ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 191 Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki II 1998

Barbara Nawolska

Dydaktyczne zabiegi związane z ujawnianiem strategii Kahnemana–Tversky'ego we wnioskowaniach stochastycznych

Résumé. L'article a pris pour but de rélèver l'application des stratégies heuristiques de Kahneman et Tversky [7] dans les déductions stochastiques. Ce but est réalisé par les problèmes choisis de telle manière que les étudiants les résolvant soient réelment obligés de s'appuyer sur les stratégies mentionées ci-dessus. Dans les recherches on ne se contente pas d'établir la diagnose: l'individu se sert de la stratégie heuristique de Kahneman et Tversky, mais par le choix d'autres problèmes (chaque problème précédent a son correspondant), on essaye d'éliminer les déductions erronées et de développer les intuitions stochastiques correctes.

1. Uwagi wstępne

> Badanie i odkrycie matematyczne jest nie tylko rezultatem czystej dedukcji, myślenia indukcyjnego i myślenia przez analogie, ale także myślenia intuicyjnego. ([5], str. 398).

Intuicje wykorzystywane są w każdym dziale matematyki, a zatem także w rachunku prawdopodobieństwa. Intuicje związane z rachunkiem prawdopodobieństwa, nazywane *intuicjami stochastycznymi*, określane są jako

> ... zdolność dochodzenia do pewnych sądów i przekonań o charakterze probabilistycznym i statystycznym (a w pewnym sensie także i kombinatorycznym) bez świadomego wnioskowania, a nawet bez uświadamiania sobie przesłanek uzasadniających to przekonanie czy sąd ([5], str. 402).

> Wnioski natury intuicyjnej są wnioskami, które wydają nam się oczywiste, które formułujemy natychmiast, prawie bez głębszego zastanowienia, z pominięciem dedukcji i rozumowań, rachunków i argumentacji, a na podstawie zachowanych w pamięci obrazów, schematów i modeli spotykanych uprzednio sytuacji ([5], str. 403).

Czasami (zwłaszcza w rachunku prawdopodobieństwa) zdarza się, że intuicja podpowiada nam błędne rozwiązania.

> Od początku istnienia rachunku prawdopodobieństwa zawsze były kwestie sporne, to znaczy zadania, które były różnie rozwiązywane, dopóki szczegółowa analiza nie wykazała, po czyjej stronie była racja (por. [2]).
>
> Każdy, kto zajmuje się zadaniami ze stochastyki, może zaobserwować u siebie i innych, że w tej dziedzinie w o wiele większym stopniu niż w innych działach matematyki istnieją błędne wyobrażenia (por. [8]).

W rachunku prawdopodobieństwa częściej niż w algebrze, czy geometrii pojawiają się błędne wnioski, a poprawne rozwiązanie jest zaskakujące, budzi zdziwienie a nawet sprzeciw.

Przyczyny tak często popełnianych błędów, w ocenach sytuacji związanych z ryzykiem albo niepewnościami co do stanów świata zewnętrznego, psychologowie upatrują w tym, że

> ... człowiek — gdy podejmuje ważne decyzje lub rozwiązuje problemy losowe — rozumuje według reguł zwanych schematami przyczynowymi. Może nawet wiedzieć, że rozwiązania oparte na statystyce, na myśleniu probabilistycznym są trafniejsze i lepsze, a mimo to odrzuca je. Psychologowie uważają, że jest to związane ze stwierdzonym w badaniach faktem, iż szukanie jednoznacznych przyczyn i przeświadczenie, że ta sama przyczyna zawsze wywołuje te same skutki, jest u ludzi naturalną metodą poznawania i porządkowania rzeczywistości. Gdyby rozwiązywali problemy czy poznawali rzeczywistość statystycznie, musieliby przyjąć, że nie zawsze po A następuje B, że możliwe jest B, C i D. Przyjęcie takiego założenia zwiększyłoby niepewność i zmniejszyłoby poczucie bezpieczeństwa — czynniki niezwykle ważne w życiu. Dlatego odrzucamy myślenie probabilistyczne, chroniąc własne przeświadczenia i zwiększając liczbę popełnianych błędów ([3], str. 32]).

Człowiek nie posiadający wystarczającej wiedzy probabilistycznej lub kombinatorycznej wykorzystuje w ocenach sytuacji związanych z ryzykiem, niepewnością i podejmowaniem w tych okolicznościach decyzji, pewne strategie heurystyczne. Niektóre z nich wyodrębnili oraz opisali Kahneman i Tversky (zob. [7]). Strategie te stanowią wyjaśnienie na gruncie psychologii postępowania ludzi, którzy redukują złożony problem stochastyczny do prostszego. Kahneman i Tversky wyodrębnili trzy zasadnicze strategie heurystyczne:

(A) Availiability (strategia dostępności, możliwości wskazania przykładu),

(B) Representativeness (strategia reprezentatywności),

(C) Anchoring (reguła powiązania, zakotwiczenia).

O strategii (A) mówimy, gdy w ocenach prawdopodobieństwa przyjmuje się za bardziej prawdopodobne to zdarzenie, którego realizację łatwiej sobie wyobrazić, dla którego łatwiej wskazać wynik sprzyjający, „zobaczyć" więcej takich wyników.

Mówimy o strategii (B), gdy w ocenach prawdopodobieństwa, za bardziej prawdopodobne uważa się to zdarzenie, które jest bardziej reprezentatywne dla doświadczenia losowego, z którym się to zdarzenie wiąże. Uważa się, że im bardziej zdarzenie jest „regularne", uporządkowane jakby „nielosowe", tym jego prawdopodobieństwo jest mniejsze.

Istotą strategii (C), jest wiązanie informacji występujących kolejno po sobie i wykorzystywanie ich we wnioskowaniach, chociaż nie mają one żadnego wpływu na rozwiązanie problemu.

Znajomość tego rodzaju heurystyk i związanych z nimi błędnych wyobrażeń, a więc i błędnych wniosków o charakterze intuicyjnym, może być pomocna tym, którzy uczą rachunku prawdopodobieństwa. Znajomość strategii heurystycznych pozwala wyjaśnić, jakie są źródła tych błędów, gdzie leżą ich przyczyny, jaką mają one naturę. Dużo ważniejsza jest jednak odpowiedź na pytanie, jak można usunąć te błędne intuicje, błędne wyobrażenia dotyczące „świata przypadku".

Wydaje się, że włączony do szkolnej matematyki kurs stochastyki, pomaga zlikwidować te błędy. Badania nie potwierdzają tej tezy. Przeciwnie, wzorowany na akademickim wykładzie sformalizowany kurs rachunku prawdopodobieństwa, nie tylko nie usuwa tych „błędnych wyobrażeń", ale jeszcze je pogłębia (por. [6], [7], [8]). Aby wyeliminować opisane błędne wnioskowania o charakterze intuicyjnym, konieczna jest zmiana treści i form nauczania rachunku prawdopodobieństwa.

Ogromną rolę w rozwoju właściwych intuicji stochastycznych ma kontakt ucznia z empirią, konfrontacje jego ocen intuicyjnych z ocenami *a posteriori*, doświadczenie ucznia zdobyte poprzez osobiste eksperymentowanie związane z losowaniem próbki, gromadzeniem i opracowywaniem oraz analizą danych statystycznych, a przez to odkrywaniem pewnych regularności (stabilizacja częstości, zbieżność stochastyczna, podobieństwo dwu próbek będące rezultatem izomorfizmu przestrzeni probabilistycznych) i wyjaśnianiem praw rządzących światem przypadku.

Proces matematyzacji w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa, jako proces tworzenia przestrzeni probabilistycznej dla pozamatematycznej sytuacji, może prowadzić poprzez tzw. *schemat symulacyjny* (por. [5], str. 316), tj. typowe dla rachunku prawdopodobieństwa doświadczenie przeprowadzane za pomocą przyrządów losujących o wyraźnych cechach matematycznych (monety, kostki w kształcie wielościanów foremnych, urny z kulami, talia kart itd.).

Schemat taki reprezentuje rodzinę wszystkich doświadczeń losowych, których modele probabilistyczne są izomorficzne. Konstrukcje schematu symulacyjnego, a więc modelowanie zjawisk losowych, ich opisywanie w kategoriach rzutów monetami, kostkami czy losowań kul z urny, odgrywa w kształceniu stochastycznym (a więc m.in. w kształtowaniu właściwych intuicji stochastycznych) podobną rolę jaką odgrywa odręczny rysunek (jako schemat wielu geometrycznych obiektów i relacji między nimi) w kształtowaniu intuicji geometrycznych.

> Rozwijanie intuicji stochastycznych — to rozwijanie pamięci podstawowych własności schematów symulacyjnych, rozwijanie zdolności widzenia lub szybkiego dopasowywania do konkretnej sytuacji jej schematu symulacyjnego, to uczenie technik posługiwania się tymi schematami jako wygodnymi modelami sytuacji ([5], str. 403).

Czasami jednak

> Pamięć o modelach (...) bywa skoncentrowana na pewnych cechach modelu, które nie przenoszą się na sytuacje, w jakich znaleźliśmy się ([5], str. 404).

Czasami

> ...natrętny obraz modelu sugeruje jego własności szczególne, które nie powinny być zachowane w schemacie, mówimy, że wtedy intuicja zawodzi, i prowadzi do błędnych hipotez ([4], str. 135).

W [5] podkreśla się, że rozwój intuicji stochastycznych winien być jednym z ważniejszych celów nauczania stochastyki w szkole i to już we wczesnym okresie nauczania.

> Najdoskonalsza organizacja i synteza zwykłych wrażeń ma miejsce we wczesnym dzieciństwie i odbywa się w bardzo głębokich warstwach podświadomości (Hadamard w [5], str. 404).

Nie sposób przeceniać roli błędów, znanych z dziejów rachunku prawdopodobieństwa, paradoksów i sofizmatów w kształtowaniu właściwych intuicji stochastycznych. Pokazywanie niewłaściwych wnioskowań, ujawnianie popełnianych błędów (zwłaszcza własnych błędów) i ich akcentowanie jest jednym z zabiegów dydaktycznych pozwalających na kształtowanie właściwych intuicji, które nazywamy *wtórnymi* w stosunku do pierwotnych (błędnych) intuicji. Tę ideę dydaktyczną zaprezentowano w [1]. Autor podaje dwie serie zadań, z których pierwsza ma ujawniać błędy wynikające ze stosowania strategii heurystycznych Kahnemana i Tversky'ego, druga zaś ma rozwijać intuicje stochastyczne, wskazując drogę do poprawnego rozwiązania.

Zadania proponowane w [1] dotyczą osobliwych sytuacji i zjawisk pozamatematycznych takich, jak kraksy samochodowe, popyt i podaż, pogoda,...(a więc na ogół nie poddających się matematyzacji *a priori*). Jest to typowa cecha angielskich podejść do problematyki stochastycznej w podręcznikach szkolnych. Przestrzenie probabilistyczne, jako modele tych sytuacji, tworzy się w tych ujęciach na bazie danych statystycznych, tj. próbki, której reprezentatywność jest na ogół dyskusyjna (wiarygodność modelu uzyskanego na drodze estymacji jest wątpliwa).

W niektórych zadaniach zaproponowanych w [1] trudności napotykamy już w samym zrozumieniu treści zadania. Sporą grupę stanowią zadania typu [1]:

Linda ma 31 lat, jest samotna (panna), ma dużo do powiedzenia. Posiada tytuł naukowy w dziedzinie filozofii. Jako studentka była bardzo zainteresowana sprawami dyskryminacji i sprawiedliwości społecznej, brała udział w demonstracjach antynuklearnych. Które z poniższych twierdzeń ma większe prawdopodobieństwo bycia prawdą?
a) Linda jest mówcą bankowym,
b) Linda jest mówcą bankowym i jest aktywna w ruchu feministek.

Rozwiązanie tego zadania wymaga rozumienia związków między zbiorami, relacji zawierania i części wspólnej zbiorów; można dyskutować, czy chodzi tu o zadanie z rachunku prawdopodobieństwa.

Judy jest piękną młodą kobietą. Dba o siebie, jest zgrabna i seksowna. Zawsze nosi modne ubrania i jest często widywana w salonach piękności, kawiarniach i butikach. Jak sądzisz, co jest bardziej prawdopodobne, że Judy jest modelką czy też, że jest żoną zajmującą się tylko domem?
a) jest bardziej prawdopodobne, że Judy jest modelką,
b) jest bardziej prawdopodobne, że jest żoną i gospodynią.

Rozwiązanie tego zadania wymaga oszacowania mocy zbiorów: *modelek* i *gospodyń* oraz odpowiedzi, do którego zbioru należy losowo spotkana kobieta.

Pani Starr studiuje chemię, fizykę, astronomię oraz biologię. Idziesz do półki z jej książkami i liczysz wszystkie jej książki — jest ich x. Później liczysz jej książki naukowe — jest ich y. Czy według ciebie x jest większe niż y, czy y jest większe niż x?
a) x jest większe niż y,
b) y jest większe niż x.

Rozwiązanie tego zadania wymaga rozumienia sensu dużego kwantyfikatora, jest więc zadaniem raczej logicznym niż probabilistycznym.

Na końcu sezonu twoja drużyna sportowa kończy jako pierwsza w swojej lidze i ty uważasz ją za najlepszą drużynę. Jednakże musisz współzawodni-

[1] treści zadań w tłumaczeniu autora

czyć w ostatniej decydującej serii gier z drużyną z drugiej pozycji w lidze, aby określić, kto jest mistrzem. Która z serii: pięciu gier czy też dziewięciu gier, dałaby ci większą szansę zdobycia mistrzowstwa, lub czy nie ma w tym różnicy?
a) seria pięciu gier da ci większą szansę,
b) seria dziewięciu gier da ci większą szansę,
c) nie ma różnicy.

Rozwiązanie zadania wymaga znajomości zagadnień sportowych, a ponadto nie są znane prawdopodobieństwa u i v określające odpowiednio szanse wygrania i przegrania drużyny pierwszej z drugą.

Powyższe przykłady zadań (typowe dla angielskich ujęć stochastyki[2]) raczej nie mogą ilustrować stosowania strategii heurystycznych Kahnemana i Tversky'ego w sytuacjach stochastycznych. Gdy chodzi o formę i treść problemów jako „surowca" do ujawniania błędnych i do kształtowania właściwych intuicji stochastycznych, niniejsza praca różni się więc od podejścia zaprezentowanego w [1].

2. Propozycje zadań ujawniających strategie Kahnemana i Tversky'ego

Podajemy nieco inną niż w [1] propozycję zadań matematycznych [3].

Proponowane poniżej zadania, bliższe są matematyce, łatwiej wskazać model symulacyjny dla opisanych w nich doświadczeń losowych, a tym samym rozwiązać je we właściwym modelu probabilistycznym. Celem zadań jest ujawnianie błędów popełnianych w sytuacjach, gdy oceny formułujemy natychmiast, bez głębszej zadumy, bez sięgania do rachunków jako narzędzi ich rozwiązywania. Rozwiązanie tych zadań wymaga pewnej wiedzy probabilistycznej, a przede wszystkim pewnej kultury stochastycznej a także pewnego wysiłku umysłowego. Zadania mają formę testową. Taka forma zadań jest dobrana celowo, by prowokować wybór łatwiejszej drogi; wybór jednej spośród kilku gotowych odpowiedzi. Można oczekiwać, że w takiej sytuacji (wybierając gotową odpowiedź) nikt już nie odwołuje się do rozumowań matematycznych, a wnioski swe opiera jedynie na intuicjach. Zadania zestawione są w dwóch seriach.

Zadania I serii dobrane są tak, by możliwe było ujawnienie, czy osoby rozwiązujące (o ile nie skorzystają z poprawnej drogi rozwiązania we wła-

[2] por. *The School Mathematics Project, Revised Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Book B (1969), Book C (1969), Book E (1970), Book F(1972) i Book G (1971)

[3] idee niektórych zadań zrodziły się pod wpływem materiałów z [1]

ściwie dobranym modelu) korzystając ze strategii heurystycznych Kahnemana i Tversky'ego popełniają błędy i jaki jest charakter tych błędów. Celem zadań I serii jest właśnie ujawnianie błędnych wnioskowań.

Zadania II serii mają identyczną formę jak zadania I serii i ułożone są w kolejności odpowiadającej zadaniom I serii (zadania I.1 oraz II.1 tworzą pewną parę) ale cel ich jest odmienny. Mają one, uświadamiając błąd w ocenie, rozwijać właściwe intuicje stochastyczne. Służą temu pewne zabiegi dydaktyczne (np. rozdzielenie etapów doświadczenia losowego w czasie, zastosowanie innego przyrządu losującego jako rekwizytu, uproszczenie niektórych gier tak, że ich wyniki są łatwiejsze do wskazania i analizy, redukcje liczby parametrów itp.). Zabiegi te mają wskazać drogę do poprawnego rozwiązania i pomóc w doborze właściwej odpowiedzi oraz uświadomić na czym polega błąd popełniony w zadaniu dualnym I serii.

I seria

W każdym zadaniu zaznacz właściwą odpowiedź i krótko ją uzasadnij.

Zadanie I.1

Rzucono monetą 5 razy i uzyskano wynik *ooooo* (5 orłów). Jak sądzisz, co jest bardziej prawdopodobne ?
a) w następnym rzucie wypadnie orzeł,
b) w następnym rzucie wypadnie reszka,
c) orzeł i reszka mają jednakowe szanse.

Zadanie I.2

Masz do wyboru dwukrotny rzut monetą lub dwudziestokrotny rzut monetą. Zwyciężasz, jeśli liczba orłów będzie równa liczbie reszek. W której sytuacji Twoje szanse na zwycięstwo są większe ?
a) przy dwukrotnym rzucie,
b) przy dwudziestokrotnym rzucie,
c) w obu przypadkach szanse zwycięstwa są równe.

Zadanie I.3

W grze losuje się wielokrotnie ze zwracaniem kulę z urny o dwu kulach czarnych i jednej białej. Za każdą wylosowaną kulę czarną Ty zdobywasz punkt, — za każdą wylosowaną białą kulę punkt zdobywa Twój przeciwnik. Zwycięża ten, kto zdobędzie więcej punktów. Przy jakiej liczbie losowań masz większe szanse na zwycięstwo?
a) przy 5 losowaniach,
b) przy 9 losowaniach,
c) w obu przypadkach szanse zwycięstwa są równe.

Zadanie I.4

W totolotku losuje się 6 liczb spośród 49. Przed losowaniem gracz skreśla na kuponie sześć liczb. Jeżeli wszystkie skreślone przez gracza liczby zostaną wylosowane, gracz wygrywa sporą kwotę pieniędzy. Tomek skreślił liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, a Ewa 3, 8, 19, 27, 32, 41. Kto ma większe szanse na główną wygraną?

a) Tomek,
b) Ewa,
c) ich szanse są jednakowe.

Zadanie I.5

W innej wersji totolotka losuje się 43 liczby spośród 49. Gracz skreśla wtedy na kuponie 43 liczby spośród 49 a wygrywa sporą kwotę pieniędzy, gdy wszystkie przez niego skreślone liczby zostaną wylosowane. W którym przypadku szanse wygrania są większe?

a) przy skreślaniu 6 liczb z 49,
b) przy skreślaniu 43 liczb z 49,
c) w obu przypadkach szanse wygrania są równe.

Zadanie I.6

Średni poziom inteligencji dużej populacji ludzi określa się na 100. Wybrałeś przypadkowych 50 osób z tej populacji. Pierwsza testowana osoba ma poziom inteligencji równy 150. Jaki będzie według Ciebie przeciętny poziom inteligencji dla wszystkich 50 osób?

a) 100, b) 101, c) 125, d) 150.

Zadanie I.7

Losując wiele razy ze zwracaniem, kulę z urny, w której są dwie kule białe i jedna czarna, średnio na trzy losowania jeden raz zostaje wylosowana kula czarna. Losujesz 6 razy ze zwracaniem kulę z tej urny. W trzech pierwszych ciągnięciach ani razu nie wylosowano kuli czarnej. Co jest bardziej prawdopodobne?

a) w ostatnich trzech losowaniach nie zostanie wylosowana żadna kula czarna,
b) w ostatnich trzech losowaniach uzyskasz 1 kulę czarną,
c) w ostatnich trzech losowaniach uzyskasz 2 kule czarne,
d) w ostatnich trzech losowaniach uzyskasz 3 kule czarne.

Zadanie I.8

Można przyjąć, że chłopcy i dziewczynki przychodzą na świat równie często. Rozważmy populację rodzin, w których jest pięcioro dzieci. Jak sądzisz, która z kolejności urodzeń dzieci w tych rodzinach: *cddcd* czy *ccccc* występuje częściej? (c – chłopiec, d – dziewczynka),

a) *cddcd*,
b) *ccccc*,
c) obie kolejności są równie częste.

Zadanie I.9

Wylosowano 50 osób. Co jest bardziej prawdopodobne?
a) nie ma w tej grupie dwóch osób, które obchodzą urodziny w tym samym dniu,
b) przynajmniej dwie osoby obchodzą urodziny w tym samym dniu.

Zadanie I.10

Co jest bardziej prawdopodobne?
a) przypadkowo spotkana osoba obchodzi urodziny w tym samym dniu co Ty,
b) przypadkowo spotkane dwie osoby obchodzą urodziny w tym samym dniu roku,
c) obie sytuacje są tak samo prawdopodobne.

II seria

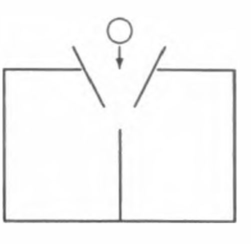
W każdym zadaniu zaznacz właściwą odpowiedź i krótko ją uzasadnij.

Zadanie II.1

Rzucono monetą i wypadł orzeł. Jak sądzisz, co jest bardziej prawdopodobne?
a) w następnym rzucie wypadnie orzeł,
b) w następnym rzucie wypadnie reszka,
c) orzeł i reszka mają jednakowe szanse.

Zadanie II.2

W pewnej grze rekwizytami są: pojemnik z lejkiem widocznym na rysunku oraz kule. Do pojemnika wrzucamy przez lejek kule. Kula trafiając na przegrodę wpada do jednej z dwu komór. Gracz zwycięża, gdy dokładnie połowa kul znajdzie się w lewej części pojemnika, a druga połowa w prawej. Kiedy są większe szanse zwycięstwa?



a) przy wrzucaniu 2 piłeczek,
b) przy wrzucaniu 100 piłeczek,
c) w obu przypadkach szanse zwycięstwa są równe.

Zadanie II.3

W grze losuje się wielokrotnie ze zwracaniem kulę z urny o dwu kulach czarnych i jednej białej. Za każdą wylosowaną kulę czarną Ty zdobywasz punkt, za każdą wylosowaną białą kulę punkt zdobywa Twój przeciwnik. Zwycięża ten, kto zdobędzie więcej punktów. Przy jakiej liczbie losowań masz większe szanse na zwycięstwo?

a) przy 1 losowaniu,

b) przy 3 losowaniach,

c) w obu przypadkach szanse zwycięstwa są równe.

Zadanie II.4

W grze losuje się 2 liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przed losowaniem gracz skreśla na kuponie dwie liczby z tego zbioru. Jeżeli skreślone przez gracza liczby zostaną wylosowane, gracz wygrywa sporą kwotę pieniędzy. Tomek skreślił liczby 1, 2 a Ewa 3, 5. Kto ma większe szanse na główną wygraną?

a) Tomek,

b) Ewa,

c) szanse obu są równe.

Zadanie II.5

W totolotku losuje się 6 liczb spośród 49. Przed losowaniem gracz skreśla na kuponie 6 liczb. Jeżeli wszystkie skreślone przez gracza liczby zostaną wylosowane, gracz wygrywa sporą kwotę pieniędzy. Przypuśćmy, że teraz aby wygrać tę kwotę, musisz skreślić te liczby, które nie będą wylosowane (jest ich 43). Która z możliwości daje Ci większe szanse wygrania?

a) skreślenie 6 liczb, które będą wylosowane,

b) skreślenie 43 liczby, które nie będą wylosowane,

c) w obu przypadkach szanse wygrania są równe.

Zadanie II.6

W pewnej grze losowej zdobywa się średnio 100 punktów. Zagrałeś dwa razy i w każdej z tych dwu gier uzyskałeś po 130 punktów. Chcesz zagrać trzeci raz. Jak sądzisz jaką najprawdopodobniej uzyskasz średnią liczbę punktów w tych trzech grach?

a) 100, b) 115, c) 120, d) 130.

Zadanie II.7

Losując wiele razy ze zwracaniem, kulę z urny, w której są dwie kule białe i jedna czarna, średnio na trzy losowania uzyskujemy jedną kulę czarną. Losujesz 3 razy ze zwracaniem kulę z tej urny i ani razu nie wyciągasz kuli czarnej. Po tygodniu znowu planujesz losować trzy razy ze zwracaniem kulę z tej urny. Jak myślisz, ile kul czarnych najprawdopodobniej wylosujesz?

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

Zadanie II.8

Można przyjąć, że chłopcy i dziewczynki przychodzą na świat równie często. Rozważmy populację rodzin z dwojgiem dzieci. Jak sądzisz, która z

kolejności urodzeń dzieci w tych rodzinach: *cd* czy *cc* występuje częściej? (c – chłopiec, d – dziewczynka),
a) *cd*,
b) *cc*,
c) obie kolejności są równie częste.

Zadanie II.9

Część pobocza dla pieszych zbudowana jest z małych kwadratowych płytek (365 płytek). Zaczyna padać. Jak sądzisz, co jest bardziej prawdopodobne po spadnięciu 50 kropli deszczu?
a) nie ma płytki, na którą spadły dwie krople deszczu,
b) jest przynajmniej jedna taka płytka.

Zadanie II.10

Co jest bardziej prawdopodobne?
a) w rzucie kostką do gry wypadnie 6 oczek,
b) w rzucie dwiema kostkami do gry na obu kostkach wypadnie tyle samo oczek,
c) obie sytuacje są tak samo prawdopodobne.

Prawidłowe odpowiedzi do powyższych zadań zestawione są w tabelach 1 i 2.

numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
poprawna odpowiedź	c	a	b	c	c	b	b	c	b	c

tabela 1. odpowiedzi do I serii zadań

numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
poprawna odpowiedź	c	a	b	c	c	c	b	c	b	c

tabela 2. odpowiedzi do II serii zadań

Zadania I i II serii posłużyły do badań przeprowadzonych w lipcu 1996 roku w grupie zaocznych studentów krakowskiej WSP. Zadania te zaproponowano 40 studentom II roku pedagogiki oraz 29 studentom III roku matematyki przed rozpoczęciem kursu rachunku prawdopodobieństwa. Każdy badany otrzymywał najpierw zestaw I serii zadań, a po jego rozwiązaniu (i zwrocie) zestaw II serii zadań,. Do każdego zadania badany wybierał jedną z kilku możliwych odpowiedzi, uzasadniając swój wybór.

Materiały uzyskane z badań analizowane były pod kątem liczby i rodzaju błędnych wnioskowań jakie pojawiły się w I serii zadań oraz w ilu przypadkach II seria zadań pozwoliła na usunięcie błędów ujawnionych w I serii.

Tabele 3 i 4 przedstawiają zestawienie odpowiedzi do zadań I serii odpowiednio studentów matematyki i studentów pedagogiki.

nr zadania	odpowiedź a	b	c	d	brak
1	—	1	28	×	—
2	4	1	23	×	1
3	11	8	10	×	—
4	3	2	24	×	—
5	—	14	14	×	1
6	22	6	1	—	—
7	4	14	6	1	4
8	7	—	21	×	1
9	18	11	×	×	—
10	2	5	22	×	—

tabela 3. zestawienie odpowiedzi do zadań I serii udzielonych przez studentów matematyki

nr zadania	odpowiedź a	b	c	d	brak
1	—	—	40	×	—
2	11	5	24	×	—
3	2	3	34	×	1
4	—	12	27	×	1
5	5	19	15	×	1
6	26	2	9	—	3
7	2	15	15	1	7
8	14	7	18	×	1
9	23	14	×	×	3
10	6	4	30	×	—

tabela 4. zestawienie odpowiedzi do zadań I serii udzielonych przez studentów pedagogiki

Stosunek liczby poprawnych odpowiedzi do liczby osób badanych w poszczególnych grupach, wskazuje, że w zadaniach I.9 i I.10 w obu grupach badanych mamy wyniki prawie identyczne. Porównując dalej powyższy stosunek zauważyć można, że w zadaniach I.1 i I.2 studenci pedagogiki uzyskali lepsze wyniki (podali stosunkowo więcej poprawnych odpowiedzi). W pozostałych zadaniach (I.2-I.8) stosunkowo więcej poprawnych odpowiedzi udzielili studenci matematyki. W związku z tym pojawia się problem, czy na podstawie tak małych różnic, można wnioskować, że studiowanie matematyki (przed rozpoczęciem kursu rachunku prawdopodobieństwa) ma pozytywny wpływ na kształtowanie intuicji stochastycznych.

W dalszej analizie, ujawnione różnice nie będą uwzględniane i wszystkie rezultaty badań będą rozpatrywane wspólnie.

Tabela 5 zawiera zbiorcze zestawienie (dla studentów matematyki i studentów pedagogiki) liczby poprawnych i liczby błędnych odpowiedzi do zadań I serii oraz liczby odpowiedzi do zadań II serii, w których ujawnione wcześniej błędne wyobrażenia zostały poprawione (usunięte).

	I seria			II seria
nr zad.	liczba dobrych odpowiedzi	liczba błędnych odpowiedzi	brak odpowiedzi	liczba poprawionych odpowiedzi
1	68	1	—	1
2	15	53	1	6
3	11	57	1	16
4	51	17	1	15
5	29	38	2	19
6	8	58	3	18
7	29	29	11	20
8	39	28	2	14
9	25	41	3	33
10	52	17	—	11

tabela 5.

3. Analiza wyników badań

Zadania I.1 i II.1

Ponieważ szanse wyrzucenia orła i reszki uznajemy za równe, więc intuicyjnie oczekujemy, że liczby orłów i reszek w wielokrotnym rzucaniu monetą powinny być zbliżone. Tymczasem wynik — same orły (odp. a) w zad. I.1) nie jest zgodny z naszymi oczekiwaniami; nie jest reprezentatywny dla tego doświadczenia losowego. Intuicja więc sugeruje uznanie pojawienia się kolejnego, szóstego, orła za mniej prawdopodobne co prowadzi do wybrania złej odpowiedzi b). Wnioskowanie takie jest charakterystyczne dla strategii (B).

Inne intuicyjne wnioskowanie, polegające na wykorzystaniu (nieistotnej) informacji, że w dotychczasowych rzutach pojawiły się same orły, to teraz powinna pojawić się reszka, również prowadzi do błędnej odpowiedzi b), ale jest typowe dla strategii (C). Opowiadając się za odpowiedzią b), przypisuje się monecie jakby „pamięć”.

Zadanie I.1, wbrew oczekiwaniom, nie ujawniło błędnych wyobrażeń, gdyż jak widać z tabeli 5 tylko 1 osoba podała błędną odpowiedź. Pozostali studenci podali odpowiedź poprawną.

Zabieg dydaktyczny w zad. II.1 polega na zredukowaniu liczby rzutów poprzedzających, co powinno wyeliminować wnioskowanie oparte na strategii (C), a także na strategii (B), gdyż teraz przestrzeń wyników jest łatwa do „ogarnięcia” (jest orzeł, to w następnym rzucie albo orzeł, albo reszka, innej możliwości nie ma i obie są jednakowo prawdopodobne). Wszyscy badani studenci podali prawidłową odpowiedź do zadania II.1.

Zadania I.2 i II.2

Charakterystyczne dla strategii heurystycznej (A) wnioskowanie, że przy większej liczbie rzutów mamy więcej możliwości sprzyjających wygranej co zwiększa szanse zwycięstwa, prowadzi do błędnej odpowiedzi b). Wnioskowanie, w którym wykorzystuje się informacje o równych szansach wypadnięcia orła i reszki, jest charakterystyczne dla strategii (C) i prowadzi do błędnej odpowiedzi c). Poprawna odpowiedź to a).

Badani najczęściej korzystali ze strategii (C) i wybierali odpowiedź c) (47 osób). Typowe uzasadnienia tego wyboru:

— ... *bo prawdopodobieństwo orła i reszki wynosi po* $\frac{1}{2}$;

— ... *niezależnie od liczby rzutów, prawdopodobieństwo orła i reszki jest takie samo;*

— ... *bo i w dwukrotnym rzucie i w dwudziestokrotnym może być równa liczba orłów i reszek.*

Do zadania II.2 wprowadzony został przyrząd losujący symulujący rzut monetą. Liczby kul rozmieszczonych w prawej i w lewej komorze pojemnika odpowiadają liczbom orłów i reszek w wielokrotnym rzucie monetą (zadanie I.2). Przyrząd losujący ukazuje jak dużo przypadków (gdy wrzucamy 100 kul) sprzyja temu by w komorach były różne liczby kul, a tylko w jednym przypadku jest po równo (tu i tu 50), ten ostatni przypadek musi być mniej prawdopodobny. Gdy wrzucamy 2 kule, mamy tylko 2 niesprzyjające wyniki (w przeciwieństwie do sytuacji, gdy mamy 100 kul) zatem ten przypadek winien być bardziej prawdopodobny. Zastosowany przyrząd pomógł poprawić błędne wyobrażenia u 6 badanych osób (na 53 błędne odpowiedzi do zadania I.2).

Zadania I.3 i II.3

Jest oczywiste, że skoro za każdym razem losujemy z tego samego zestawu kul (2 czarne i 1 biała), więc za każdym razem prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest równe $\frac{2}{3}$ i nie zmienia się. Wykorzystując tę informację (strategia heurystyczna (C)) wnioskujemy błędnie, że liczba losowań nie powinna mieć wpływu na szanse zwycięstwa. W rzeczywistości liczba losowań nie miałaby wpływu na szanse zwycięstwa, gdyby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej wynosiło $\frac{1}{2}$, jednak w naszym wypadku szanse na zwycięstwo rosną wraz z liczbą powtórzeń. Swój wybór odpowiedzi c) badani (aż 44 osoby) uzasadniali:

— ... *zawsze mam jednakowe szanse, ponieważ w urnie za każdym razem jest więcej kul czarnych niż białych;*

— *Bez względu na liczbę losowań, zawsze większe szanse ma osoba losująca kule czarne;*
— *Zawsze mam większe szanse, równe $\frac{2}{3}$, a przeciwnik $\frac{1}{3}$;*
— *... bo kula zawsze wraca do urny i jest tych kul ciągle tyle samo.*

Jednak pomimo wielu błędnych odpowiedzi, w grupie 69 badanych osób, 11 podało prawidłową odpowiedź uzasadniając ją następująco:

— *Im więcej będzie losowań, tym większe są szanse wygrania, ponieważ więcej będzie kul czarnych.*

W zadaniu II.3 zabieg dydaktyczny ułatwiający podjęcie właściwej decyzji polega na zmniejszeniu liczby losowań co pozwala szybciej policzyć wyniki sprzyjające wygraniu. Ponadto każdy wynik sprzyjający wygraniu jest bardziej prawdopodobny niż dowolny wynik niesprzyjający wygraniu, więc szanse zwycięstwa rosną ze wzrostem liczby powtórzeń. Zabieg ten pozwolił na poprawę błędnych odpowiedzi u 16 badanych osób (na 53 błędne odpowiedzi do zadnnia I.3).

Zadania I.4 i II.4

Stosując heurystyki Kahnemana i Tversky'ego badani, opierając się na strategii (B), winni wybrać odpowiedź b), jako bardziej reprezentatywną, bardziej odpowiadającą losowości, zgodną z tym jak intuicyjnie pojmujemy przypadek. Tymczasem tak postąpiło zaledwie 14 osób. Zdecydowana większość (51 osób) wybrała prawidłową odpowiedź c), a tylko 3 osoby (ciekawe że cała trójka to studenci matematyki) uważały, że Tomek pomimo skreślenia sześciu kolejnych liczb ma większe szanse wygrania.

Poprawne odpowiedzi uzasadniano następująco:

— *Liczby są losowo wybierane i nie ma znaczenia czy ktoś skreślił liczby kolejne czy nie.*

Typowe uzasadnienia błędnej odpowiedzi b) są następujące:

— *... gdyż nie wierzę, że liczby będą losowane w kolejności;*
— *... odpowiedź a jest mało prawdopodobna;*
— *... rzadziej wylosowane są liczby Tomka, wiem to z obserwacji.*

W zadaniu II.4 ułatwieniem jest zmniejszenie zarówno liczby numerów na kuponie, jak i liczby skreśleń (teraz skreślamy 2 z 5 zamiast 6 z 49). W tej sytuacji widać że każde dwie skreślone liczby są „jednakowo dobre" (mają takie same szanse na ich wylosowanie). Ten zabieg dydaktyczny pozwolił na poprawienie odpowiedzi u 15 osób badanych, które w I serii źle wnioskowały, na 17 błędnych odpowiedzi do zadania I.4.

Zadania I.5 i II.5

Można było oczekiwać, że w zadaniu I.5 badani, posługując się strategią (A), uznają skreślenie 43 liczb spośród 49 za korzystniejsze niż skreślenie 6 liczb spośród 49. Ponieważ łatwiej sobie wyobrazić szóstki liczb, więcej dostrzegamy takich sześcioelementowych podzbiorów, a bezpośrednio widać tylko jeden 43 elementowy podzbiór, zatem wydaje się, że w przypadku skreślania 43 liczb jest mniej możliwości. Intuicyjnie wydaje się łatwiejsze trafienie tam, gdzie tych wyników jest mniej.

Oto inny sposób rozumowania prowadzący do takiej samej odpowiedzi: jeżeli skreślam 43 z 49, to skreślam prawie wszystkie liczby (skreślam dużo) a łatwiej trafić w „dużo" — przez analogię strzelania do tarczy (im większa tarcza, tym łatwiej w nią trafić).

Rezultaty badań potwierdzają powyższe przypuszczenia, gdyż na 38 błędnych odpowiedzi, 33 to odpowiedzi b). Badani następująco uzasadniali swoje wybory:

— *... skreślamy więcej liczb z takiej samej ilości;*
— *... im więcej liczb skreślamy, tym bardziej prawdopodobne jest wygranie;*
— *... jeśli gracz skreśla 43 z 49, to jest większa szansa na to że skreślił dobrze;*
— *... ponieważ skreślamy większą ilość liczb;*
— *... bo zostaje mniej liczb, które nie zostaną wylosowane;*
— *... bo większa możliwość wyboru liczb;*
— *... bo* $P(a) = \frac{6}{49}, P(b) = \frac{43}{49}$.

Zabieg dydaktyczny w zadaniu II.5, mający usunąć błędne wyobrażenia, polega na zwróceniu uwagi na symetrię: 6 liczb wytypowanych spośród 49 jednoznacznie określa 43 liczby niewytypowane. Obojętne więc jak postępuję (czy skreślając te które mają być wylosowane, czy skreślając te, które nie mają być wylosowane) szanse wygrania są równe. Zabieg ten pozwolił na poprawę odpowiedzi u 19 osób badanych spośród 38 osób błędnie odpowadających w zadaniu I.5.

Zadania I.6 i II.6

Można było oczekiwać, że w zależności od przyjętej strategii heurystycznej studenci wybiorą niepoprawną odpowiedź a) albo c).

Intuicyjnie czujemy, że próbka winna być podobna do populacji, a zatem, zgodnie z wnioskowaniem charakterystycznym dla strategii (B), badani wybierali błędną odpowiedź a). Tak postąpiło 48 osób uzasadniając swoją odpowiedź:

— *Taki jest średni poziom;*
— *Jeżeli średni poziom populacji wynosi 100, więc w grupie 50 osób ten poziom*

będzie wynosić również 100;
— W tej grupie mogą być tacy, którzy mają poniżej 100 i tacy, którzy mają powyżej, ale w rezultacie średnio będzie 100;
— Jeden będzie miał mniej, drugi więcej, ale w sumie się to wyrówna i będzie ta przeciętna wartość inteligencji.

Ponieważ, łatwa do policzenia, średnia arytmetyczna dwóch liczb: 100 i 150 wynosi 125, więc (w sposób charakterystyczny dla strategii (A)) badani wybierali błędną odpowiedź c). Tak postąpiło 10 osób uzasadniając swój wybór:

— ... wzięłam średnią między 100 a 150;
— ... jest 125, bo aby uzyskać niższą średnią w populacji 50 osób, co najmniej kilkanaście musiałoby mieć iloraz poniżej 100.

Zabieg dydaktyczny w zadaniu II.6 polega na zmniejszeniu próbki z 50 (osób) do 3 (gier). Przy trzech danych liczbowych policzenie średniej arytmetycznej powinno być bardzo łatwe. Zabieg ten pozwolił na poprawę błędnych odpowiedzi u 18 badanych osób (na 58 błędnych odpowiedzi w I serii).

Zadania I.7 i II.7

Powodów błędnych odpowiedzi do zadania I.7 należy dopatrywać się w przyjmowaniu strategii zakotwiczenia (C). Badani studenci wiązali (nieistotną) informację, że w trzech pierwszych ciągnięciach, spośród planowanych sześciu, nie było kuli czarnej z informacją, że średnio na trzy losowania uzyskujemy jedną taką kulę, wnioskowali więc, że w trzech następnych muszą być dwie kule czarne. Swoje odpowiedzi badani uzasadniali następująco:

— ... bo na 3 losowania wypada 1 czarna;
— ... średnio na 3 losowania wypada 1 czarna, to na 6 losowań, 2 czarne.

Pojawiły się także odpowiedzi a) (6 osób) z uzasadnieniem:

— ... ponieważ w 3 pierwszych ciągnięciach ani razu nie pojawiła się kula czarna, to wcale nie mamy pewności, że pojawi się ona w 3 ostatnich losowaniach;
— ... ponieważ białych jest więcej;
— ... ponieważ prawdopodobienstwo wylosowania kuli czarnej jest mniejsze.

W zadaniu II.7 zostało zastosowane rozdzielenie czasowe kolejnych ciągów trzech losowań (teraz 3 i po tygodniu 3). Rozdzielenie czasowe sprawia, że wynik poprzednich losowań nie jest już brany pod uwagę przy przewidywaniu wyniku następnych losowań. Zabieg ten poprawił odpowiedzi u 20 osób (na 29 błędnych odpowiedzi do zadania I.6).

Zadania I.8 i II.8

W zadaniu I.8 powodów błędnych odpowiedzi należy dopatrywać się w przyjmowaniu strategii (B) o czym świadczy wybór odpowiedzi a) jako bardziej reprezentatywnej. Na 29 błędnych odpowiedzi, 21 to właśnie odpowiedź a), którą uzasadniano:

— ... *bo ja jeszcze nie spotkałam rodziny, gdzie byłoby pięciu chłopców pod rząd;*
— ... *ilość chłopców powinna w pewnym stopniu równać się ilości dziewcząt;*
— ... *z obserwacji, z życia;*
— ... *bo tak mi się wydaje z analizy rodzin w moim środowisku.*

Prawidłową odpowiedź c) wybrało 39 osób z uzasadnieniem:

— ... *to jest tak jak z rzucaniem monetą;*
— ... *o kolejności decyduje przypadek,*
— ... *ponieważ nie wiemy czy dziecko, które się urodzi będzie dziewczynką czy chłopcem,*
— *Każde dziecko ma 50% szans na to, że będzie dziewczynką (chłopcem) i nie bierze się pod uwagę, że wcześniej było np. 4 chłopców.*

W zadaniu II.8 zmniejszono liczbę dzieci w populacji: z rodzin z pięciorgiem dzieci do rodzin z dwojgiem dzieci. Zabieg ten pozwolił na poprawę odpowiedzi u 14 osób badanych (na 28 błędnych odpowiedzi do zadania I.8).

Zadanie I.9 i II.9

Zadanie I.9 znane jest w literaturze pod nazwą *problemu wspólnych urodzin*. Zdarzenie, że w grupie 50 osób są przynajmniej dwie osoby obchodzące urodziny w tym samym dniu, powszechnie uznawane jest za bardzo mało prawdopodobne. Tymczasem jest to zdarzenie praktycznie pewne (jego prawdopodobieństwo wynosi $0,994$). Badani najczęściej mocno zaniżają prawdopodobieństwo tego zdarzenia wybierając odpowiedź a) i uzasadniając swój wybór:

— ... *większa jest liczba dni w roku niż osób w grupie;*
— ... *ponieważ rok ma 365 dni, to wśród 50 osób są nikłe szanse, że urodziły się w tym samym dniu;*
— ... *w roku jest 365 dni, więc trudno by było znaleźć wspólne urodziny wśród 50 osób;*
— ... *możliwych dat urodzenia jest bardzo wiele, a więc prawdopodobieństwo jest bardzo małe.*

W zadaniu II.9 zmieniono rekwizyty: zamiast osób — krople deszczu, zamiast dat (dni roku) — płytki chodnikowe. Nie rozważamy już problemu wspólnych urodzin, lecz problem, czy jest choć jedna płytka, na którą spadną 2 krople deszczu. W problemie tym nie budzi sprzeciwu fakt, że kropli jest tylko 50 a płytek aż 365 (jak to było przy wspólnych urodzinach). Tu odwołujemy się do doświadczenia. Deszcz pada nierównomiernie, nieregularnie, losowo, zatem dziwne by było gdyby każda kropla upadła na inną płytkę. Musi być choć jedna taka, na którą upadną dwie krople deszczu. Zabieg ten spowodował poprawę odpowiedzi aż w 33 przypadkach (na 41 błędnych odpowiedzi do zadania I.9).

Zadanie I.10 i II.10

Obydwa zdarzenia opisane w tym zadaniu są jednakowo prawdopodobne. Mimo to pojawiły się odpowiedzi, w których badani stawiali na jedno z nich (8 osób wybrało odp. a), 9 osób odp. b), 52 osoby odpowiedziały prawidłowo). Wybór odpowiedzi c) badani uzasadniali następująco:

— ... *to są identyczne zdarzenia;*

— ... *w każdej sytuacji spotykają się 2 osoby;*

— ... *oba problemy sprowadzają się do wybrania 2 osób z zadanej populacji.*

W zadaniu II.10 zmieniono rekwizyty. Zamiast ludzi użyto kostek do gry a zamiast dat — wyniki rzutu kostką. W takim ujęciu poprawa odpowiedzi miała miejsce u 11 osób (na 17 błędnych odpowiedzi w zadaniu I.10).

4. Wnioski końcowe

Celem pracy było ujawnienie stosowania strategii heurystycznych Kahnemana i Tversky'ego we wnioskowaniach stochastycznych. Cel ten realizowany był poprzez specjalnie dobrane zadania I serii, w rozwiązywaniu których badani studenci rzeczywiście opierali się na wspomnianych strategiach. Zadania: I.4 i I.10 nie ujawniły zbyt wiele błędnych rozumowań a zadanie I.1 wcale nie spełniło swojej roli (zaledwie 1 osoba odpowiedziała niepoprawnie). Pozostałe zadania, tak jak tego oczekiwano, ujawniły w sposób wyraźny, że badani korzystają z niematematycznych sposobów rozwiązywania problemów probabilistycznych. Czynią to zarówno studenci pedagogiki, jak też studenci matematyki.

W badaniach nie poprzestano jedynie na diagnozie: człowiek korzysta ze strategii heurystycznych Kahnemana i Tversky'ego, ale próbowano poprzez dobór innych zadań (zadań II serii — dualnych odpowiedników zadań I serii) wyeliminować błędne wnioskowania i rozwijać poprawne intuicje stochastyczne. Udało się to w wielu przypadkach, lecz nie wszystkie zadania II serii w pełni odegrały swoją rolę.

Ciągle więc zostaje otwarte pytanie: Jak usuwać błędne wyobrażenia? Z całą pewnością wymaga to wielu zabiegów dydaktycznych rozciągniętych w czasie i wiążących się ze zmianą konwencjonalnych sposobów uczenia stochastyki w szkole.

Literatura

[1] G. R. Fast, *Generating anchoring situations for bridging the probability misconceptions gap*, w druku.

[2] H. Freudenthal, *The crux of course design probability*, Educational Studies in Mathematics **5** (1974), 261-277.

[3] H. Hartwig, *Drzwi do wygranej. Jak postąpić, by wygrać samochód, a nie kozę?*, Spotkania **39** (9.10.1991), 32.

[4] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, t. I, WSiP, Warszawa, 1979.

[5] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, PWN, Warszawa, 1992.

[6] J. Shaughnessy, *Misconception of probability*, Educational Studies in Mathematics **8** (1977), 295-316.

[7] A. Tversky, D. Kahneman, *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Science **185** (1974), 1124-1131.

[8] H. Walter, *Heurystische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen*, Der Mathematikunterricht **1** (1983), 11-23.

Katedra Pedagogiki
Przedszkolnej i Wczesnoszkolnej
WSP
ul Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
Poland