ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE

Zeszyt 191 Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki II 1998

Barbara Nawolska

Paradoksy związane z nadzieją matematyczną a proces kształtowania tego pojęcia

Résumé. L'article est une proposition didactique d'emploi des paradoxes dans le processus de la découverte et de la formation de la notion d'espérance mathématique. Dans l'article le processus de la formation de la notion d'espérance mathématique contient de defférents aspects de cette notion, ses interprétations, ses applications et les erreurs.

1. Uwagi wstępne

Osobliwością rachunku prawdopodobieństwa jest bogactwo paradoksów i sofizmatów. Paradoksy towarzyszyły powstawaniu i rozwojowi tej dziedziny matematyki, kreowały spory i dyskusje nad ich źródłami, inspirowały i inspirują nadal problematykę pewnych zadań. Paradoksy stanowią nie tylko wkład do historii matematyki, aktualnie można je wykorzystać w nauczaniu (również w kształceniu stochastycznym) jako źródło problematyki zajęć (zadań i przykładów) oraz jako środek matematycznej aktywizacji. Wartość dydaktyczna stochastycznych paradoksów polega na tym, że włączone do zajęć skutecznie prowokują uczniów i studentów do samodzielnego myślenia, do wykrywania luk oraz błędów w gotowych rozumowaniach, do poszukiwania środków argumentacji „za i przeciw", do odwoływania się do danych statystycznych (konfrontacja intuicyjnych wniosków z danymi empirycznymi). Paradoksy stanowią więc środek matematycznej aktywizacji i ważny element procesu odkrywania i kształtowania pojęć oraz rozwoju intuicji stochastycznych.

Niniejsza praca stanowi propozycję dydaktyczną wykorzystania paradoksów do wspierania procesu odkrywania i kształtowania pojęcia nadziei matematycznej. Kształtowanie pojęcia rozumiemy tu jako długotrwały proces (nie zredukowany do formalnej definicji), w trakcie którego ukazuje się różne aspekty pojęcia i różne jego własności oraz w trakcie którego uczeń sam odkrywa definicję (najczęściej jako narzędzie rozwiązywania problemu powstałego na tle interesującej sytuacji pozamatematycznej). Ważne jest w tym procesie by formalna definicja była jego finałem, a nie początkiem.

Pojęcie nadziei matematycznej jest jednym z trudniejszych pojęć i wiążą się z nim szczególne intuicje. Dostępne obecnie podręczniki (np. [1], [4]), ograniczają się jedynie do podania definicji wartości oczekiwanej oraz kilku prostych zadań na obliczanie średnich wartości zmiennych losowych o prostych rozkładach. Rozwiązania tych zadań wymagają wyłącznie rachunków, nie obejmują fazy matematyzacji ani fazy interpretacji, które są ważnymi elementami procesu kształtowania pojęcia i jego stosowania. Można znać definicję a nie rozumieć pojęcia i odwrotnie: nie znając definicji można, w procesie matematyzacji przy rozwiązywaniu pewnych problemów pozamatematycznych (np. związanych z oceną oczekiwanych korzyści), dochodzić do pojęcia wartości oczekiwanej.

W pracy odwołujemy się do różnego typu gier losowych. Przez *wygraną* w grze rozumiemy dalej kwotę uzyskaną za wynik doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze. Różnicę między tą kwotą a kwotą wpłaconą za udział w grze nazywamy *zyskiem*. Organizatora gry nazywamy dalej *bankierem*.

Można mówić o trzech podejściach do procesu kształtowania pojęcia nadziei matematycznej. W każdym z nich chodzi o grę, w której wygrana gracza jest zmienną losową, jej wartościami są pewne kwoty pieniędzy a za udział w której trzeba opłacić wstęp.

Pierwsze podejście oparte jest na odkrywaniu tego pojęcia w procesie estymacji wartości oczekiwanej za pomocą statystyki średnia z próbki. Przedstawiono je szczegółowo w [14]. Podejście to opiera się na przejściu od średniej arytmetycznej wartości zmiennej losowej dla wyników uzyskanych w bardzo wielu powtórzeniach doświadczenia, do odpowiadającej jej wartości teoretycznej (poprzez przejście od częstości do prawdopodobieństwa, jako jej teoretycznego odpowiednika). Proces matematyzacji oparty jest na prawie wielkich liczb Chinczyna (statystyka średnia z próbki jako estymator zgodny wartości oczekiwanej cechy w populacji). Pojęcie wartości oczekiwanej jest odkrywane jako narzędzie rozstrzygania problemu opłaty za wejście do gry sprawiedliwej. Poszukiwanie kryterium takiej sprawiedliwości prowadzi do odkrycia definicji wartości oczekiwanej.

W drugim podejściu podstawą do odkrywania pojęcia wartości oczekiwanej jest ustalanie wysokości wstępu do gry, aby gra przynosiła bankierowi zyski. Oznacza się przez x opłatę za wejście do gry i rozwiązuje problem: przy jakim x gra będzie przynosić bankierowi zyski jeśli weźmie w niej udział duża liczba graczy. Dokonuje się pewnych obliczeń opartych na założeniu, że gracz bierze udział w n powtórzeniach gry, płacąc za każdym razem x. Wówczas nx — to kwota, która wpływa do kasy bankiera. Jeżeli przez m oznaczymy sumę wypłat oczekiwanych wygranych gracza i $nx > m$ — to gra przynosi zyski bankierowi, jeśli $nx < m$ — to przynosi straty. Sytuacja kreuje pytanie: a co z zyskami i stratami bankiera gdy $nx = m$. Dochodzi się tu do pojęcia sprawiedliwości gry i wartości oczekiwanej wygranej gracza. W tym ujęciu, gra jest sprawiedliwa, jeśli opłata za wejście do gry jest równa wartości oczekiwanej wygranej.

Przedmiotem niniejszej pracy jest inna, trzecia, propozycja odkrywania pojęcia nadziei matematycznej. Inspiracją tego matematycznego odkrycia są pewne paradoksy. Heureza kreująca to odkrycie dotyczy oceny oczekiwanych zysków i strat w nieco innym procesie matematyzacji.

Praca jest opisem doświadczeń wyniesionych z pracy ze studentami III i IV roku matematyki krakowskiej WSP w ramach ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa prowadzonych w latach 1995/96 oraz 1996/97. Ćwiczenia prowadzone są zgodnie z pewną „filozofią" stochastycznego kształcenia, według której

> Zasadniczą rolę w kształceniu stochastycznym nauczyciela pełni etap propedeutyczny, obejmujący podstawy teorii, prezentujący stochastykę jako matematykę odkrywaną w procesie rozwiązywania problemów, a jej pojęcia i metody jako szczególne matematyczne narzędzia rozwiązywania konkretnych problemów ([17], str. 143).

2. Pewne paradoksy związane z pojęciem wartości oczekiwanej kreujące i motywujące proces kształtowania tego pojęcia

2.1. Karnawałowa gra w kości

W znanej w USA grze *chuck-a-luck* (zob. [9], str. 133, [16], str. 359) rzuca się trzema kostkami. Przed rzutem gracz stawia kwotę s na jedną z liczb od 1 do 6. Jeżeli obstawiona przez gracza liczba wypadnie na k kostkach, to wygrywa on kwotę $k \cdot s$, $(k = 1, 2, 3)$, ponadto otrzymuje z powrotem stawkę zakładu. Jeżeli obstawiana liczba oczek nie wypadnie na żadnej z kostek, stawkę zabiera bankier. W [9] wspomina się o reklamie gry przez bankiera (*Za każdym razem trzy wygrane i trzy przegrane!*), która ma sugerować graczowi, że gra jest sprawiedliwa. Przytacza się tam również rozumowanie gracza uzasadniające, że gra jest dla niego korzystna:

> Gdyby była tylko jedna kostka, to wybrana przeze mnie liczba wypadałaby tylko 1 raz na sześć. Gdyby były dwie kostki, to wybrana liczba wypadałaby w dwóch przypadkach na sześć. A ponieważ są trzy kostki, to wybrana liczba powinna wypadać w trzech przypadkach na sześć. Zatem szanse na wygranie i przegranie są równe. Ponadto, jeśli postawię dolara na przykład na „piątkę" i „piątka" wypadnie na dwóch kostkach to zyskam 2 dolary. A jeśli „piątka" wypadnie na trzech kostkach to zyskam 3 dolary. Gra jest więc dla mnie korzystna.

Fakt, że bankier oferuje taką grę oznacza, że nie może być ona, ani sprawiedliwa, ani korzystna dla gracza, wszak bankier musi zarabiać. Są więc podstawy do kwestionowania poprawności tych argumentacji. Nasuwają się pytania, jak na gruncie rachunku prawdopodobieństwa:

a) uzasadnić niepoprawność wnioskowania sformułowanego w owej reklamie gry,

b) wyjaśnić prosperowanie hazardu, a więc faktu, że namawia do niego bankier,

c) wykazać błąd w ocenie swojej sytuacji przez gracza.

Ocenę oczekiwanej wygranej gracza rozpocznijmy od konstrukcji przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jako modelu probabilistycznego rzutu trzema kostkami. Załóżmy, że kostki są rozróżnialne. Wynik rzutu traktujmy jako trzywyrazową wariację zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Wówczas $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$ i $p(\omega) = \frac{1}{6^3}$ dla każdego $\omega \in \Omega$ (przestrzeń probabilistyczna jest więc klasyczna). Mamy zatem 216 możliwych i jednakowo prawdopodobnych wyników rzutu trzema kostkami.

Na początku gracz podejmuje decyzję co do obstawianej liczby oczek. Przypuśćmy, że gracz postawił stawkę s na liczbę j. Jeżeli W_j będzie wygraną gracza, $(j = 1,2,3,4,5,6)$, to wygrana ta jest dodatnia, gdy j oczek wypadnie na co najmniej jednej kostce. Gracz przegra stawkę (jego wygrana będzie równa 0), gdy na żadnej kości nie wypadnie liczba j oczek.

Spośród 216 wyników jest 125 takich, w których ani razu nie występuje liczba j. Wygrana gracza w tych przypadkach wynosi $0s$, a więc $P(W_j{=}0s) = \frac{125}{216}$. Pozostałe wyniki (jest ich 91), sprzyjają dodatniej wygranej gracza, w tym

— w jednym przypadku (na każdej z trzech kostek wypadnie j oczek) gracz wygrywa $4s$ (bankier wypłaca graczowi $3s$ oraz kwota zakładu s staje się ponownie własnością gracza), a więc $P(W_j{=}4s) = \frac{1}{216}$;

— w 15 przypadkach (dokładnie na dwu kostkach wypadnie j oczek) gracz wygrywa $3s$, a więc $P(W_j{=}3s) = \frac{15}{216}$;

— w 75 przypadkach (tylko na jednej kostce wypadnie j oczek) gracz wygrywa $2s$, a więc $P(W_j{=}2s) = \frac{75}{216}$.

Rozkład zmiennej losowej W_j jest więc funkcją postaci:

w_j	$0s$	$2s$	$3s$	$4s$
$P(W_j = w_j)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Załóżmy, że gracz zamierza zagrać 216 razy, za każdym razem stawiając dolara na j oczek.

Dla ustalonego k zajście zdarzenia $\{W_j{=}k\}$ potraktujmy jako sukces. Rzut trzema kostkami staje się wtedy próbą Bernoullego o prawdopodobieństwie sukcesu równym u_k, gdzie $u_k = P(W_j{=}k)$ dla $k = 0, 2, 3, 4$. Przy ustalonym k powtarzanie gry 216 razy staje się schematem Bernoullego o 216 próbach i prawdopodobieństwie sukcesu równym u_k. Średnia liczba sukcesów jest równa $216 \cdot u_k$ [1]. Możemy zatem oczekiwać:

— jednej gry z wygraną 4 dolary ($u_4 = \frac{1}{216}$),

— 15 gier z wygraną 3 dolary ($u_3 = \frac{15}{216}$),

— 75 gier, w których wygrana wyniesie 2 dolary ($u_2 = \frac{75}{216}$),

— 125 gier, w których wygrana wyniesie 0 ($u_0 = \frac{125}{216}$).

Wygrana jakiej gracz może oczekiwać w 216 grach jest sumą:

$$1 \cdot 4\$ + 15 \cdot 3\$ + 75 \cdot 2\$ + 125 \cdot 0\$,$$

czyli wynosi 199 dolarów. W tej (teoretycznej) sytuacji średnio na jedną grę przypada zatem wygrana $\frac{199}{216}$ dolara. Jest to średnia wygrana gracza w jednej grze. Jest to wygrana, jakiej gracz może oczekiwać w jednej grze, a więc jest to jakby **oczekiwana wygrana**.

Zauważmy, że ta średnia wygrana przypadająca na jedną grę jest sumą

$$4 \cdot \frac{1}{216} + 3 \cdot \frac{15}{216} + 2 \cdot \frac{75}{216} + 0 \cdot \frac{125}{216}. \tag{1}$$

Poddajmy analizie wyrażenie (1). Każdy jej składnik jest iloczynem wartości zmiennej losowej W_j przez prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa W_j może tę wartość przyjąć, a sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości tej zmiennej losowej. Jest to zatem suma postaci

$$\sum_{w_j \in \Omega_{W_j}} w_j \cdot P(W_j{=}w_j), \qquad \text{gdzie } \Omega_{W_j} = \{0, 2, 3, 4\}.$$

Ostatnia suma jest pewną charakterystyką liczbową rozkładu zmiennej losowej W_j. Rodowód tej sumy sugeruje by nazwać ją *wartością średnią*, albo *wartością oczekiwaną wygranej gracza.* Jej empiryczny sens jest łatwy do uchwycenia. Jeśli udział w opisanym hazardzie gracz powtórzy bardzo wiele razy, stawiając za każdym razem dolara, to średnio w jednej grze może oczekiwać wygranej około $\frac{199}{216}$ dolara. Pozostała część postawionej stawki trafi do

[1] Wartość oczekiwana liczby sukcesów w schemacie m prób Bernoullego jest równa mu, gdzie u jest prawdopodobieństwem sukcesu.

kasy bankiera. Odkryta wartość średnia pozwala więc na gruncie matematyki oceniać sytuację gracza. Gra jest dla gracza niekorzystna. Otrzymana wielkość umożliwia zarazem ocenę zysków bankiera. Jeśli w grze weźmie udział stosunkowo wielu graczy i każdy postawi dolara, to (z prawdopodobieństwem bliskim jedności) można oczekiwać, że średnio $\frac{17}{216}$ z każdego postawionego dolara zostanie w kasie bankiera.

Te ostatnie wnioski stanowią tzw. *fazę interpretacji* i ukazują, ważny w procesie kształtowania pojęć i intuicji stochastycznych, statystyczny aspekt pojęcia nadziei matematycznej, pozwalający formułować wiarygodne wnioski na temat wygranych na podstawie znajomości wartości liczbowej nadziei matematycznej.

Przedstawione wyżej oceny oczekiwanych zysków i wygranych są pewną propozycją odkrywania definicji nadziei matematycznej w procesie matematyzacji [2]. Rozważania pozwoliły dostrzec ideę ogólnej definicji wartości oczekiwanej. W opisanej sytuacji to nowe pojęcie stochastyczne stało się narzędziem rozwiązywania pewnego pozamatematycznego problemu.

Istotą paradoksu, o jakim mowa na początku, jest rozbieżność pomiędzy argumentacjami bankiera i gracza a ocenami oczekiwanych wygranych, uzyskanymi na gruncie matematyki.

Paradoksalna sytuacja wyjściowa stała się inspiracją do sformułowania i rozwiązania zadania probabilistycznego. Pojęcie wartości oczekiwanej stało się w opisanej sytuacji nowym, dopiero odkrywanym narzędziem uzasadnienia prosperowania hazardu a zarazem rozstrzygania sprawiedliwości gry.

2.2. Paradoks związany z klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze liczb naturalnych

W [18] opisano następującą grę: Na czołach dwóch graczy G_A i G_B wypisano po jednej z dwóch kolejnych liczb naturalnych. Gracz nie widzi liczby wypisanej na własnym czole, widzi natomiast liczbę na czole przeciwnika. Gracz z mniejszą liczbą wypłaca przeciwnikowi kwotę równą liczbie wypisanej na jego własnym czole. Gracz ma prawo wycofać się z gry. Z poniższego rozumowania wynika, że z takiego prawa nie należałoby korzystać, gdyż gra wydaje się być korzystna dla każdego z graczy.

> — Na czole przeciwnika widzę liczbę k, zatem na moim jest albo liczba $k-1$ albo $k+1$, każda z takim samym prawdopodobieństwem. Gdy jest to liczba $k-1$, stracę $k-1$ złotych, gdy $k+1$ — wygram k złotych. Moja średnia wygrana wynosi zatem: $-(k-1)\cdot\frac{1}{2}+k\cdot\frac{1}{2}$, czyli $\frac{1}{2}$, więc gra jest dla mnie korzystna.

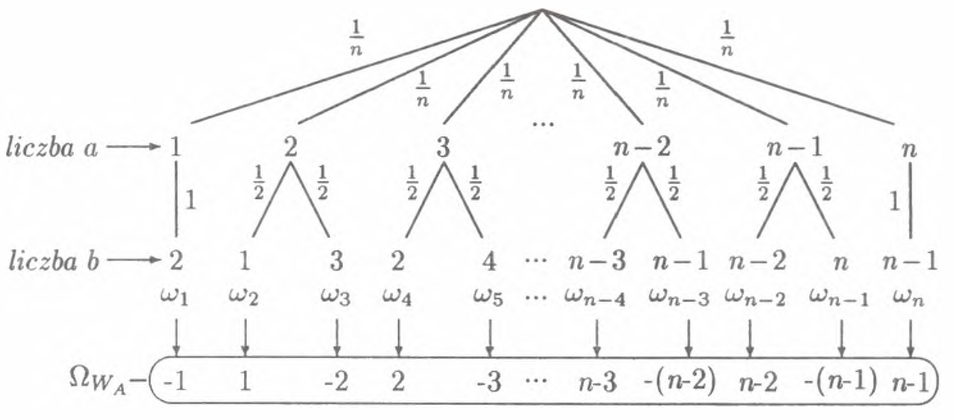
[2]opisana symulacja jest formą matematyzacji rozumianej w sensie o jakim mowa w [8]

Analogicznie może rozumować jego przeciwnik. Stajemy więc przed parakosalną sytuacją; gra nie może być bowiem korzystna dla obu graczy. Pojawia się pytanie, jak wyjaśnić ten paradoks. Pytanie to jest treścią zadania stochastycznego stawianego naszym studentom matematyki na ćwiczeniach z rachunku prawdopodobieństwa.

Rozumowanie gracza opiera się m.in. na błędnym postulacie, że każda z liczb naturalnych może być wybrana z jednakowym prawdopodobieństwem, a więc że na zbiorze liczb naturalnych można określić klasyczny rozkład prawdopodobieństwa[3].

Przy założeniu, że liczby wypisywane na czołach graczy nie są większe od ustalonej liczby naturalnej n, można określić klasyczny rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze liczb naturalnych nie większych od n.

Niech $\{1, 2, \ldots, n\}$ będzie zbiorem, z którego wybierane są liczby w opisanej grze. Oznaczmy przez a liczbę wypisaną na czole gracza G_A, przez b — liczbę wypisaną na czole G_B. Jeżeli graczowi G_A jako pierwszemu wpisujemy liczbę, to drzewo z rys. 1 prezentuje przestrzeń probabilistyczną będącą modelem probabilistycznym doświadczenia losowego, o jakim wyżej mowa.



rys. 1.

Model ten nie jest klasyczny. Wyniki ω_1 i ω_n przyjmowane są z prawdopodobieństwem $\frac{1}{n}$, pozostałe wyniki — z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2n}$. Niech W_A będzie wygraną gracza G_A (zbiór wartości i rozkład prawdopodobienstwa zmiennej losowej W_A prezentuje rys. 1). Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej wynosi:

[3] Jeżeli przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest klasyczna, to p nazywa się klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa.

$$E(W_A) = (-1)\cdot\frac{1}{n} + 1\cdot\frac{1}{2n} + (-2)\cdot\frac{1}{2n} + 2\cdot\frac{1}{2n} + \ldots + (-1)(n-2)\cdot\frac{1}{2n}$$
$$+(n-2)\cdot\frac{1}{2n} + (-1)(n-1)\cdot\frac{1}{2n} + (n-1)\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \frac{n-2}{2n}.$$

Niech W_B oznacza wygraną gracza G_B. Można wykazać, że wartość oczekiwana tej zmiennej losowej wynosi:

$$E(W_B) = -\frac{n-2}{2n}.$$

Dla $n > 2$ gra jest korzystna dla gracza, któremu jako pierwszemu wypisywana jest liczba na czole. W tej sytuacji gra nie jest sprawiedliwa. Tym samym wyjaśniono, że gra nie jest korzystna dla obu graczy, nie ma tu więc paradoksu.

Poprzedźmy grę rundą wstępną, w której w drodze losowania dającego każdemu z graczy równe szanse, rozstrzyga się kto dostaje prawo pierwszeństwa. Wprowadzenie rundy wstępnej sprawia, że w modelu probabilistycznym pojawiają się pewne symetrie, a te sprawiają, że gra staje się sprawiedliwa.

Rozumowanie, które ujawniało paradoks (dla obu graczy gra jest korzystna), przenosi się na sytuację, gdy wpisywane na czołach liczby niekoniecznie są kolejnymi. Omawiany paradoks znany jest w literaturze w kilku innych wariantach. Warto je w nauczaniu wykorzystać. Mamy tu na uwadze aktywności związane z odkrywaniem i uzasadnianiem analogii.

W [9] przytoczono inny wariant tego paradoksu pod nazwą *czyj portfel cenniejszy*. Dwu gościom w kawiarni proponuje się, by każdy z nich wyłożył na stół swój portfel. Zawartość portfela, w którym jest większa kwota, staje się własnością drugiego z gości[4]. Następujące rozumowanie przemawia rzekomo za tym, że gra jest korzystna dla każdego z gości.

> — Jeśli mam więcej pieniędzy to tracę je na rzecz przeciwnika. Jeżeli jednak on ma więcej pieniędzy to ja wygrywam i to więcej niż mogę stracić, zatem gra jest dla mnie korzystna.

Problem i argumentacja są analogiczne do wcześniej zaprezentowanych.

Gra jest sprawiedliwa ale przy założeniu, że każdy z graczy dysponuje pewną kwotą od 0 do pewnej maksymalnej liczby n. Przyjmując to założenie o ograniczoności kwot graczy możemy skonstruować tabelę wypłat (patrz tab. 1), która pozwala „dostrzec symetrię" gry a tym samym jej sprawiedliwość (żaden z graczy nie ma w niej przewagi).

[4]Kolejny wariant tego paradoksu dotyczy krawatów dwu siedzących na przeciwko panów, krawat ładniejszy przechodzi na własność pana z brzydszym krawatem ([9]).

	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
1	×	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
2	-2	×	3	...	$n-2$	$n-1$	n
3	-3	-3	×	...	$n-2$	$n-1$	n
...	...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	$-(n-2)$	$-(n-2)$	$-(n-2)$	...	×	$n-1$	n
$n-1$	$-(n-1)$	$-(n-1)$	$-(n-1)$	...	$-(n-1)$	×	n
n	$-n$	$-n$	$-n$	...	$-n$	$-n$	×

tabela 1.

Liczby w pierwszej kolumnie i w pierwszym wierszu oznaczają odpowiednio kapitał (zawartość portfela) gracza G_A i G_B. Na skrzyżowaniu wiersza odpowiadającego kwocie j z kolumną odpowiadającą kwocie k znajduje się kwota, którą (w zależności od j i k) wygrywa lub traci gracz G_A. Wygranej gracza G_A sprzyjają wyniki nad przekątną tabeli, wygranej gracza G_B — wyniki pod przekątną. Weźmy pod uwagę zmienne losowe:

$$W_A \text{ — wygrana gracza } G_A, \quad W_B \text{ — wygrana gracza } G_B.$$

W tej sytuacji mamy $E(W_A) = E(W_B) = 0$. Gra jest więc sprawiedliwa.

3. Gry Penneya i paradoksy związane z nadzieją matematyczną

Wynik k-krotnego rzutu monetą jest pewną k-wyrazową serią orłów i reszek. Liczbę k nazywajmy długością serii. Ustalmy jeden taki wynik ω i powtarzajmy rzut monetą tak długo, aż ostatnie k rzutów da ten wynik. Rzucamy więc monetą tak długo, aż uzyskamy serię ω. Nazywajmy to doświadczenie *oczekiwaniem na serię* ω. Niech T_ω będzie czasem czekania na serię ω, wymierzanym liczbą wykonanych rzutów. Zainteresujmy się wartością oczekiwaną zmiennej losowej T_ω dla $\omega \in \{o, r\}^k$.

W zbiorze $\{o, r\}^k$, tj. w zbiorze serii o długości k, określamy relację *być wolniejszą serią*. Serię x nazywamy *wolniejszą* od serii y (zapisujemy $x < y$), gdy prawdopodobieństwo, że przy powtarzaniu rzutu monetą seria x pojawi się wcześniej niż seria y, jest mniejsze niż $\frac{1}{2}$.

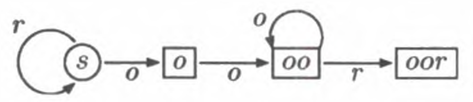
Rozważmy następującą grę z udziałem dwu graczy. Każdy z nich wybiera sobie jeden z wyników k-krotnego rzutu monetą (a więc jedną z 2^k możliwych serii orłów i reszek o długości k). Rzut monetą jest następnie powtarzany tak długo, aż ostatnie k rzutów da jeden z tych wyników (a więc gdy rzucanie zakończy się jedną z dwu wspomnianych serii). Zwycięża gracz, którego seria pojawiła się wcześniej. Opisana gra należy do klasy tzw. *gier Penneya* (zob.

[10], str. 452-454). Interesuje nas problem sprawiedliwości takiej gry[5], jego związek z wartościami oczekiwanymi czasów czekania na każdą z wybranych przez graczy serii, oraz związek z relacją *być wolniejszą serią.*

Opisaną grę można uogólnić na przypadek trzech lub więcej graczy (każdy wybiera inną serię orłów i reszek). Można także rozważać tego typu grę w sytuacji, gdy gracze wybierają serie orłów i reszek o różnej długości (nie jest wówczas obojętne, jakie serie zostają wybrane, aby zawsze zwycięzca mógł zostać wyłoniony i to jednoznacznie, serie krótsze nie mogą zawierać się w dłuższych).

3.1. Szybsze i wolniejsze serie orłów i reszek oraz średnie czasy oczekiwania na takie serie

Weźmy $k = 3$ oraz cztery wybrane serie: oor, roo, rro i orr. Rysunek 2 przedstawia graf stochastyczny dla oczekiwania na serię oor. Czas oczekiwania na serię oor jest zarazem czasem błądzenia po grafie stochastycznym z rys. 2. Korzystając z algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym ([16], str. 167) znajdźmy średni czas oczekiwania na tę serię. Oznaczmy przez e_x wartość oczekiwaną czasu błądzenia po grafie z rys. 2, gdy błądzenie rozpoczyna się w węźle x.



rys. 2.

Z algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym wynika następujący układ równań.

$$\begin{cases} e_s &= 1 + \frac{1}{2}e_s + \frac{1}{2}e_o \\ e_o &= 1 + \frac{1}{2}e_{oo} + \frac{1}{2}e_s \\ e_{oo} &= 1 + \frac{1}{2}e_{oo} + \frac{1}{2}e_{oor} \\ e_{oor} &= 0. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy: $e_s = E(T_{oor}) = 8$. Analogicznie znajdujemy średnie czasy oczekiwania na pozostałe serie. Mamy:

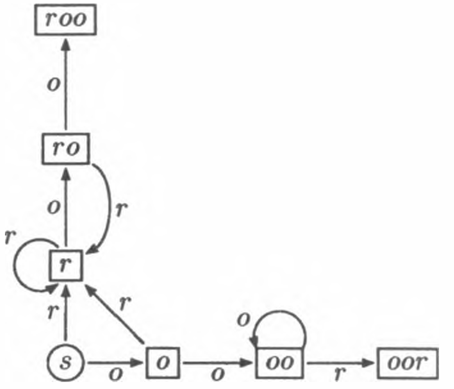
$$E(T_{oor}) = E(T_{roo}) = E(T_{rro}) = E(T_{orr}) = 8 \tag{2}$$

W zbiorze serii $\{oor, roo, rro, orr\}$ wprowadzamy zdefiniowaną wyżej relację być wolniejszą serią. Ponieważ na każdą z tych serii czekamy średnio tyle

[5]Mamy tu do czynienia z innym niż wcześniej omawiane kryterium sprawiedliwości gry. Tego typu grę nazywamy *sprawiedliwą*, jeśli dla obu graczy szanse na zwycięstwo są równe.

samo czasu (por. (2)), zatem wydaje się, że każda z tych serii jest tak samo wolna (ani x nie jest wolniejsza niż y, ani y nie jest wolniejsza niż x).

Rozważmy w tym kontekście grę Penneya, w której dwaj gracze wybrali dwie spośród powyższych serii. Rysunek 3 przedstawia graf stochastyczny (jako planszę do tej gry) w sytuacji, gdy gracze wybrali serie *roo* i *oor*. Wykorzystajmy graf do znalezienia prawdopodobieństwa, że jedna z serii pojawi się wcześniej niż druga. Jeśli pionek błądzący po grafie z rys. 3 trafi do węzła *oor* (ten węzeł jest stanem pochłaniającym, czyli jakby metą), to znaczy, że seria *oor* pojawiła się wcześniej niż seria *roo*. Wspomniane prawdopodobieństwo znajdźmy za pomocą *reguły pochłaniania* (zob. [16], str. 164). Przez p_{x-y}, gdzie y należy do brzegu grafu, oznaczmy prawdopodobieństwo dotarcia z węzła x na grafie do węzła brzegowego (mety) y.



rys. 3.

Mamy więc

$$\begin{cases} p_{s-oor} &= \frac{1}{2}p_{o-oor} + \frac{1}{2}p_{r-oor} \\ p_{o-oor} &= \frac{1}{2}p_{oo-oor} + \frac{1}{2}p_{r-oor} \\ p_{oo-oor} &= \frac{1}{2}p_{oo-oor} + \frac{1}{2}p_{oor-oor} \\ p_{r-oor} &= 0 \\ p_{oor-oor} &= 1. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy $p_{s-oor} = \frac{1}{4}$, a ponieważ dotarcie na grafie do mety *oor* jest równoznaczne z pojawieniem się serii *oor* wcześniej niż *roo*, więc

$$P(\textit{oor pojawi się wcześniej niż roo}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \text{ czyli } oor < roo.$$

Analogicznie

$$P(\textit{roo pojawi się wcześniej niż rro}) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \text{ czyli } roo < rro,$$

$$P(\textit{rro pojawi się wcześniej niż orr}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \text{ czyli } roo < orr,$$

zatem

$$oor < roo, \qquad roo < rro, \qquad rro < orr \tag{3}$$

seria *oor* jest wolniejsza niż seria *roo* i seria *roo* jest wolniejsza niż *rro* i *rro* jest wolniejsza niż *orr* co wydaje się być paradoksalne, bo niespodziewane i zaskakujące, sprzeczne z równością średnich czasów oczekiwania na każdą z serii.

Wydaje się oczywiste, że relacja „być wolniejszą serią" jest przechodnia. Na tej podstawie wnioskujemy z (3), że $oor < orr$. Tymczasem mamy:

$$P(orr \text{ pojawi się wcześniej niż } oor) = \frac{1}{3}, \text{ czyli } orr < oor.$$

Wykazaliśmy zatem, że relacja ta nie jest przechodnia. Także i ten fakt nieprzechodniości omawianej relacji można uznać za zaskakujący wręcz paradoksalny, bo niezgodny z naszymi intuicjami.

Warto zauważyć, że prawdopodobieństwo zdarzenia

$$\{roo \text{ pojawi się wcześniej niż } oor\}$$

można odczytać wprost z grafu stochastycznego z rys. 3. Z węzła r wszystkie trasy prowadzą do węzła *roo*, zatem dotarcie do węzła r jest równoznaczne z dotarciem do węzła *roo*. Szukane prawdopodobieństwo jest prawdopodobieństwem dotarcia ze startu s do węzła r, a to jest równe sumie prawdopodobieństw odpowiadających trasom: $s \to r$ i $s \to o \to r$, czyli wynosi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ tj. $\frac{3}{4}$.

Graf stochastyczny jest tu środkiem argumentacji i racjonalizacji rachunków, odnoszących się do przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych.

Na zajęciach ze studentami ten przykład odgrywa szczególną rolę w kształtowaniu pojęcia nadziei matematycznej oraz — ogólnie — w kształtowaniu intuicji stochastycznych jako ważnego aspektu kultury matematycznej. W stochastyce znanych jest wiele paradoksów, których istotą jest nieprzechodniość pewnych relacji ([11], [3]). Nie są one obecne w ujęciach akademickich rachunku prawdopodobieństwa, a można i należy je wykorzystać do kształcenia stochastycznego, ogólnomatematycznego i ogólnego (por. [17]).

3.2. Paradoksy związane z czasem oczekiwania na serie orłów i reszek oraz czasem trwania gry Penneya i jej sprawiedliwością

Z poprzednich rozważań wynika, że średni czas oczekiwania na każdą z serii $\omega_1 = oor$, $\omega_2 = roo$, $\omega_3 = rro$ i $\omega_4 = orr$ wynosi 8 (por. (2)). Rozważmv grę Penneya w sytuacji, gdy gracze wybrali dwie spośród tych serii. Przeprowadzane w grze Penneya doświadczenie losowe jest oczekiwaniem na jedną z wybranych serii.

Wydaje się oczywiste, że:

1) Sprawiedliwość gry Penneya z udziałem dwu graczy jest równoważna z równością średnich czasów oczekiwania na każdą z serii oddzielnie. Z faktu, że $E(T_{oor}) = E(T_{roo}) = E(T_{rro}) = E(T_{orr}) = 8$ zdaje się wynikać, że dla każdych dwu z powyższych serii, gra jest sprawiedliwa. Czy tak jest rzeczywiście?
2) Jeśli średni czas czekania na każdą z dwu serii wynosi m, to średni czas trwania gry Penneya także jest równy m. Z faktu, że średni czas czekania na każdą z serii wynosi 8 zdaje się wynikać, że średni czas trwania gry powinien też wynosić 8. Czy tak faktycznie jest?

Powyższe dwa przypuszczenia są błędne.

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest negatywna, ponieważ tylko dla serii ω_1 i ω_3 oraz dla serii ω_2 i ω_4 gra jest sprawiedliwa (szanse wygrania graczy przy ich wyborze wynoszą 1:1). Dla pozostałych serii szanse te wynoszą odpowiednio:

— 1:2, dla serii ω_4 i ω_1 oraz serii ω_2 i ω_3,

— 1:3, dla serii ω_1 i ω_2 oraz serii ω_3 i ω_4.

Odpowiedź na drugie pytanie jest również negatywna, ponieważ średni czas trwania gry (można go prosto wyznaczyć za pomocą algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym) wynosi:

— 7, gdy wybrane serie to: serii ω_2 i ω_4,

— $6\frac{1}{2}$, w przypadku serii ω_1 i ω_2 oraz serii ω_3 i ω_4,

— $5\frac{1}{3}$, dla serii ω_1 i ω_4 oraz serii ω_2 i ω_3,

— 5, dla serii ω_1 i ω_3.

W każdym przypadku średni czas trwania gry Penneya jest krótszy od średniego czasu oczekiwania na poszczególne serie.

Rozwiązania obu powyższych problemów ujawniają kolejne zaskakujące fakty. Aby je wyjaśnić na gruncie rachunku prawdopodobieństwa należy odwołać się do pojęcia przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego. Średni czas oczekiwania na każdą z serii obliczany jest w innej przestrzeni probabilistycznej, a czas trwania gry Penneya oraz prawdopodobieństwa wygrania wyznaczane są w jeszcze innej przestrzeni. Porównywanie rezultatów obliczeń w różnych przestrzeniach może być pozbawione sensu (tak właśnie jest w opisanej sytuacji) i prowadzi do paradoksalnych wniosków.

Rozwiązanie problemu średnich czasów czekania na każdą z serii ω_1, ω_2, ω_3 i ω_4 oraz średniego czasu trwania gry Penneya, inspiruje kolejne pytania:

— Czy dla pozostałych par serii orłów i reszek długości trzy jest podobnie?

— Czy tak jest tylko w grze z udziałem dwu graczy, czy także z udziałem trzech graczy?

— Czy tak jest przy seriach innej długości niż trzy?

— Czy tak jest w przypadku serii, z których każda ma inną długość?

Ostatnie pytanie wiąże się z wersją gry Penneya, w której każdy z graczy wybiera serię orłów i reszek dowolnej długości. Niech $\omega_A^k \in \{o, r\}^k$ oraz $\omega_B^m \in \{o, r\}^m$. Wówczas ω_A^k jest wynikiem k-krotnego rzutu monetą, ω_B^m wynikiem m-krotnego rzutu monetą. Załóżmy, że $m \neq k$. Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż:

albo k ostatnich rzutów da wynik ω_A^k — wtedy zwycięża G_A,

albo m ostatnich rzutów da wynik ω_B^m — wtedy zwycięża G_B.

Sformułujmy następującą hipotezę:

Średni czas trwania gry Penneya, niezależnie od liczby graczy i niezależnie od długości wybieranych serii, jest zawsze krótszy od średniego czasu oczekiwania na każdą z serii oddzielnie.

W przypadku każdych dwu różnych serii o długości 2 średni czas trwania gry Penneya z udziałem dwu graczy wynosi 3.

W przypadku serii o długościach nie większych niż 3, średnie czasy trwania gry Penneya z udziałem dwu graczy zebrano w tabelach 2 i 3. Każdy wiersz i każda kolumna odpowiadają pewnej serii orłów i reszek. Na skrzyżowaniu j-tego wiersza z k-tą kolumną wpisano średni czas trwania gry, gdy gracze wybrali serie odpowiadające j-temu wierszowi i k-tej kolumnie. Znak $\times$, na skrzyżowaniu j-tego wiersza z k-tą kolumną oznacza, że nie jest rozpatrywana para serii odpowiadająca temu wierszowi i tej kolumnie, gdyż dla takiej pary serii nie jest możliwe zwycięstwo któregoś z graczy (np. dla pary serii *oo* i *oor* zwycięstwo gracza, który wybrał serię *oor* nie jest możliwe), albo zwycięzcy nie można wyłonić jednoznacznie (np. dla pary serii *oo* i *roo*).

	ooo	*oor*	*oro*	*orr*	*roo*	*ror*	*rro*	*rrr*
oo	$\times$	$\times$	$4\frac{2}{3}$	4	$\times$	$3\frac{3}{4}$	4	4
or	$2\frac{3}{4}$	$\times$	$\times$	$\times$	$3\frac{1}{2}$	$\times$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
ro	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$\times$	$3\frac{1}{2}$	$\times$	$\times$	$\times$	$2\frac{3}{4}$
rr	4	4	$3\frac{3}{4}$	$\times$	4	$4\frac{2}{3}$	$\times$	$\times$

tabela 2.

Tabela 2 prezentuje średnie czasy trwania uogólnionej gry Penneya z udziałem dwu graczy w sytuacji, gdy jeden z graczy wybrał serię długości 2, a drugi serię długości 3.

W tabeli 3 zebrano średnie czasy trwania gry Penneya z udziałem dwu graczy w sytuacji, gdy każdy z graczy wybrał serię długości 3.

ooo	×							
oor	7	×						
oro	$6\frac{4}{5}$	6	×					
orr	$5\frac{3}{5}$	$5\frac{1}{3}$	6	×				
roo	7	$6\frac{1}{2}$	6	5	×			
ror	$5\frac{5}{6}$	$5\frac{5}{6}$	7	6	6	×		
rro	$5\frac{3}{5}$	5	$5\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{3}$	6	×	
rrr	7	$5\frac{3}{5}$	$5\frac{5}{6}$	7	$5\frac{3}{5}$	$6\frac{4}{5}$	7	×
	ooo	*oor*	*oro*	*orr*	*roo*	*ror*	*rro*	*rrr*

tabela 3.

Rozważmy grę Penneya, w której dwaj gracze wybrali serie *ooo* i *oor*. Z oczywistych symetrii wynika, że po uzyskaniu dwóch orłów pod rząd, wypadnięcie orła w następnym rzucie jest tak samo prawdopodobne jak wypadnięcie reszki. Zatem prawdopodobieństwo, iż seria *ooo* pojawi się wcześniej niż seria *oor* jest równe prawdopodobieństwu, że seria *oor* wypadnie wcześniej niż *ooo*. Opisana gra Penneya jest więc sprawiedliwa. Jeżeli T_{ooo} jest czasem oczekiwania na wypadnięcie trzech orłów pod rząd, T_{oor} zaś czasem oczekiwania na wypadnięcie po dwóch orłach reszki, to wydaje się oczywistym, że średni czas oczekiwania na wypadnięcie każdej z dwóch serii jest taki sam. Tymczasem $E(T_{ooo}) > E(T_{oor})$. Mamy bowiem $E(T_{ooo}) = 14$ (co łatwo policzyć korzystając z algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym) i jak pokazaliśmy wcześniej $E(T_{oor}) = 8$ (zob. (2)). Z faktu, że przy seriach ω_A i ω_B gra Penneya jest sprawiedliwa **nie wynika**, że średnie czasy czekania na każdą z tych serii są równe.

Na zajęciach ze studentami padła propozycja następującej argumentacji przy znajdowaniu średniego czasu czekania na serię o długości 3.

Seria oor jest jednym spośród ośmiu, jednakowo prawdopodobnych, wyników trzykrotnego rzutu monetą, prawdopodobieństwo jej uzyskania wynosi $\frac{1}{8}$. *Potraktujmy uzyskanie serii oor jako sukces. Trzykrotny rzut monetą staje się* *wtedy próbą Bernoullego o prawdopodobieństwie sukcesu równym* $\frac{1}{8}$. *Powtarzajmy próbę Bernoullego tak długo, aż uzyskamy sukces, tj. serię oor. Niech* C_{oor} *będzie czasem oczekiwania na pierwszy sukces, wtedy* $E(C_{oor}) = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$. *Liczba 8 jest też średnim czasem czekania na serię oor (patrz (2)) znalezionym w oparciu o algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym.*

Pojawiają się w tym kontekście pytania:

— Czy ta identyczność wyników liczbowych to tylko przypadek, czy pewna prawidłowość?

— Czy dla pozostałych serii orłów i reszek o długości 3, oba sposoby obliczania dadzą równe wartości liczbowe?

— Czy zaprezentowana metoda jest poprawną metodą obliczania średniego czasu oczekiwania na serię *oor*?

Poszukiwanie odpowiedzi na te pytania wiąże się także z kształtowaniem pojęcia nadziei matematycznej.

Każdy z wyników trzykrotnego rzutu monetą jest jednakowo prawdopodobny. Każdy wynik (rozpatrywany osobno) możemy traktować jako sukces. Jeśli u jest prawdopodobieństwem sukcesu w próbie Bernoullego, to wartość oczekiwana czasu oczekiwania na pierwszy sukces jest równa $\frac{1}{u}$. Średni czas oczekiwania na każdy z tych wyników wynosi zatem 8.

Średni czas oczekiwania na poszczególne serie, znaleziony w oparciu o algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym, wynosi:

— 8, dla każdej z serii: *oor*, *roo*, *rro*, *orr*,

— 10, dla serii *oro* i serii *ror*,

— 14, dla serii *rrr* i serii *ooo*.

Różne wartości średnich czasów czekania na poszczególne serie, dają podstawy do kwestionowania poprawności metody, w której, do obliczania średniego czasu oczekiwania na serię ω, korzysta się ze wzoru na wartość oczekiwaną czasu oczekiwania na pierwszy sukces. Rodzi się zatem pytanie: Gdzie tkwi błąd?

Jeśli serię ω o długości 3 (jako wynik trzykrotnego rzutu monetą) traktujemy jako sukces, to próbą Bernoullego jest trzykrotny rzut monetą. Oczekiwanie na serię ω polega na powtarzaniu pojedynczego rzutu monetą aż do uzyskania serii ω, oczekiwanie na pierwszy sukces polega w tym przypadku na powtarzaniu trzykrotnego rzutu monetą aż zakończy się on wynikiem ω. Czas oczekiwania na pierwszy sukces nie jest zatem czasem oczekiwania na serię ω. Średni czas oczekiwania na pierwszy sukces, gdy tym sukcesem jest

ω (czas wymierany liczbą wykonanych rzutów monetą) wynosi $8 \cdot 3$, czyli 24 rzuty monetą.

Zaprezentowane powyżej paradoksy ujawniają jak błędne są nasze intuicje stochastyczne zwiazane z pojęciami wartości oczekiwanej i prawdopodobieństwa. Paradoksy te, mogą być wykorzystane w procesie kształtowania właściwych intuicji stochastycznych. Praca ukazuje konieczność odwoływania się we wnioskowaniach stochastycznych do podstawowego pojęcia rachunku prawdopodobieństwa, jakim jest pojęcie przestrzeni probabilistycznej. Dostarczają zarazem temu pojęciu silnych motywacji. Niniejsze rozważania dotyczą szczególnej filozofii kształcenia stochastycznego, opartej na procesie konstruowania i badania przestrzeni probabilistycznych jako szczególnego matematycznego narzędzia opisywania i badania zarówno matematycznych jak i pozamatematycznych sytuacji i towarzyszących im stosunków jakościowych i ilościowych.

Analogiczna sytuacja, jak w omawianym przypadku, gdy z równości wartości oczekiwanych wnioskowano o sprawiedliwości gry, pojawiła się na zajęciach ze studentami przy analizie innej gry. W grze każdy z dwu graczy wybiera jedną z ruletek z rys. 4 (w [2] nazywa się je *nieprzechodnimi ruletkami Dietricha Morgensterna*, por. także [16], str. 389 i 340). Następnie każdy losuje liczbę za pomocą swojej ruletki a zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Z dwu ruletek r_j i r_k, ruletkę r_j nazywamy *lepszą*, jeśli szanse gracza, który losuje liczbę ruletką r_j są większe od szans jego przeciwnika w grze, który losuje liczbę ruletką r_k. Jeśli w przypadku tych ruletek gra jest sprawiedliwa, to nazywamy je *równie dobrymi*.

rys. 4.

Niech X_j będzie liczbą wylosowaną za pomocą ruletki r_j ($j = 1,2,3$). Mamy $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 5$. Z równości wartości oczekiwanych zdaje się wynikać, że każde dwie z powyższych ruletek są równie dobre (dają graczom równe szanse). Tymczasem ruletka r_1 jest lepsza od r_2, r_2 jest lepsza od r_3, r_3 jest lepsza od r_1 (por. [16], str. 390). Wnioskowanie o sprawiedliwości gry na podstawie równości wartości oczekiwanych nie jest w tej sytuacji poprawne.

Wartości oczekiwane wylosowanej liczby dla każdej z ruletek oblicza się w innej przestrzeni probabilistycznej, a rozstrzyganie, która z ruletek jest lepsza odbywa się w przestrzeni będącej produktem kartezjańskim tamtych dwu.

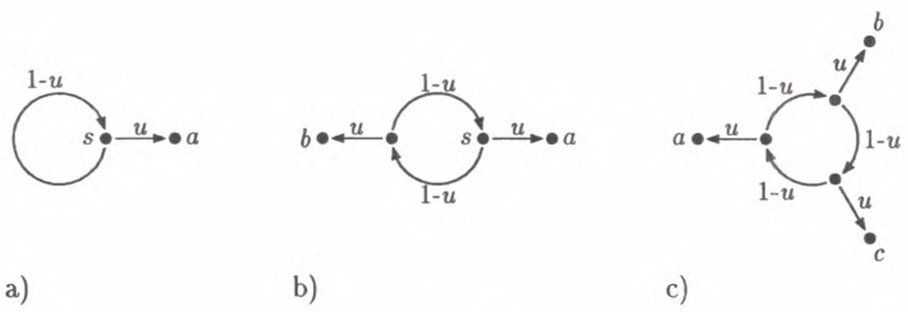
Problem sprawiedliwości gry wiąże się tu z obliczaniem prawdopodobieństwa dwu zdarzeń, w powyższej sytuacji odwołano się do nadziei matematycznej. Można tu, podobnie, jak wcześniej (por. problem 1) na str. 131), mówić o niewłaściwych skojarzeniach tych dwu probabilistycznych pojęć (być może zasugerowanych przypadkami gier, w których za udział trzeba opłacać wstęp, a wygrana jest zmienną losową).

4. Średni czas oczekiwania na pierwszy sukces jako średni czas błądzenia po różnych grafach

Rysunek 5a przedstawia graf stochastyczny dla oczekiwania na pierwszy sukces, tzn. powtarzania próby Bernoullego dopóty, dopóki nie zakończy się ona sukcesem, którego prawdopodobieństwo wynosi u. Czas oczekiwania, odmierzany liczbą wykonanych prób aż do uzyskania sukcesu, jest czasem błądzenia po tym grafie, tj. liczbą krawędzi trasy, którą pionek przebywa w trakcie błądzenia po grafie.

Załóżmy, że dwaj gracze G_A i G_B przeprowadzają na przemian wspomnianą próbę, a zwycięża ten, kto pierwszy uzyska sukces. Liczba wykonanych w tej grze prób jest czasem trwania gry, a zarazem jest ona czasem oczekiwania na pierwszy sukces i równocześnie czasem błądzenia po grafie z rys. 5b. Ten graf jest jakby planszą do gry.

Załóżmy, że w analogicznej grze uczestniczy trzech graczy. Teraz planszą do gry jest graf z rys. 5c. Czas trwania tej gry jest także czasem oczekiwania na pierwszy sukces i zarazem czasem błądzenia po grafie z rys. 5c. Przez a, b, c na rys. 5 oznaczono mety, do których dotarcie jest równoznaczne ze zwycięstwem odpowiednio gracza G_A, G_B, G_C.



rys. 5.

Każdy z tych grafów może służyć do obliczania (za pomocą odpowiedniego algorytmu) wartości oczekiwanej czasu oczekiwania na pierwszy sukces jako średniego czasu błądzenia po grafie. Na pytanie jaki jest średni czas błądzenia po każdym z grafów, często pada odpowiedź, że średni czas błądzenia po grafie z rys. 5c jest większy od średniego czasu błądzenia po grafie z rys. 5b, a ten z kolei jest większy od średniego czasu błądzenia po grafie z rys. 5a. Te nierówności wynikają — zdaniem studentów — z „rozmiarów” grafów, są jakby zasugerowane przez te „rozmiary”. Im więcej krawędzi ma graf, tym średni czas błądzenia po nim wydaje się większy. Takie błędne wnioskowanie jest prawdopodobnie wynikiem stosowania strategii heurystycznych Kahnemana-Tversky'ego. Można w tym kontekście mówić o strategii C (Anchoring) ([20] oraz [16]).

Aby uświadomić studentom błędność takiego wniosku można zaproponować na zajęciach następującą procedurę. Wybierzmy trzy osoby przydzielając każdej jeden z grafów z rys. 5a-5c. Następnie rzucajmy monetą. Wyrzucenie reszki traktujmy jako *sukces*. Powtarzajmy rzut monetą tak długo, aż wypadnie reszka. Każda z trzech wybranych osób protokołuje na swoim grafie przebieg oczekiwania na reszkę (po kolejnym rzucie monetą przesuwając pionek wzdłuż krawędzi odpowiadającej porażce, gdy wypadnie orzeł, a wzdłuż krawędzi odpowiadającej sukcesowi, gdy wypadnie reszka). Wraz z wypadnięciem reszki każdy trafia ze swym pionkiem na brzeg grafu (do mety). Ten fakt pozwala zauważyć, że czas błądzenia po każdym z tych trzech grafów, jest czasem oczekiwania na pierwszy sukces, a więc średnie czasy błądzeń po tych grafach są równe.

5. Pewne zaskakujące własności nadziei matematycznej zmiennych losowych związanych ze schematami urnowymi

5.1. Niezależność średniej liczby skojarzeń od liczby kul i od typu losowania

Z urny o s ponumerowanych kulach losujemy k razy kulę. Załóżmy, że $k \leq s$. Mówimy o *skojarzeniu* jeżeli numer wylosowanej kuli jest zgodny z numerem etapu, na którym ona została wylosowana. Wydaje się oczywiste, że wartość oczekiwana liczby skojarzeń w takiej sytuacji powinna zależeć od typu losowania. Niech W_b będzie liczbą skojarzeń w przypadku losowania bez zwracania, W_z zaś liczbą skojarzeń w przypadku losowania kuli ze zwracaniem. Fakt, że $E(W_b) = E(W_z) = \frac{k}{s}$, jest zawsze dla studentów sporym zaskoczeniem. Zilustrujmy tę paradaksalną sytuację na przykładzie następującej gry:

Za udział w grze płaci się wstęp i dostaje prawo do losowania s razy kuli z urny o s ponumerowanych kulach a wygrywa tyle złotówek ile nastąpi skojarzeń. Tego typu gra jest sprawiedliwa jeśli opłata za udział w grze jest równa wartości oczekiwanej wygranej gracza. Przed losowaniem masz prawo zdecydować, czy kule będziesz losował ze zwracaniem, czy bez. Przy jakiej opłacie za wstęp do gry jest ona sprawiedliwa gdy kule losuje się ze zwracaniem, a przy jakiej, gdy bez zwracania?

Wydaje się oczywiste, że opłata za wstęp do gry sprawiedliwej powinna zależeć zarówno od s jak i od typu losowania. Fakt, że niezależnie od liczby kul i niezależnie od typu losowania wstęp do gry sprawiedliwej kosztuje 1 zł wydaje się paradoksalny.

Fakt, że $E(W_b) = \frac{k}{s}$, jest na ogół znany. O średniej liczbie skojarzeń w takim losowaniu bez zwracania wspomina się w literaturze probabilistycznej (por. *Bernoullego-Eulera problem pomieszanych listów, problem Montmorta*, [16], str. 81). O skojarzeniach w przypadku losowania ze zwracaniem raczej się nie wspomina.

Załóżmy, że kule są losowane ze zwracaniem. Wynikiem k-krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny o s ponumerowanych kulach jest k wyrazowa wariacja zbioru $\{1, 2, 3, \dots, s\}$, j-ty wyraz tej wariacji oznacza numer kuli wylosowanej za j-tym razem. Mamy s^k wszystkich możliwych i jednakowo prawdopodobnych wyników. Model probabilistyczny doświadczenia jest klasyczny. Niech W_z będzie liczbą wygranych złotówek w losowaniu ze zwracaniem. Przez L_j oznaczmy liczbę złotówek wygranych za wynik j-tego etapu losowania. Wówczas

$$
\begin{aligned}
W_z &= L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_k, \\
E(L_j) &= P(L_j = 1) = \frac{s^{k-1}}{s^k} = \frac{1}{s}, \\
E(W_z) &= E(L_1 + L_2 + \cdots + L_k) = E(L_1) + E(L_2) + \cdots + E(L_k) = k \cdot \frac{1}{s} \\
&= \frac{k}{s}.
\end{aligned}
$$

Zatem $E(W_b) = E(W_z) = \frac{k}{s}$. Gdy losujemy s razy ($k = s$), to średnia liczba wygranych złotówek nie zależy ani od typu losowania ani od s i wynosi 1.

Zauważmy, że w przypadku losowania ze zwracaniem liczba losowań może być większa od liczby kul. W tym przypadku wartość oczekiwana liczby skojarzeń nie zależy od liczby losowań i dla każdego s wynosi 1.

Średnie wygrane w obu wariantach gry są identyczne, zatem opłata za udział w grze nie powinna zależeć od sposobu losowania. Ponadto opłata ta nie powinna zależeć od s. Gdy losujemy co najmniej s razy, to przy opłacie równej 1 zł gra jest sprawiedliwa. Te wnioski stanowiące fazę interpretacji są na ogół dla studentów zaskakujące.

5.2. Niezależność średniej sumy numerów wylosowanych kul od typu losowania jako kolejna zaskakująca własność nadziei matematycznej

W grze losuje się k razy kulę z urny o s ponumerowanych kulach. Załóżmy, że $k \leq s$. Za udział w grze gracz płaci m zł i wygrywa tyle złotówek ile wynosi suma numerów wylosowanych kul. Przed losowaniem gracz podejmuje decyzję co do sposobu losowania. Rozważmy decyzje:

d_b — *kule będą losowane bez zwracania,*

d_z — *kule będą losowane ze zwracaniem.*

W losowaniu ze zwracaniem można wygrać większą kwotę, więc wydaje się oczywiste, że w przypadku decyzji d_z opłata za wstęp do gry powinna być większa. Opłata ta powinna zależeć od sposobu losowania.

Niech V_z oznacza sumę numerów wylosowanych kul w losowaniu ze zwracaniem, a V_j niech oznacza numer kuli wylosowanej za j-tym razem ($j = 1, 2, \ldots, k$) w tym losowaniu. V_z i V_j są zmiennymi losowymi, które można rozpatrywać w tej samej przestrzeni probabilistycznej i $V_z = \sum_{j=1}^{k} V_j$ oraz $E(V_z) = \sum_{j=1}^{k} E(V_j)$. Każdą ze swoich wartości zmienna losowa V_j przyjmuje z jednakowym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{s}$, a zatem

$$E(V_j) = \frac{1}{s} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1+s}{2} \cdot s = \frac{1+s}{2}$$

oraz

$$E(V_z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1+s}{2} = \frac{k(1+s)}{2}.$$

Niech V_b będzie sumą numerów wylosowanych kul w losowaniu bez zwracania. Rozkład zmiennej ma środek symetrii, więc wartość oczekiwana tej zmiennej losowej jest średnią arytmetyczną liczb

$$v_{min} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k,$$
$$v_{max} = s + (s-1) + (s-2) + \cdots + (s-k+1),$$

czyli $E(V_b) = \frac{k(1+s)}{2}$.

Mamy zatem równość $E(V_z) = E(V_b)$, która jest bez wątpienia faktem zaskakującym. Jest to kolejny paradoks związany z nadzieją matematyczną.

Średnie wygrane w obu przypadkach są identyczne. Zatem opłata za wstęp nie powinna zależeć od sposobu losowania kul. Jeśli gracz zamierzałby wiele razy grać, to jest obojętne jaki schemat losowania wybierze.

Przy znajdowaniu wartości oczekiwanej zmiennej losowej V_b zostały wykorzystane własności tego pojęcia wynikające z interpretacji fizycznej rozkładu zmiennej losowej. Liczbę $P(V_b=x)$ interpretujmy jako masę skupioną na prostej w punkcie o współrzędnej x. Wartość oczekiwana, jest w tej fizycznej interpretacji rozkładu, współrzędną środka ciężkości układu mas (tj. rozkładu jednostkowej masy na prostej). Ponieważ rozkład ten ma środek symetrii więc środek ciężkości (czyli wartość oczekiwana) jest średnią arytmetyczną najmniejszej i największej wartości zmiennej losowej.

W przytoczonych rozważaniach związanych z niezależnością wartości oczekiwanych pewnych zmiennych losowych (liczby skojarzeń, sumy numerów wylosowanych kul) od sposobu losowania (ze zwracaniem lub bez) korzystano z własności nadziei matematycznej jaką jest jej addytywność. Trudny raczej do zaakceptowania (przez studentów) bywa fakt, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie ich wartości oczekiwanych także w sytuacji gdy te zmienne losowe są zależne. Tę własność można odkryć w trakcie rozwiązywania następującego zadania:

Z zestawu czterech monet o nominałach 1, 2, 5 i 10 groszy losuje się trzy razy monetę bez zwracania. Wygrana jest sumą nominałów wylosowanych monet. Niech X_j będzie nominałem monety wylosowanej za j-tym razem ($j = 1, 2, 3$). Wygrana W jest zmienną losową i $W = X_1 + X_2 + X_3$. Wykaż, że $E(W) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$.

Ostatnia równość wydaje się paradoksalna. Zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 nie są bowiem niezależne, a intuicja podpowiada, że ta niezależność jest istotnym założeniem w twierdzeniu o addytywności nadziei matematycznej.

6. Paradoks petersburski w procesie kształtowania pojęcia nadziei matematycznej

Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż wypadnie reszka. Jeżeli reszka pojawi się w r-tym rzucie to gracz wygrywa 2^r złotówek. Zatem po każdym rzucie monetą wygrana się podwaja. Jakiej wygranej może oczekiwać gracz? Ile warto zapłacić za udział w tej grze?

Gra kończy się po k-tym rzucie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^k}$ zatem, jeżeli W jest wygraną gracza, to jej wartość średnia powinna być sumą szeregu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k.$$

Szereg ten jest jednak rozbieżny. Ten fakt sugeruje, że za udział w grze warto zapłacić dowolnie wysoką stawkę. Jest to paradoksalne zwłaszcza gdy zauważymy, że średni czas trwania tej gry wynosi 2.

Paradoks ten może odegrać pewną rolę w kształtowaniu pojęcia nadziei matematycznej. Chodzi tu o wyeksponowanie kryteriów poprawności definicji wartości oczekiwanej.

7. Średnia liczba potomków w procesie gałązkowym

Rozważmy jeszcze jeden zaskakujący fakt związany z nadzieją matematyczną.

W teorii procesów gałązkowych (zob. np. [7]) rozważa się cząstki, które według określonego modelu probabilistycznego produkują „pokolenie swych potomków". Liczba potomków danej cząstki w pierwszym pokoleniu jest zmienną losową L_1 o zadanym rozkładzie p_L. Na zajęciach ze studentami mówimy o bakteriach. Jeżeli na początku w probówce jest jedna bakteria, to z prawdopodobieństwem u_k, gdzie $k = 0, 1, 2$ i $\sum_{k=0}^{2} u_k = 1$, bakteria ta „produkuje" k potomków. Przypuśćmy, że z prawdopodobieństwem:

$u_0 = \frac{1}{4}$ bakteria może zginąć,

$u_1 = \frac{1}{4}$ może przeżyć nie rozmnażając się,

$u_2 = \frac{1}{2}$ bakteria może rozmnożyć się przez podział na dwie identyczne bakterie.

Tak powstaje pierwsze pokolenie bakterii. W drugiej jednostce czasu konstytuuje się, według tego samego modelu, drugie pokolenie bakterii. Niech L_n będzie liczbą bakterii w n-tym pokoleniu (jakby w chwili n). Na pytanie: jaka liczba bakterii w drugim pokoleniu jest najbardziej prawdopodobna, pada odpowiedź, że liczba 4, podczas gdy najbardziej prawdopodobną liczbą jest liczba 0.

Jeśli wartość oczekiwana zmiennej losowej L_1 jest równa a, to można wykazać, że $E(L_n) = a^n$ co jest również faktem zaskakującym.

8. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono pewną, mało eksponowaną w kursach stochastyki, rodzinę paradoksów związanych z nadzieją matematyczną oraz propozycję ich wykorzystania do:

— kształtowania pojęcia nadziei matematycznej,

— odkrywania definicji tego pojęcia,

— odkrywania jego własności,

— kształtowania intuicji stochastycznych jako ważnego aspektu kultury matematycznej,

— matematycznej aktywizacji studenta (a także i ucznia w szkole),

Zaprezentowane problemy mogą stać się inspiracją do poszukiwania źródeł błędnych rozumowań i służyć głębszemu zrozumieniu istoty i metodologii rachunku prawdopodobieństwa, a także przyczynić się do kształtowania intuicji stochatycznych.

Nie bez znaczenia jest fakt, że zajęcia na których wykorzystywane są paradoksy, są ciekawsze, bardziej zajmujące i bardziej aktywizujące studenta (ucznia).

Literatura

[1] J. Anusiak, *Matematyka. Podręcznik uzupełniający dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego. Profil matematyczno-fizyczny*, WSiP, Warszawa 1990.

[2] F. Barth, R. Haller, *Stochastik*, Ehrenwirth Verlag, München 1983.

[3] M. Borovcnik, *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*, B-I Wissenschaftsverlag, Mannheim – Leipzig – Wien – Zürich 1992.

[4] J. Browkin, *Matematyka IV*, WSiP, Warszawa 1995.

[5] K. Cegiełka, *Tematy pisemnego egzaminu dojrzałości w liceach o profilu matematyczno-fizycznym*, Matematyka **5** (1991), 289-303.

[6] A. Dąbrowski, *O losowym wyborze liczb naturalnych*, Matematyka **1** (1994), 12-14.

[7] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1977.

[8] H. Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973.

[9] M. Gardner, *Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight*, W. H. Freeman and Company, San Francisco 1982.

[10] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[11] R. Kapadia, M. Borovcnik, *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Boston – London 1991.

[12] R. Kołodziej, K. Mostowski, W. Zawadowski, *Trójgłos*, Matematyka **1** (1995), 24-27.

[13] W. Kuczyński, *O pewnym zadaniu maturalnym*, Matematyka **1** (1994), 10-11.

[14] A. Płocki, *Nadzieja matematyczna i proces jej kształtowania w nauczaniu probabilistyki*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydak. Prace z Rachunku Prawdopodobieństwa i jego Dydaktyki **1** (1987), 47-133.

[15] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała 1997.

[16] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1992.

[17] A. Płocki, *Spór o treści i formę stochastycznego kształcenia nauczyciela matematyki*, Dydaktyka Matematyki **17** (1995), 135-165.

[18] G. Szekely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.

[19] J. Shaughnessy, *Misconception of probability*, Educational Studies in Mathematics **8** (1977), 295-316.

[20] A. Tversky, D. Kahneman, *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Science **185** (1974), 1124-1131.

[21] H. Walter, *Heurystische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen*, Der Mathematikunterricht **1** (1983), 11-23.

Katedra Pedagogiki
Przedszkolnej i Wczesnoszkolnej
WSP
ul. Ingardena 4
PL-30-060 Kraków
Poland