ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 191 Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki II 1998

Maciej Major

Nieprzechodniość pewnej relacji związanej z grą typu bingo

Résumé. L'article présente une solution détaillée d'un problème suivant (montré dans [1]).

Chacun de deux joueurs prend un des quatre coupons du dessin 1. On tire une boule de la urne contenant six boules numérotées. Si le numéro de la boule retirée se trouve sur ce coupon, le joueur barre la case avec ce numéro. On tire les boules sans remise aussi longtemps qu'un des joueurs ne barre tous les deux numéros dans une ligne sur son coupon. Ce joueur gagne. Nommons le coupon k_j „meilleur" que le coupon k_l si les chances du joueur qui a choisi le coupon k_j sont plus grandes que celles de son adversaire avec le coupon k_l.

Le problème consiste à montrer si parmi les coupons existe le meilleur. La solution relève l'intransitivité d'une relation, ce qui est assez surprenant.

1. Wprowadzenie

Podstawową formą aktywności matematycznej jest rozwiązywanie zadań. Często jednak sprowadzane ono zostaje do stosowania gotowych wzorów, czy algorytmów, do mechanicznych obliczeń, nierzadko bez rozumienia istoty wykonywanych operacji. W procesie rozwiązywania zadań matematycznych brak jest refleksji nad przeprowadzonym rozumowaniem, brak weryfikacji jego poprawności, brak także interpretacji otrzymanego wyniku. Częstym powodem tego bywa fakt, iż zadania matematyczne adresowane do ucznia są zawsze gotowe, już przez kogoś sformułowane w języku matematyki i osadzone w konkretnym matematycznym modelu. Rozwiązywanie zadania nie obejmuje wówczas takich ważnych aktywności matematycznych, jak:

— przekład pozamatematycznego problemu na język matematyki, a więc formułowanie zadań matematycznych na tle pozamatematycznych sytuacji,

— konstrukcja modelu matematycznego danej sytuacji,

— interpretacja uzyskanych wyników,

— odkrywanie uzasadnianie i wykorzystywanie do matematycznych wnioskowań różnego typu analogii i izomorfizmów,

— wykorzystywanie metody (algorytmu) rozwiązywania jednego zadania do rozwiązania zadania „analogicznego".

Do inspirowania wymienionych powyżej aktywności można wykorzystać zadania z rachunku prawdopodobieństwa, bowiem rozwiązywanie takiego zadania zwykle rozpoczyna się od konstrukcji przestrzeni probabilistycznej jako modelu pewnej (nierzadko pozamatematycznej) sytuacji. Ponadto, często nie jesteśmy w stanie intuicyjnie udzielić poprawnej odpowiedzi na pytania postawione w zadaniach probabilistycznych, pomimo tego, że problemy w nich opisywane nie są zbyt skomplikowane, a z wieloma z nich spotykamy się w codziennym życiu. W wielu sytuacjach rozwiązanie probabilistycznego zadania zaskakuje odpowiedzią jaką uzyskujemy w wyniku prowadzonych rachunków. Bardzo często zdumiewa nas wielkość obliczonego prawdopodobieństwa, gdyż przed rozwiązywaniem zadania nasz „zdrowy rozsądek" sugerował zupełnie inną jego ocenę.

W matematyce szkolnej ważną rolę odgrywają relacje, i wiele miejsca poświęca się badaniom ich własności. Szczególnie mocno akcentuje się własność zwaną przechodniością relacji. Matematyka szkolna dostarcza wielu przykładów relacji, które spełniają warunek przechodniości np: relacja równoległości prostych (płaszczyzn), relacje przystawania i podobieństwa figur, relacja inkluzji, relacje równości, większości, mniejszości, relacja podzielności itd.

Również w życiu codziennym porównując pewne sytuacje często mamy do czynienia z sytuacjami wymagającymi porównania pewnych fizycznych wielkości np.: ciężaru, wzrostu, ceny, objętości, prędkości itp. W tych sytuacjach korzystamy z relacji liniowo porządkujących, a więc posiadających własność przechodności.

Zarówno w szkole, jak i w życiu codziennym niezbyt często spotykamy się z relacjami, które nie są przechodnie. Jednym z nielicznych szkolnych przykładów jest relacja prostopadłości prostych (płaszczyzn).

Rozważmy następującą sytuację ujawniającą nieprzechodność pewnej relacji.

Załóżmy, że w grze uczestniczy dwóch graczy. Każdy z nich wybiera jeden z wielu przyrządów losujących liczbę, będących rekwizytami w grze. Każdy losuje liczbę a zwycięża ten kto wylosuje liczbę większą. Z dwu przyrządów losujących ten nazwijmy *lepszym*, który daje graczowi większe szanse na zwy-

cięstwo. Takimi przyrządami losującymi są sześcienne kostki zwane ***nieprzechodnimi kostkami Bradleya Efrona***[1]:

— kostka k_1, o dwu ściankach z dwoma oczkami i czterech ściankach z trzema oczkami,

— kostka k_2, o dwu ściankach z sześcioma oczkami i czterech ściankach z jednym oczkiem,

— kostka k_3, o dwu ściankach bez oczka i czterech ściankach z czterema oczkami;

trzy zestawy kart:

z_A — „as", „szóstka", „ósemka";

z_B — „trójka", „piątka", „siódemka";

z_C — „dwójka", „czwórka", „dziewiątka";

ruletki Dietricha Morgensterna, tj. ruletki, których tarcze podzielone są na trzy równe sektory (jako wycinki koła) oznaczone liczbami:

— ruletka r_1, z liczbami 1, 6 i 8,

— ruletka r_2, z liczbami 3, 5 i 7,

— ruletka r_3, z liczbami 2, 4 i 9.

Wylosowana liczba to liczba na sektorze wskazanym przez strzałkę.

Rozważmy następującą grę, w której uczestniczy dwóch graczy. Pierwszy gracz wybiera jedną z trzech kostek Bradleya Efrona, a następnie drugi gracz wybiera jedną z dwu pozostałych. Każdy z graczy rzuca wybraną kostką. Zwycięża ten, kto wyrzuci większą liczbę oczek.

Oto problemy, jakie pojawiają się na tle wspomnianej gry:

— Czy wśród owych przyrządów losujących jest „najlepszy", tj. taki, który gwarantuje graczowi większe szanse na zwycięstwo niż ma jego przeciwnik w grze, niezależnie od tego, którym spośród pozostałych przyrządów losuje liczbę ten przeciwnik?

— Czy postępując racjonalnie należałoby skorzystać z oferowanego pierwszeństwa gdy chodzi o wybór przyrządu w trakcie przystępowania do gry?

---

[1]Taka nazwa przyjęła się w literaturze, choć nie jest ona poprawna, gdyż nie kostki są przechodnie tylko pewna relacja.

Rozwiązanie tego typu zadań[2] ujawnia pewien paradoks. W przypadku opisanych kostek Bradleya Efrona, kostka k_1 jest „lepsza" od kostki k_2, kostka k_2 jest „lepsza" od kostki k_3 i — co jest paradoksem — kostka k_3 jest lepsza od kostki k_1. Analogiczną sytuację mamy w przypadku zestawów kart, zwstaw z_A jest „lepszy" od zestawu z_B, zestaw z_B „lepszy" od zstawu z_C a zestaw z_C „lepszy" od zestawu z_A. Nietrudno wykazać, że ruletka r_1 jest „lepsza" od r_2, ruletka r_2 jest „lepsza" od r_3 a ruletka r_3 jest „lepsza" od r_1. Wśród przyrządów w każdej trójce nie ma więc „najlepszego". Z prawa pierwszeństwa, gdy chodzi o wybór przyrządu losującego, nie należy korzystać. Relacja „być lepszym" nie jest więc przechodnia, co kłóci się z naszymi intuicjami. Fakt, że wśród opisanych przyrządów losujących nie ma najlepszego przestaje dziwić, gdy uświadomimy sobie, że każde dwa przyrządy porównuje się w innej przestrzeni probabilistycznej.

2. Nieprzechodność pewnej ralacji a kupony *bingo*

Dalsze rozważania dotyczą procesu podejmowania decyzji w sytuacjach niepewności. Wyłanianie optymalnej decyzji na gruncie matematyki obejmuje formułowanie i rozwiązywanie pewnego zadania z rachunku prawdopodobieństwa.

Problem, o którym mowa, przytoczono bez rozwiązania w [1]. Niniejsza praca zawiera pewną propozycję tego rozwiązania. Ujawnia ono nieprzechodniość pewnej relacji. Nieprzechodniość ta jest faktem nieco zaskakującym. Dydaktyka matematyki zalicza tego typu paradoksy do tzw. *zadań-stochastycznych niespodzianek* i traktuje je jako ważny środek matematycznej aktywizacji ucznia (por. [2], s. 205-225).

Rozważmy grę z udziałem dwu graczy: G_a i G_b. Każdy nabywa jeden z czterech kuponów z rys. 1. Z urny U o sześciu kulach ponumerowanych liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, losuje się kulę. Jeśli numer wylosowanej kuli znajduje się na kuponie gracza, to skreśla on pole z tym numerem. Kule losuje się bez zwracania tak długo, aż jeden z graczy skreśli obie liczby w wierszu na swoim kuponie. Mówi on wtedy „bingo!" i zostaje zwycięzcą. Jest to pewna miniatura gry *bingo* (rosyjskie loto).

Sformułujmy problem tak, aby dotyczył podejmowania decyzji. Załóżmy, że proponują Ci udział w tej grze, oferując prawo pierwszeństwa, gdy chodzi o wybór kuponu. Jaką podejmiesz decyzję w takiej sytuacji? Jak tę decyzję uzasadnisz na gruncie rachunku prawdopodobieństwa? Rozwiązywanie tego pozamatematycznego problemu rozpoczyna się od szczegółowej analizy samej

[2]można je znaleźć w [2]

gry, a ta od konstrukcji modelu probabilistycznego doświadczenia losowego, jakie jest przeprowadzane w grze. Z urny U losowana jest bez zwracania kula tak długo, aż padnie „bingo". Jest to doświadczenie o losowej liczbie etapów. Liczbę losowań kuli można uważać za czas jego trwania. Wynik losowania kodujmy ciągiem numerów kolejno wyciąganych kul.

1	2
3	4

kupon k_1

2	4
5	6

kupon k_2

1	3
4	5

kupon k_3

1	5
2	6

kupon k_4

rys. 1.

Gra może zakończyć się remisem, gdy po tym samym losowaniu, obaj gracze skreślą dwie liczby w wierszu na swoich plaszach. Remis może się zdarzyć np. w przypadku gdy gracz G_a wybierze kupon k_1, gracz G_b kupon k_2, w losowaniu zaś za I razem zostanie wylosowana kula o numerze 3, za II — o numerze 2, a za III — o numerze 4.

Nazwijmy kupon k_j „lepszym" od kuponu k_l, jeśli w opisanej grze szanse gracza, który ma kupon k_j, są większe od szans jego przeciwnika, który ma kupon k_l.

W zadaniu chodzi w istocie o rozstrzygnięcie, czy wśród wspomnianych kuponów jest najlepszy? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Wykażemy, że kupon pierwszy jest lepszy od drugiego, drugi lepszy od trzeciego, trzeci lepszy od czwartego, czwarty zaś lepszy od pierwszego. Oznacza to, że nie ma wśród nich najlepszego, a więc do każdego kuponu wybranego przez gracza z prawem pierwszeństwa, drugi gracz może wybrać lepszy kupon. Racjonalnie postępując gracz nie powinien przystawać na oferowane mu prawo pierwszeństwa. Przy wyborze kuponu lepiej być „drugim".

1. Wykażemy, że kupon k_1 jest lepszy od kuponu k_2. Niech $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Załóżmy, że gracz G_a wybrał kupon k_1, a gracz G_b — kupon k_2. Jeśli za pierwszym razem wylosowano z urny U kulę o numerze 3, za drugim kulę o numerze 1, za trzecim o numerze 2, to gra kończy się po trzech losowaniach zwycięstwem gracza G_a.

Gra musi zakończyć się po co najwyżej czwartym losowaniu. W celu uzasadnienia tego faktu przypuśćmy, że zwycięzca został wyłoniony dopiero po piątym losowaniu. Wtedy wynik jest pewną pięciowyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru L.

Przypuśćmy, że ostatnim wyrazem tej wariacji jest 1. W tym przypadku gra kończy się wygraną gracza G_a, więc jednym z czterech pierwszych wyrazów wariacji musi być 2. W tej sytuacji trzy pozostałe wyrazy muszą należeć do zbioru $\{3,4,5,6\}$. Mogą nimi być 345, 346, 356 lub 456. W każdym przypadku wśród czterech pierwszych wyrazów wariacji występują liczby dające zwycięstwo któremuś z graczy, a więc we wszystkich czterech przypadkach gra kończy się po co najwyżej czterech etapach. Analogicznie dowodzimy, gdy ostatnim wyrazem wariacji jest 3, 5 lub 6.

Załóżmy teraz, że ostatnim, piątym wyrazem wariacji jest 2 (lub 4). Gra kończy się wtedy wygraną gracza G_a lub też gracza G_b. Wówczas jednym z czterech pierwszych wyrazów musi być 1 (2) lub 4 (3). Analizując kolejno obydwie sytuacje i przeprowadzając rozumowanie analogiczne do poprzedniego, dochodzimy w każdym przypadku do sprzeczności. Pokazaliśmy więc, że losowanie, a więc i gra nie może trwać „dłużej" niż 4 etapy.

2. Gra trwa co najmniej dwa etapy. Może trwać trzy etapy (132) lub może zakończyć się dopiero po czwartym losowaniu (1352). Oznacza to, że do przestrzeni wyników Ω doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze należą dwu-, trzy- i czterowyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru L. Ale nie każda wariacja tej postaci przedstawia możliwy wynik doświadczenia. Wariacja 13 nie należy do przestrzeni Ω, ponieważ opisuje ona sytuację gdy żaden z graczy nie skreślił jeszcze dwu liczb w jednym wierszu. Podobnie do przestrzeni Ω nie należą wariacje 123 i 1234. Przestrzeń Ω jest więc zbiorem tych dwu-, trzy- i czterowyrazowwych wariacji bez powtórzeń ze zbioru L, które spełniają następujące warunki:

1) wśród $k-1$ pierwszych wyrazów k-wyrazowej wariacji ($k = 2,3,4$) nie występują jednocześnie obydwie liczby z któregokolwiek wiersza na obydwu planszach,
2) wśród $k-1$ pierwszych wyrazów wariacji znajduje się liczba taka, że wraz z k-tym wyrazem wariacji daje któryś z wierszy z planszy p_1 lub p_2.

3. Rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni Ω jest funkcją p, która m-wyrazowej wariacji ω ze zbioru Ω przypisuje wartość

$$p(\omega) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{6-m+1} \qquad (m = 2,3,4).$$

Wszystkie należące do przestrzeni Ω wariacje jednakowej długości są jednakowo prawdopodobne. Jeśli zatem zdarzeniu sprzyja k wariacji o długości m, to prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $k\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{1}{6-m+1}$.

Rozważmy zdarzenia:

$$A = \{\textit{zwycięży gracz } G_a\},$$

$$B = \{\textit{zwycięży gracz } G_b\},$$
$$R = \{\textit{gra zakończy się remisem }\}.$$

Zdarzenia A, B i R tworzą układ zupełny zdarzeń ($A \cup B \cup R = \Omega$ i $A \cap B = A \cap R = B \cap R = \emptyset$).

4. Poklasyfikujmy wariacje sprzyjające zdarzeniom A, B i R, pod względem ich długości. Rozważmy zdarzenia:

$$A_j = \{\textit{gra zakończy się po } j \textit{ etapach wygraną gracza } G_a\},$$
$$B_j = \{\textit{gra zakończy się po } j \textit{ etapach wygraną gracza } G_b\},$$
$$R_j = \{\textit{gra zakończy się remisem po } j \textit{ etapach}\}, \text{ dla } j = 2, 3, 4.$$

W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) mamy:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{12, 21, 34, 43\};\\
B_2 &= \{24, 42, 56, 65\};\\
A_3 &= \{312, 321, 512, 521, 612, 621, 134, 143, 534, 543, 634, 643,\\
&\quad 132, 231, 152, 251, 162, 261, 314, 413, 354, 453, 364, 463\};\\
B_3 &= \{524, 542, 624, 642, 156, 165, 256, 265, 356, 365, 456, 465,\\
&\quad 254, 452, 264, 462, 516, 615, 526, 625, 536, 635, 546, 645\};\\
R_3 &= \{412, 234, 324, 142\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= 4 \cdot \frac{1}{30} = \frac{4}{30},\\
P(B_2) &= 4 \cdot \frac{1}{30} = \frac{4}{30},\\
P(A_3) &= 24 \cdot \frac{1}{120} = \frac{6}{30},\\
P(B_3) &= 24 \cdot \frac{1}{120} = \frac{6}{30},\\
P(R_3) &= 4 \cdot \frac{1}{120} = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned}
R_4 \supset \{&1452, 1542, 1462, 1642, 2354, 2534, 2364, 2634, 3254, 3524, 3264, 3624,\\
&4152, 4512, 4162, 4612, 5142, 5234, 5324, 5412, 6142, 6234, 6324, 6412\},
\end{aligned}$$

a więc

$$P(R_4) \geq 24 \cdot \frac{1}{360} = \frac{2}{30}.$$

Zauważmy, że zdarzeniu A_4 sprzyjają wyniki: 1352, 1532, 1362, 1632. Permutując pierwsze 3 wyrazy każdej z tych wariacji uzyskamy 8 kolejnych wyników losowania sprzyjających zdarzeniu A_4. Zamieniając w każdym z powyższych ciągów miejscami dwójkę (ostatni wyraz) z jedynką, uzyskamy 12 kolejnych wyników sprzyjających zdarzeniu A_4. Zdarzeniu A_4 sprzyjają więc co najmniej 24 wyniki.

Zdarzeniu A_4 sprzyjają także wyniki: 3154, 3514, 3164, 3614. Postępując analogicznie, jak poprzednio stwierdzamy, że zdarzeniu A_4 sprzyjają także kolejne 24 wyniki. Zdarzeniu A_4 sprzyja więc co najmniej 48 wyników, prawdopodobieństwo każdego wynosi $\frac{1}{360}$, a zatem $P(A_4) \geq 48 \cdot \frac{1}{360} = \frac{4}{30}$.

Policzmy, ile wyników doświadczenia sprzyja zdarzeniu B_4. Są takimi wynikami m.in. wariacje: 1356, 3156, 1456, 4156, 2356, 3256. Permutując pierwsze 3 wyrazy każdej z tych wariacji uzyskamy 12 następnych wyników (wariacji) sprzyjających zdarzeniu A_4. Zamieniając w każdej z tych wariacji miejscami szóstkę (ostatni wyraz) z piątką uzyskamy 18 kolejnych wariacji sprzyjających zdarzeniu B_4. Zdarzeniu B_4 sprzyja co najmniej 36 wyników, a zatem $P(B_4) \geq 36 \cdot \frac{1}{360} = \frac{3}{30}$.

Zdarzenia $A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4, R_3, R_4$ tworzą układ zupełny zdarzeń, ponadto

$$\begin{aligned} &P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(R_3) + P(R_4) \\ &\qquad \geq \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{30} = 1, \end{aligned}$$

a więc $P(A_4) = \frac{4}{30}$, $P(B_4) = \frac{3}{30}$. Ponieważ $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ i $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$, więc

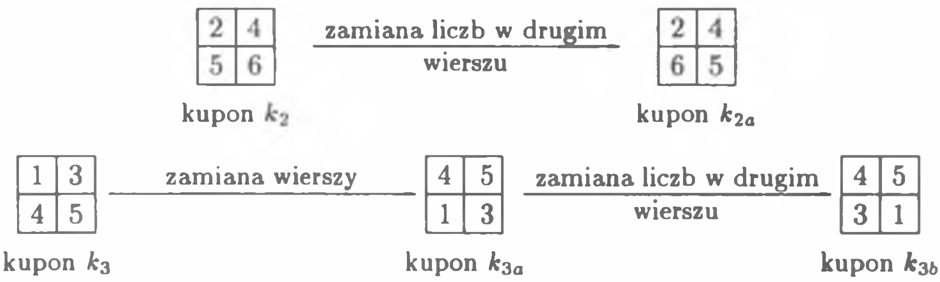
$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{4}{30} = \frac{14}{30},$$
$$P(B) = P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{13}{30}.$$

Zatem $P(A) > P(B)$. Szanse gracza, który ma kupon k_1 są w opisanej grze większe niż szanse gracza, który ma kupon k_2. Kupon k_1 jest lepszy od kuponu k_2.

5. Pokażemy teraz, że kupon k_2 jest lepszy od kuponu k_3, sprowadzając sytuację, w której gracz G_a ma kupon k_2, a gracz G_b kupon k_3, do sytuacji, gdy G_a ma kupon k_1 a G_b kupon k_2. W tym celu wystarczy odpowiednio przenumerować kule w urnie i odpowiednio liczby na kuponach k_1 i k_2 tak, aby kupon k_1 stał się kuponem k_2 a kupon k_2 kuponem k_3. Zauważmy, że z punktu widzenia gracza nie jest ważne, który wiersz zostanie skreślony, a więc jeśli na dowolnym kuponie przestawimy wiersze to uzyskany w ten sposób „nowy” kupon daje takie same szanse na zwycięstwo, jak kupon wyjściowy. Podobnie w każdym wierszu można zamienić miejscami występujące w nim liczby.

Dwa kupony nazwijmy *równoważnymi*, jeśli jeden z nich można uzyskać z drugiego poprzez przestawienie w nim wierszy lub zamianę miejscami liczb w wierszach.

Przekształćmy kupony k_2 i k_3 w sposób przedstawiony na rys. 2.



rys. 2.

Funkcja $g : L \to L$ $(L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \})$ określona następująco:

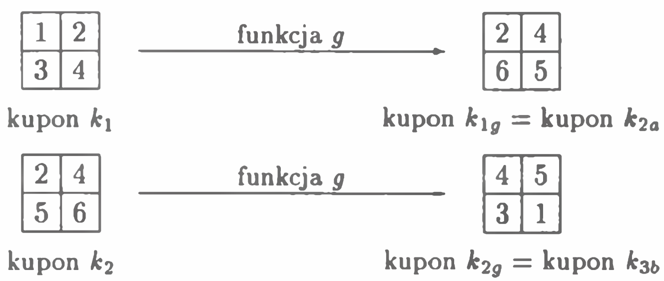
$$g(1) = 2, \quad g(2) = 4, \quad g(3) = 6, \quad g(4) = 5, \quad g(5) = 3, \quad g(6) = 1,$$

jest bijekcją ze zbioru L na L.

Określmy na przestrzeni Ω funkcję G następująco:

$$G(\omega) = \begin{cases} (g(a), g(b)), & \text{gdy } \omega = (a, b); \\ (g(a), g(b), g(c)), & \text{gdy } \omega = (a, b, c); \\ (g(a), g(b), g(c), g(d)), & \text{gdy } \omega = (a, b, c, d). \end{cases}$$

Przekształćmy liczby na kuponach p_1 i p_2 przez funkcję g (rys. 3).



rys. 3.

Zauważmy dalej, że $G(\Omega)$ jest przestrzenią wyników dla sytuacji, gdy gracz G_a ma kupon k_{2a}, gracz G_b zaś kupon k_{3b}. Wynika stąd, że kupon k_{2a} jest lepszy od k_{3b}, a ponieważ kupony k_2 i k_{2a} oraz k_3 i k_{3b} są równoważne, więc kupon k_2 jest lepszy od k_3.

6. Aby wykazać, że kupon k_3 jest lepszy od k_4, wystarczy w k_3 zamienić miejscami liczby w pierwszym wierszu kuponu k_3 i rozważyć funkcję $h : L \to L$:

$$h(1) = 3, \quad h(2) = 1, \quad h(3) = 4, \quad h(4) = 5, \quad h(5) = 2, \quad h(6) = 6.$$

W celu pokazania, że kupon k_4 jest lepszy od k_1 należy zamienić miejscami na kuponie k_4 liczby w obydwu wierszach i rozważyć funkcję $f : L \to L$:

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 6, \quad f(5) = 3, \quad f(6) = 4.$$

Wykazaliśmy zatem, że wśród tych czterach kuponów nie ma najlepszego.

3. Uwagi końcowe

Potawione na wstępie pytania stały się punktem wyjścia do sformułowania i rozwiązania zadania probabilistycznego. W tym celu należało dokonać przekładu pewnego pozamatematycznego problemu na język matematyki, skonstruować model probabilistyczny, wykonać w tym modelu stosowne obliczenia a następnie zinterpretować uzyskane wyniki.

Ten sam problem można rozwiązać w innym modelu probabilistycznym. Można przyjąć, że losowanie kuli kontynuujemy aż urna U będzie pusta. Przestrzeń Ω^* jest wtedy zbiorem wszystkich permutacji zbioru L. Dla każdego $\omega \in \Omega^*$ jest wówczas $p(\omega) = \frac{1}{6!}$. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń w takim klasycznym modelu probabilistycznym sprowadza się do liczenia mocy zdarzeń A, B i R, te zaś rachunki są skomplikowane z uwagi na to, że liczba możliwych wyników wynosi aż 720.

W rozwiązaniu zaproponowanym w tej pracy opis przestrzeni Ω jest nieco skomplikowany, ale obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń A, B i R jest prostsze i ciekawsze.

Rozwiązanie zadania ujawnia pewien pozorny paradoks. Wśród czterech kuponów nie ma najlepszego. W omawianej sytuacji relacja „być lepszym" nie jest przechodnia, co kłóci się z naszymi intuicjami. W zrozumieniu i wyjaśnieniu tego paradoksalnego faktu może pomóc refleksja nad rozwiązaniem, w którym każde dwa kupony porównywane i oceniane były ze sobą w innej przestrzeni probabilistycznym. Inny więc sens miało stwierdzenie, że kupon k_1 jest „lepszy" od kuponu k_2, inny zaś stwierdzenie, że k_2 jest „lepszy" od

k_3, według innego kryterium (bo w innych przestrzeniach probabilistycznych) dokonywały się te oceny.

Celem pracy było:

— pokazanie, że nauczanie rachunku prawdopodobieństwa można wzbogacać o pewne paradoksy, problemy-stochastyczne niespodzianki, rozwiązanie których ujawnia, jak złe wnioski formułujemy kierując się intuicją;

— ukazanie roli przestrzeni probabilistycznej jako pewnego modelu doświadczenia losowego i jej konstrukcji jako istotnego etapu rozwiązywania zadania z rachunku prawdopodobieństwa;

— pokazanie, jak racjonalizować obliczanie prawdopodobieństwa, pomijając, na ogół mało ciekawe, rachunki związane z kombinatoryką przy obliczaniu prawdopodobieństwa w klasycznych modelach probabilistycznych.

Literatura

[1] M. Gardner, *Time Trawevel and Other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman and Company, New York 1988.

[2] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas*, Wydawca: Kolegium Nauczycielskie, Nowy Sącz 1995.

[3] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.

[4] G. J, Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.

Instytut Matematyki
WSP
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
E-mail: mmajor@wsp.krakow.pl