego. Diagram ten pojawia się więc w sposób naturalny. To samo dotyczy pojęcia średniej arytmetycznej. Uczniowie swoimi obserwacjami obejmują inne klasy (świat dziecka w szkole).

Rozdział *Statystyka opisowa* w podręczniku do klasy VII ([20]) liczy 11 stron i jest podzielony na 4 paragrafy: *Prowadzenie badań statystycznych, Znajdowanie odpowiedzi na postawione poprzednio pytania, Porównywanie dwóch cech tej samej populacji, Porównywanie dwóch prób tej samej populacji*. W proponowanych tekstach mówimy o organizowaniu badań statystycznych, ilustrujemy podstawowe pojęcia statystyczne: populacja, próba, cecha. W sposób naturalny pojawia się pojęcie częstości względnej. Porównujemy dwie cechy poprzez szukanie między nimi zależności ilościowej oraz porównujemy dwie próby za pomocą zaobserwowanych średnich arytmetycznych. W swoich badaniach uczniowie wychodzą poza szkołę (świat dziecka w otaczającej go rzeczywistości) oraz otrzymują dalsze narzędzia matematyczne (diagramy procentowe i wykresy).

Podręcznik do klasy VIII ([5]) obejmuje rozdział *Gry losowe* liczący 17 stron i podzielony na paragrafy: *Automaty do gry, Kule i urna* oraz *Kostki do gry i monety*. W pierwszym z nich opisano zasady funkcjonowania popularnego automatu do gry oraz próby odpowiedzi na pytania dotyczące szansy wygranej oraz sprawiedliwości gry. Wprowadzono poglądowo pojęcia doświadczenia losowego oraz niezależności takich doświadczeń. Okazuje się, iż można

używając niesformalizowanego języka upogładowić pojęcie prawdopodobieństwa (zwanego wymiennie szansą) oraz wartości oczekiwanej zmiennej losowej. Jest to, jak się wydaje, niezła próba tworzenia modelu matematycznego dla konkretnej sytuacji w rzeczywistości. W następnych paragrafach rozważa się proste gry losowe związane z konkretnymi sytuacjami życiowymi, przy czym w analizach i wnioskowaniach wykorzystuje się drzewa oraz interpretację geometryczną (miarową) modelu probabilistycznego, zdarzenia w tym modelu i jego prawdopodobieństwa. Przy pomocy tych środków udaje się przystępnie rozwiązać pozornie trudne zagadnienie probabilistyczne.

Oto fragment tekstu omawianego podręcznika (str. 204-206).

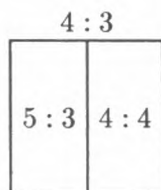
### Kostki do gry i monety

*Kostki do gry są częstym atrybutem w różnych grach. Oto przykłady.*

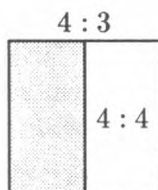
*Rzuca się jedną kostką. Jeżeli wypadną 2 oczka lub 4 oczka lub 6 oczek, to punkt zdobywa Paweł, w przeciwnym przypadku punkt otrzymuje Dorota. Wygrywa ta osoba, która pierwsza uzyska 5 punktów.*

*Oczywiście taka gra jest sprawiedliwa, gdyż w pojedynczym rzucie kostką szanse wygrania przez Pawła i Dorotę są równe (uzasadnij dlaczego?). Natomiast innym, ciekawszym problemem byłby taki: po siedmiu losowaniach w tej grze prowadzi Dorota 4 : 3. Jaka jest szansa, że Dorota wygra?*

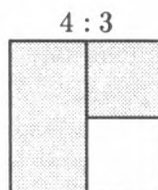
*Poniższe rysunki pokazują etapy rozwiązania tego problemu.*



rys. 4.



rys. 5.

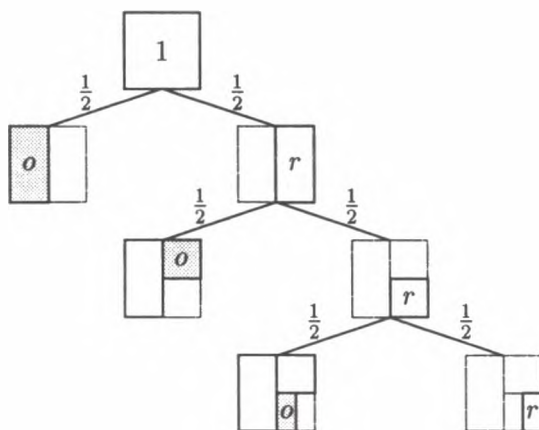


rys. 6.

*Jeżeli stan meczu jest 4:3, to po następnym rzucie będzie 5:3 albo 4:4. Szanse każdego wyniku są takie same. Podzielmy nasz kwadrat na połowę (rys. 4). Dorota wygra, jeżeli stan meczu będzie 5:3. Zamalowana część kwadratu ilustruje jej wygraną (rys. 5). Jeżeli stan meczu jest 4:4, to po następnym rzucie kostką może wygrać Dorota lub Paweł. W dalszym ciągu szanse ich wygrania są równe. Pozostałe części kwadratu musimy podzielić znowu na dwie połowy. Zamalujmy część Doroty (rys. 6). Oznacza to, że szansa wygrania przez Dorotę wynosi  $\frac{3}{4}$ , a szansa wygrania przez Pawła wynosi  $\frac{1}{4}$ .*

*Podrzucamy symetryczną monetą do chwili pojawienia się orła, ale nie więcej niż 3 razy. Za uzyskanie orła otrzymujemy 1 punkt, gdy orzeł nie pojawi się tracimy 4 punkty. Czy ta gra jest sprawiedliwa?*

Drzewko na rysunku 7 ilustruje przebieg naszego doświadczenia.



rys. 7.

Szansa uzyskania orła za pierwszym rzutem równa się  $\frac{1}{2}$ , za drugim —  $\frac{1}{2}$  z  $\frac{1}{2}$  czyli  $\frac{1}{4}$ , natomiast za trzecim —  $\frac{1}{2}$  z  $\frac{1}{4}$ , tzn.  $\frac{1}{8}$ . W sumie szansa uzyskania orła równa się

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

a szansa uzyskania 3 reszek  $\frac{1}{8}$ . Oznacza to, że gdybyśmy podrzucali monetą na przykład 8 razy, 7 razy wypadłby orzeł, tzn. zdobylibyśmy 7 punktów, 1 raz nie otrzymalibyśmy orła, wtedy stracilibyśmy 4 punkty, w sumie więc zyskalibyśmy 3 punkty. Zatem w jednym rzucie monetą możemy zyskać  $\frac{7}{8}$  punktu, a stracić  $\frac{1}{8}$ , więc zysk wynosi  $\frac{3}{4}$  punktu. W sumie gra ta jest korzystna dla nas, ale nie jest sprawiedliwa.

### Uwagi końcowe

Celem niniejszej pracy było przedstawienie pewnej koncepcji kształcenia stochastycznego w ramach ogólnego kształcenia matematycznego na poziomie szkoły podstawowej. Powstaje pytanie, jak się ma proponowane ujęcie do innych koncepcji nauczania stochastyki. Dokonamy pewnych porównań z niektórymi koncepcjami analizowanymi przez A. Płockiego w rozdziale 18 książki [14] (str.423-449). Jak się wydaje nasze propozycje (adresowane do uczniów klas V-VIII) tematycznie zawierają się w zbiorze treści kursu T. Vargi dla dzieci w wieku 6-12 lat. Nie można zatem twierdzić, iż przekroczyliśmy pewien etap psychofizycznego rozwoju ucznia. Z obserwacji przebiegu wdrażania koncepcji T. Vargi w szkolnictwie węgierskim (oraz późniejszego stopniowego



wycofywania się z jej realizacji) można wnioskować, iż rozpoczynanie przez nas nauczania elementów statystyki opisowej w klasie V ma pewne uzasadnienia. Podobnie można się ustosunkować do koncepcji M. Glaymana (i jego zespołu) opracowanej również dla uczniów w wieku 6-12 lat. H. Freudenthal nie preferuje aksjomatycznego ujęcia rachunku prawdopodobieństwa oraz opowiada się za wczesnym „nasycaniem” matematyki szkolnej treściami stochastycznymi. Za A. Englem próbujemy stosować symulowanie doświadczeń i gier losowych. Staramy się jedynie by nasze przykłady były bardziej „bliskie rzeczywistości” niż bajkowe teksty tego autora. Przyznajemy też duży wpływ na nasze propozycje podręcznikom School Mathematics Project (SMP).

Z powyższego wynika, iż przedstawiona w niniejszej pracy koncepcja dydaktyczna wprowadzenia i uczenia elementów stochastyki może być w pełni realizowana już w szkole podstawowej. Jej egzemplifikacją są ujęcia zaproponowane w podręcznikach *Błękitnej Matematyki* ([5], [6], [11], [20]). Jest oczywistym, iż treści tych powinno się uczyć także w szkole średniej. Zarówno program jak i koncepcja dydaktyczna realizacji powinny być tak skonstruowane, by absolwent szkoły średniej potrafił:

- zaplanować i przeprowadzić badania statystyczne dotyczące postawionego przez siebie lub zleconego do badań problemu;
- odróżniać otrzymane z próby losowej różne rozkłady badanej cechy w odpowiednich populacjach;
- rozumieć w sposób poprawny znaczenie średniej otrzymanej z próby losowej;
- sformułować odpowiedź na postawione przed badaniami pytania;
- zbudować model probabilistyczny dla rozpatrywanego w zadaniu odpowiedniego doświadczenia losowego;
- obliczyć prawdopodobieństwo rozpatrywanego w zadaniu zdarzenia losowego;
- obliczać prawdopodobieństwa warunkowe zdarzeń losowych;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych związanych ze schematem Bernoulliego;
- konstruować i rozróżniać różne rozkłady prawdopodobieństwa (ciągłe, ziarniste).

## Literatura

- [1] I. Białycki, *Analfabetyzm funkcjonalny*, Res Publica Nowa 6 (1996), 68-76.

- [2] R. Duda, *Zasady paralelizmu w dydaktyce*, Dydaktyka Matematyki 1 (1982), 127-138.
- [3] H. Kąkol, *Podstawowe pojęcia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Propozycja dydaktyczna*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1990.
- [4] H. Kąkol (red.), *Elementy statystyki opisowej w szkole podstawowej*, Wydawnictwo „Dla Szkoły”, Bielsko-Biała 1995.
- [5] H. Kąkol, S. Wołodźko, *Matematyka. Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej*, Błękitna Matematyka, Wydawnictwo „Kleks”, Bielsko-Biała 1995.
- [6] M. Klakla, S. Serafin, *Matematyka. Podręcznik dla klasy szóstej szkoły podstawowej*, Błękitna Matematyka, Wydawnictwo „Kleks”, Bielsko-Biała 1996.
- [7] E. Łakoma, *Modele lokalne w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa*, praca doktorska, Wydz. Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, Warszawa 1990.
- [8] E. Łakoma, *Historyczny rozwój pojęcia prawdopodobieństwa*, CODN-SNM, Warszawa 1992.
- [9] J. Neyman, *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1985.
- [10] B. J. Nowecki, G. Trelński, H. Kąkol, *Program nauczania matematyki w klasach I- VIII szkoły podstawowej „Błękitna Matematyka”*, Wydawnictwo „Kleks”, Bielsko-Biała 1995.
- [11] B. J. Nowecki, M. Klakla, *Matematyka. Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej*, Błękitna Matematyka, Wydawnictwo „Kleks”, Bielsko-Biała 1996.
- [12] A. Płocki, *Rachunek prawdopodobieństwa dla szkoły średniej*, wyd. IV, WSiP, Warszawa 1987.
- [13] A. Płocki, *Rachunek prawdopodobieństwa w szkole podstawowej — Zarys dydaktyki*, WSiP, Warszawa 1991.
- [14] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.
- [15] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla Szkoły”, Bielsko-Biała 1997.
- [16] *Podstawy programowe matematyki*, MEN 1996.
- [17] Praca zbiorowa pod red. S. Wołodźki, *Matematyka. Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej*, wyd. IV, WSiP, Warszawa 1991.
- [18] *Program nauczania matematyki w klasach IV- VIII szkoły podstawowej „Matematyka 2001”*, WSiP, Warszawa 1995.
- [19] W. Szlenk, *Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV liceum ogólnokształcącego i technikum*, PZWS, Warszawa 1971.

- [20] G. Trelński, E. Wachnicki, *Matematyka. Podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej*, Błękitna Matematyka, Wydawnictwo „Kleks”, Bielsko-Biała 1995.

*Institut Matematyki*

*WSP*

*Podchorążych 2*

*PL-30-084 Kraków*

*Poland*

*E-mail: [henkakol@wsp.krakow.pl](mailto:henkakol@wsp.krakow.pl)*