

Adam Płocki

## Refleksja a posteriori – mało znana w nauczaniu stochastyki forma aktywności matematycznej

**Резюме.** Работа содержит набор примеров неожиданных фактов, открытых в статистических (а значит, эмпирических) данных и предложения по их использованию для активизации математической деятельности на уроках стохастике и на занятиях со студентами. Речь идет о формулировке математических задач, решение которых является объяснением средствами математики упомянутых неожиданных эмпирических закономерностей, а значит, об организации рефлексии апостериори. Организация процедур, связанных с этой рефлексией, рассматривается как специфическая (для стохастике) математическая деятельность. Рисунок является при решении этих проблем удобным средством математизации и аргументации.

Работа касается особого подхода к школьной стохастике, который основывается на определенном взгляде на математику, на ее обучение и на роль учителя в этом обучении. В контексте обучения, математика понимается как специфическая интеллектуальная деятельность, обучение математике – как становление и открытие новых знаний. Учитель является умным помощником строителя и одновременно является „инспектором-надсмотрщиком за работами”. В данной ситуации он предлагает ученику эмпирические факты, которые наводят на размышления, заставляют его задуматься и, таким образом, инспирируют математическое мышление. Эмпирические данные являются источником задач по теории вероятностей.

### Wprowadzenie

Jednym z aktualnych zagadnień dydaktyki matematyki jest wypracowanie form i treści prezentacji, kontroli oraz oceny wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Dotyczy ono tym samym formy i problematyki zadań z rachunku prawdopodobieństwa, ich inspirowania i motywowania wysiłku związanego z ich formułowaniem, atakowaniem i rozwiązywaniem.

Można mówić o trzech rodzajach sytuacji inspirujących formułowanie matematycznego zadania przez samego ucznia i motywujących rachunki związane z prawdopodobieństwem, rozkładem zmiennej losowej i jej momentami, ze stochastyczną niezależnością:

- pozamatematyczna sytuacja i kreowany przez nią sensowny problem, którego rozwiązywanie jest ilustracją procesu stosowania matematyki, a więc ukazuje pojęcia stochastyczne jako narzędzia rozwiązywania konkretnych problemów (prawdopodobieństwo jako ocena pewnego ryzyka, wartość oczekiwana jako narzędzie oceny oczekiwanych zysków w grze hazardowej, bądź jako narzędzie wyłaniania optymalnych decyzji itd., por. [15], [17]),
- zaskakujące rozbieżności pomiędzy wnioskami, jakie podsuwa nam intuicja, a tymi, jakie wynikają z rachunków i dedukcji w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej (chodzi o tzw. stochastyczne paradoksy, por. [15], [16]),
- nieoczekiwane fakty empiryczne ujawnione przez dane statystyczne.

Niniejsze rozważania są propozycją wykorzystania tych trzech sytuacji zarówno do kształcenia stochastycznego, jak i do matematycznej aktywizacji ucznia. Organizacja refleksji *a posteriori*, o jaką tu chodzi, obejmuje wnioskowania zarówno probabilistyczne, jak i statystyczne (idee estymacji i weryfikacji hipotez). W pracy mowa jest zatem o matematycznych zadaniach kreowanych przez dane empiryczne oraz pytania:

- Dlaczego tak niespodziewanie często? Dlaczego tak bardzo rzadko?
- Dlaczego tak szybko? Dlaczego tak wolno?
- Dlaczego tak symetrycznie? Dlaczego tak zaskakująco asymetrycznie?

Mowa tu o faktach ujawnionych w danych statystycznych, które to fakty przeczą niejako zdrowemu rozsądkowi, mowa o własnościach próbki, które zdają się pozostawać w sprzeczności z tym, co sugeruje nam intuicja. Formułowanie matematycznego zadania, którego rozwiązywanie staje się zarazem uzasadnianiem na gruncie rachunku prawdopodobieństwa tych zaskakujących cech próbki, należy do szczególnych form matematycznej aktywizacji ucznia w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa.

Praca prezentuje i teoretycznie uzasadnia propozycję nauczania elementów stochastyki w cyklu: **sytuacja problemowa — intuicyjna hipoteza (na ogół błędna) — eksperyment i dane statystyczne — zdziwienie wynikiem pozostającym w sprzeczności z hipotezą — matematyczna analiza uzasadniająca tezę zasugerowaną przez dane empiryczne i uzasadniająca źródła błędnych intuicji.**

Jedną z bardziej znanych sytuacji wspomnianego typu jest stosunkowo częste trafiać się w gronie zaledwie dwudziestu kilku osób co najmniej dwu obchodzących wspólnie urodziny (w prawie połowie klas są tacy uczniowie). W grupie 50 osób prawie zawsze są takie dwie osoby, choć każdemu wydaje się to nad wyraz mało prawdopodobne. Próba wyjaśniania tego faktu prowadzi do sformułowania zadania na obliczanie prawdopodobieństwa.

Niniejsze rozważania dotyczą propozycji kreowania (i motywowania) zadań z rachunku prawdopodobieństwa poprzez zadumę nad pewnymi faktami empirycznymi. Nie chodzi tu o gotowe zadanie *oblicz prawdopodobieństwo...*, a następnie o ewentualne odniesienie rezultatów tych rachunków do rzeczywistości (faza interpretacji). Pierwszy etap tworzenia matematycznego zadania to we wspomnianej propozycji zbieranie i opracowywanie danych statystycznych, które ujawniają pewien (na ogół zaskakujący) fakt. Skoro jest on faktem niespodziewanym, rodzi się chęć jego wyjaśnienia na gruncie matematyki. Tak powstaje problem przekładu pozamatematycznego zagadnienia na język matematyki, jego opis w kategoriach matematycznych i budowanie dla sytuacji, której on dotyczy, matematycznego modelu (faza matematyzacji).

Grupa  $k$  osób, to jakby rezultat  $k$ -krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny o 365 ponumerowanych kulach (to dni roku<sup>1</sup>). Kolejno wyciągana kula to dzień urodzin kolejnej osoby. W zadaniu, które rodzi się w tym kontekście, chodzi o dyskusję, jak w zależności od  $k$  zmienia się prawdopodobieństwo zdarzenia  $A_k = \{ta\ sama\ kula\ zostanie\ wylosowana\ co\ najmniej\ dwa\ razy\}$ . Łatwo wykazać, że

$$P(A_k) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (k + 1))}{365^k}.$$

Jest zatem:  $P(A_{30}) \approx 0,706$ ,  $P(A_{50}) \approx 0,970$ .

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest większe od 0,95, uznaje się we wnioskowaniach stochastycznych za *praktycznie pewne*. W zapełnionym do ostatniego miejsca autobusie PKS, praktycznie na pewno są co najmniej dwie osoby obchodzące wspólnie urodziny. Ten wniosek stanowi fazę interpretacji, jako ostatni etap rozwiązywania pewnego pozamatematycznego problemu.

Matematyczne zadanie (*oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia...*) zostało zainspirowane pewnym faktem empirycznym. Rozwiązanie zadania stało się zarazem wyjaśnieniem na gruncie rachunku prawdopodobieństwa tego zaskakującego faktu.

<sup>1</sup>Zakładamy tu, że rok ma 365 dni i że dla każdej z przypadkowo spotkanych osób każdy z tych dni jest jednakowo możliwy jako dzień, w którym ta osoba obchodzi urodziny. Jest to pewne uproszczenie nie wypaczające w istotny sposób rzeczywistości, dla której tworzymy w ten sposób matematyczny model.

Szkolne ujęcia rachunku prawdopodobieństwa rzadko odwołują się do tego typu aktywności matematycznej. W zasadzie jedyny znany z dydaktycznych propozycji jest przykład „wyścigów” pionków po jedenastu torach (oznaczonych liczbami od 2 do 12), w trakcie powtarzania rzutu dwiema kostkami. Po każdym rzucie o jedno pole w kierunku mety przesuwany jest pionek na torze odpowiadającym sumie wyrzuconych oczek. Pionek na torze 7 posuwa się szybko, pionki na polach 2 i 12 bardzo wolno. Ten fakt rodzi pytanie, dlaczego tak się dzieje ([22], [3], str. 183).

Podobne formy matematycznej aktywności towarzyszą:

- obserwacji wyników kolejnych losowań numerów w totolotku (w prawie połowie dużej liczby takich losowań są wśród sześciu wylosowanych liczb dwie kolejne, por. [5], str. 116 oraz [15], str. 101-102),
- analizie rozkładu dużej liczby kul w przegrodach na desce Galtona (wyraźne symetrie w rozkładzie tych liczb, por. [16], str. 23-dyw24).
- analizie rozkładu liczb wyrzuconych reszek w wielokrotnym powtarzaniu rzutu  $m$  jednakowymi monetami (wyraźne symetrie histogramu będącego ikoniczną formą prezentacji danych statystycznych).

## 1. Dane statystyczne jako stadium myślenia matematycznego. Schemat symulacyjny panmiksji

W proponowanych w tej pracy sytuacjach dane statystyczne kreuja matematyczne myślenie, ich analizowanie staje się stadium myślenia matematycznego. Dane te inspirują bowiem zadania, dające się sformułować w języku matematyki. Ich formułowanie i rozwiązywanie (w tym dobór narzędzi matematyzacji i argumentacji) jest szeroko rozumianą działalnością matematyczną, mającą w tym kontekście silne motywacje.

Rozważmy dwie urny:  $U_m$  i  $U_o$ . W każdej jest 25 identycznych w dotyku krążków, 16 krążków z obu stron czarnych, 8 krążków z jednej strony białych z drugiej czarnych i jeden krążek z obu stron biały. Z każdej urny losujemy jeden krążek i szybkim ruchem kładziemy na stół. Gdyby teraz oba krążki zlepić stronami, którymi leżą na stole, to powstałby nowy krążek. Ten krążek jest wynikiem pewnego doświadczenia losowego. Nie zlepiamy krążków, a jedynie zarejestrujemy, jakiego typu jest tak ukształtowany krążek. Wylosowane krążki zwróćmy do urn.

Oznaczajmy czarny kolor literą  $A$ , biały — literą  $a$ . Przez  $AA$ ,  $Aa$ ,  $aa$  oznaczajmy odpowiednio: krążek czarno-czarny, czarno-biały i biało-biały.

Powtarzamy wiele razy opisane doświadczenie losowe i tak gromadzone dane statystyczne opracujemy w tabeli. Po wykonaniu doświadczenia postawmy kreskę w wierszu odpowiadającym typowi uzyskanego krążka. Dane statystyczne o gromadzeniu i opracowywaniu których tu mowa, stanowią *próbkę*. Każda z urn  $U_m$  i  $U_o$  jest *populacją*.

Oto protokół z gromadzenia danych statystycznych w piętnastoosobowej grupie studentów (każdy powtórzył doświadczenie 30 razy):

																suma ↴
AA	18	21	21	21	18	20	19	20	19	21	20	17	17	24	18	294
Aa	11	9	8	9	12	9	10	9	10	8	10	11	12	6	11	145
aa	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	2	1	0	1	11

Częstości pojawiania się odpowiednich krążków w 450 powtórzeniach doświadczenia są następujące:

$$f_{450}(AA) = \frac{294}{450} \approx 0,65, \quad f_{450}(Aa) = \frac{145}{450} \approx 0,32, \quad f_{450}(aa) = \frac{11}{450} \approx 0,02.$$

Porównajmy częstości poszczególnych typów krążków w próbce z ich frakcjami w urnie (z prawdopodobieństwami ich wylosowania z urny). Mamy tu:

$$p(AA) = \frac{16}{25} = 0,64, \quad p(Aa) = \frac{8}{25} = 0,32, \quad p(aa) = \frac{1}{25} = 0,04.$$

Zgodność pomiędzy częstościami w próbce, a frakcjami w populacji (prawdopodobieństwami) jest zaskakująca. Jak wyjaśnić ten zaskakujący fakt empiryczny? I co z tego faktu wynika?

Pierwsze pytanie dotyczy organizacji matematycznymi środkami refleksji *a posteriori*. Pytanie drugie odnosi się do organizacji fazy interpretacji.

Odpowiedź na pierwsze pytanie wymaga konstrukcji przestrzeni probabilistycznej jako modelu opisanego doświadczenia losowego.

Rozważmy zdarzenia związane ze wspomnianym losowym konstytuowaniem się krążka:

$$A = \{\text{krążek będzie typu } AA\},$$

$$B = \{\text{krążek będzie typu } Aa\},$$

$$C = \{\text{krążek będzie typu } aa\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że w przestrzeni probabilistycznej tego doświadczenia (można ją konstruować za pomocą drzewa stochastycznego) jest:

$$P(A) = \frac{16}{25} = 0,64, \quad P(B) = \frac{8}{25} = 0,32 \quad \text{i} \quad P(C) = \frac{1}{25} = 0,04.$$

Rozwiązanie tego probabilistycznego zadania jest zarazem wyjaśnieniem na gruncie matematyki owego empirycznego faktu odkrytego w próbce.

Tradycyjne zadanie dotyczyłoby obliczania prawdopodobieństwa, że ukształtowany w opisany sposób krążek będzie danego typu. Droga do tego zadania zaproponowana wyżej inspirowane inne formy matematycznej aktywności, pełni też inną rolę w kształceniu stochastycznym.

Problem losowania próbki rodzi teraz pytanie, jak usprawnić procedury związane z tym losowaniem. Jak te dane gromadzić np. za pomocą tablic liczb losowych? Pojawia się więc w tym kontekście specyficzne dla stochastyki matematyczne zadanie. Chodzi o konstrukcję *schematu symulacyjnego*, a więc o określenie doświadczenia losowego o izomorficznym modelu probabilistycznym jak model doświadczenia z krążkami, ale przeprowadzanego za pomocą generatora tablic liczb losowych dziesiętnych jednorodnych (np. urny z dziesięcioma kulami o numerach: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Zadań tego typu nie proponuje się aktualnie w szkolnych ujęciach rachunku prawdopodobieństwa.

Konstrukcja schematu symulacyjnego oparta na liczbach losowych sugeruje kolejną formę symulacji opartej na komputerze. Ten ostatni szybko gromadzi i porządkuje dane statystyczne, ukazując w formie histogramu odkryte wyżej prawidłowości.

Opisane doświadczenie losowe z krążkami jest schematem symulacyjnym losowego kojarzenia osobników, zwanego *panmiksją* ([11], str. 52). Czarna strona krążka oznacza gen  $A$ , strona biała — gen  $a$ . Sam krążek reprezentuje genotyp osobnika<sup>2</sup>. Urna  $U_m$  jest w tej interpretacji populacją matek, urna  $U_o$  — populacją ojców. Powstały w opisanym doświadczeniu krążek — to genotyp potomka dwu rodziców losowo dobranych do kojarzenia. Próbkę, którą opracowano w tabeli, jest jakby populacją potomków. Doświadczenie z krążkami symuluje panmiksję, jest ono *schematem symulacyjnym* panmiksji.

Powtarzając wiele razy konstytuowanie się genotypu potomka zauważyliśmy, że częstości (frekwencje) poszczególnych genotypów w populacji potomków są bardzo zbliżone do frakcji tych genotypów w populacji rodziców. Porównując te frekwencje w próbce z odpowiednimi frakcjami w populacji rodziców, odkryliśmy niejako to, co przed wiekiem odkrył na swoich poletkach Grzegorz Mendel. Zgodność wspomnianych frekwencji i frakcji jest treścią tzw. *prawa Hardy'ego-Weinberga* ([11], str. 53). Zaproponowane procedury umożliwiły niejako odkrywanie przez ucznia prawa, które przed wiekiem zauważył hodowca, ale uzasadnił później (i to na gruncie rachunku prawdopodobieństwa) matematyk.

---

<sup>2</sup>geny  $A$  i  $a$  tworzą parę *alleli* i są nośnikami określonej cechy dziedzicznej zgodnie z prawami Mendla (por. [16], str. 334-337)



## 2. Dane statystyczne a wyłanianie optymalnych decyzji

Wyjdźmy od prostej gry, w której rekwizytem są trzy wspomniane wyżej krążki: czarno-czarny, czarno-biały i biało-biały. Z zestawu tych trzech krążków losuje się jeden i szybkim ruchem kładzie na stół. Gracz, znając kolor widocznej strony leżącego na stole krążka, odgaduje jakiego koloru jest ta strona, na której krążek leży. Jeśli trafi, to zdobywa punkt (por. [5], str. 91).

Na tle opisanej gry *dwa kolory i trzy krążki* pojawia się pytanie: czy można w jej kontekście mówić o jakiejś racjonalnej strategii. Przez taką należy rozumieć strategię, przy której szanse uzyskania punktu są maksymalne. Chodzi w istocie o rozstrzygnięcie, czy informacja o tym, jaka jest widoczna strona krążka, wpływa na prawdopodobieństwo że strona, na której krążek leży, jest takiego lub innego koloru.

Wydaje się, że takiej strategii nie ma. Z pewnych symetrii (tyle samo ścianek białych co i czarnych, równe szanse każdego krążka przy losowaniu, równe szanse każdej ze stron przy losowaniu tej, która stanie się stroną widoczną) zdaje się wynikać, iż — niezależnie od koloru widocznej strony leżącego krążka — zdarzenia:

$$B = \{\text{krążek leży na stronie białej}\} \text{ i } C = \{\text{krążek leży na stronie czarnej}\}$$

są jednakowo prawdopodobne, a więc, że gra nie jest strategiczno-losowa.

Grę można wykorzystać do ilustracji procesu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka ([18]). Optymalną decyzję można wyłaniać na drodze statystycznej. Organizacja refleksji *a posteriori* staje się uzasadnianiem na gruncie matematyki wiarygodności tej drogi. Grający stawia niejako na kolor niewidocznej strony krążka. Rozważmy decyzje:

$d_+$ : stawiam na ten kolor, jaki ma widoczna strona krążka,

$d_-$ : stawiam na kolor przeciwny,

$d_0$ : stawiam na kolor wybrany „na chybił trafił”.

Zbiór  $\mathcal{D} = \{d_+, d_-, d_0\}$  jest tzw. *zbiorem dopuszczalnych decyzji*. Problem dotyczy rozstrzygnięcia, czy wśród decyzji  $d_+$ ,  $d_-$  i  $d_0$  jest decyzja optymalna. Wspomniane symetrie sugerują negatywną odpowiedź na takie pytanie.

Odwołajmy się do danych statystycznych. Powtórzmy losowanie krążka i jego strony<sup>3</sup> wiele razy. Załóżmy, że w grze biorą udział gracze:  $G_+$ ,  $G_-$  i  $G_0$ . Gracz  $G_+$  stale obstawia ten kolor, jaki ma widoczna strona leżącego krążka, gracz  $G_-$  stale obstawia kolor „przeciwny” do koloru widocznej strony krążka,

<sup>3</sup>wylosowana strona to widoczna strona leżącego na stole krążka

gracz  $G_0$  przed podjęciem decyzji rzuca monetą i gdy wypadnie orzeł stawia na kolor biały, gdy reszka — to na kolor czarny.

Rejestrujemy, jak często zdobywa punkt każdy z graczy. Kolumny tabeli odpowiadają kolejnym losowaniom krążka. Po każdym losowaniu postawmy znak „+” w wierszu odpowiadającym decyzji, przy której gracz zdobył punkt.

$d_+$	+			+	+				+	+	+			+	+	+	+	+			+	+	+			+	+	
$d_-$		+	+			+	+							+							+						+	
$d_0$	+			+	+	+			+		+			+	+	+					+	+	+			+	+	

Dane statystyczne ujawniają ciekawy fakt. Gracz  $G_0$  zdobył punkt w około połowie gier. Gracz  $G_+$ , który typuje zgodnie z decyzją  $d_+$ , zdobywał punkt prawie dwa razy częściej niż gracz  $G_-$ , który typuje zgodnie z decyzją  $d_-$ . Istotne różnice w tych częstościach dają podstawy do zakwestionowania wniosku, jaki podsuwała nam intuicja.

Pytanie, jak ten fakt uzasadnić, dotyczy organizacji *refleksji a posteriori*, a więc sformułowania i rozwiązania pewnego zadania matematycznego. Oto trzy propozycje organizacji tej refleksji *a posteriori*. Każda wnosi do kształcenia stochastycznego inne treści.

1° Gracz stawiający na kolor widocznej strony (decyzja  $d_+$ ) zdobędzie punkt, ilekroć wylosowany krążek będzie z obu stron tego samego koloru. Punkt zdobędzie gracz stawiający na kolor „przeciwny” ilekroć wylosowany krążek będzie „różnokolorowy”. Z trzech krążków dwa są „jednokolorowe” i jeden „różnokolorowy”, a więc prawdopodobieństwo zdobycia punktu przy decyzji  $d_+$ , jest równe  $\frac{2}{3}$ , prawdopodobieństwo zdobycia punktu przy decyzji  $d_-$  jest równe  $\frac{1}{3}$ .

2° W decyzjach graczy  $G_+$  i  $G_-$  jest uwzględniana informacja o kolorze widocznej strony leżącego krążka. Gracz  $G_0$  nie uwzględnia w swej decyzji tej informacji. To tak, jakby uznał, że owa informacja nie ma wpływu na prawdopodobieństwo takiego lub innego koloru niewidocznej strony krążka.

Weźmy pod uwagę zdarzenia:

$$B_w = \{\text{widoczna strona krążka jest biała}\},$$

$$C_w = \{\text{widoczna strona krążka jest czarna}\}.$$

Decyzja  $d_0$  oparta jest niejako na sądzie, że:

$$P(C|C_w) = P(C|B_w) = P(C) = \frac{1}{2} \quad P(B|C_w) = P(B|B_w) = P(B) = \frac{1}{2}$$



W wyjaśnianiu, dlaczego gracz  $G_+$  zdobywał punkt prawie dwa razy częściej niż gracz  $G_-$ , można brać pod uwagę te prawdopodobieństwa warunkowe, wykazując, że:

$$P(C|C_w) = P(B|B_w) = \frac{2}{3} \text{ oraz } P(C|B_w) = P(B|C_w) = \frac{1}{3},$$

a więc, że informacja o tym, jaki jest kolor widocznej strony krążka wpływa na szanse poszczególnych kolorów strony niewidocznej. Zdarzenia  $C$  i  $C_w$ ,  $C$  i  $B_w$ ,  $B$  i  $B_w$  oraz  $B$  i  $C_w$  nie są, jak się wydawało, stochastycznie niezależne.

3<sup>o</sup> W uzasadnieniu na gruncie matematyki odkrytych faktów empirycznych (przy decyzji  $d_+$  zdobywa się punkt dwa razy częściej niż przy decyzji  $d_-$ , przy decyzji  $d_0$  punkt uzyskuje się w prawie połowie dużej liczby gier) odwołajmy się do *stochastycznego modelu procesu podejmowania decyzji* ([18], [16]). Chodzi o określenie dla każdej decyzji oczekiwanej korzyści. Decyzją optymalną jest ta, której odpowiada maksymalna średnia korzyść (*zasada maksymalizacji spodziewanych korzyści*, por. [18], str. 18). W tym celu należy ustalić *zbiór stanów świata zewnętrznego*. Korzyść odpowiadająca danej decyzji jest funkcją określoną na zbiorze tych stanów. Te są wynikami pewnego doświadczenia losowego, zatem owa funkcja korzyści jest zmienną losową.

W przypadku decyzji  $d_+$  i  $d_-$  doświadczeniem losowym (którego wyniki są *stanami świata zewnętrznego*) jest losowanie krążka, a następnie losowanie jednej z dwu jego stron (czyli jakby rzut tym krążkiem). Oznaczajmy krążki:

- z obu stron biały przez bb,
- z obu stron czarny przez cc,
- z jednej strony biały z jednej czarny przez bc.

Wynik doświadczenia losowego przebiegającego etapami kodujemy ciągiem wyników kolejnych etapów. Para (bc,c) oznacza wynik: wylosowany krążek jest biało-czarny i widoczna jego strona jest czarna. Jeśli gracz podejmie decyzję  $d_+$  i następnie wynikiem tego doświadczenia będzie (bc,c), to gracz nie uzyska punktu. Powiemy, że decyzji  $d_+$  i stanowi świata zewnętrznego (bc,c) odpowiada *korzyść* równa 0.

Niech  $W_+$  ( $W_-$ ) oznacza *korzyść* odpowiadającą decyzji  $d_+$  ( $d_-$ ).

Poniższa tabela prezentuje tzw. *stochastyczny model procesu decyzyjnego* dla decyzji  $d_+$  i  $d_-$ .

$p(\omega) \rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
$d_j \downarrow \omega \rightarrow$	(bb,b)	(bc,b)	(bc,c)	(cc,c)	$\downarrow E(W_j)$
$d_+$	1	0	0	1	$E(W_+) = \frac{2}{3}$
$d_-$	0	1	1	0	$E(W_-) = \frac{1}{3}$

W przypadku decyzji  $d_0$  oprócz losowania krążka i jego strony wchodzi jeszcze w rachubę losowanie obstawianego koloru. Przyjeliśmy, że rozstrzyga to rzut monetą (jeśli wypadnie orzeł, to stawiam na kolor biały, jeśli reszka — to na kolor czarny). Zbiór stanów i rozkład prawdopodobieństwa na tym zbiorze zależą od decyzji. Dla tej decyzji tabela ma postać:

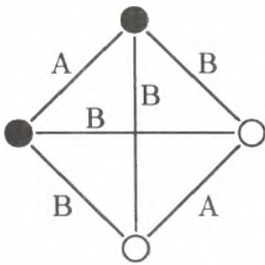
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
$\omega$	(bb,b,o)	(bb,b,r)	(bc,b,o)	(bc,b,r)	(bc,c,o)	(bc,c,r)	(cc,c,o)	(cc,c,r)	$\downarrow E(W_0)$
$d_0$	1	0	0	1	1	0	0	1	$E(W_0) = \frac{1}{2}$

Średnie korzyści są maksymalne przy decyzji  $d_+$ . Ta decyzja jest więc optymalna. Z dwu pozostałych decyzji  $d_-$  i  $d_0$  lepszą jest decyzja  $d_0$ . Decyzja  $d_-$  jest najgorsza.

### 3. Graf stochastyczny jako środek organizacji refleksji a posteriori

Oznaczajmy przez  $U_{b*c}$  urnę, w której jest  $b$  kul białych i  $c$  czarnych. Rozważmy prostą grę. Z urny  $U_{2*1}$  losowane są równocześnie dwie kule. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru (zdarzenie  $A$ ) to zwycięża gracz  $G_A$ , jeśli kule są różnych kolorów (zdarzenie  $B$ ), to zwycięża gracz  $G_B$ . Łatwo wykazać, że gra nie jest sprawiedliwa ( $P(A) = \frac{1}{3}$  i  $P(B) = \frac{2}{3}$ ). Na pytanie, jaką kulę dołożyć do urny, białą, czy czarną, aby gra stała się sprawiedliwą, zawsze *na zajęciach* pada odpowiedź, że czarną. Symetrie (tyle samo kul czarnych co białych) zdają się czynić zdarzenia  $A$  i  $B$  jednakowo prawdopodobnymi (por. [16], str. 298-301). Można tu mówić o (sugerowanej przez intuicję) hipotezie  $H$ , że przy równych ilościach kul białych i czarnych wspomniana gra jest sprawiedliwa. Poddajmy tę hipotezę weryfikacji metodami statystycznymi. Powtórzmy wiele razy losowanie dwu kul z urny  $U_{2*2}$ , rejestrując za każdym razem, które ze zdarzeń,  $A$  czy  $B$ , zachodzi. Dane statystyczne skłaniają do zadumy. Zdarzenie  $B$  zachodzi bowiem prawie dwa razy częściej niż zdarzenie  $A$ , co daje podstawy do zakwestionowania hipotezy  $H$ . "Asymetrie" w rozkładzie liczby powtórzonych losowań pomiędzy zdarzenia  $A$  i  $B$  inspirują pytania: Dlaczego tak się stało? Jak to wytłumaczyć na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Z rysunku 1, który prezentuje klasyczną przestrzeń probabilistyczną (jako model probabilistyczny dla losowania dwu kul z urny  $U_{2*2}$ ) oraz zdarzenia  $A$  i  $B$  w tej przestrzeni, wynika że  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  i  $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . Wielkości tych prawdopodobieństw tłumaczą, dlaczego zdarzenie  $B$  zachodziło dwa razy czę-



rys. 1.

ściej niż zdarzenie  $A$ . Rysunek jest w tej organizacji refleksji *a posteriori* wygodnym środkiem matematyzacji i argumentacji.

Niech  $u$  będzie prawdopodobieństwem sukcesu w próbie Bernoullego ( $0 < u < 1$ ). Dwaj gracze  $G_A$  i  $G_B$  powtarzają na przemian tę próbę tak długo, aż zakończy się ona sukcesem i zwycięża ten, kto ten sukces uzyska.

1° Czy można dobrać  $u$ , przy którym opisana gra jest sprawiedliwa? Wydaje się, że przy  $u = \frac{1}{2}$  szanse graczy są równe. Czy jest tak rzeczywiście? Jak tę hipotezę zweryfikować na podstawie danych statystycznych?

2° Gracze rzucają na przemian monetą a zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę. Jeden z graczy rozpoczyna grę. Czy to pierwszeństwo wpływa na jego szanse zwycięstwa? Którym z graczy chciałbyś być w tej grze?

Tradycyjna reakcja na powyższe (nietradycyjne) problemy — to rachunki, a więc obliczanie odpowiednich prawdopodobieństw (w modelu probabilistycznym oczekiwania na pierwszy sukces) i formułowanie następnie odpowiedzi (faza interpretacji).

Odwróćmy nieco tę kolejność. Atakowanie problemu 2° rozpocznijmy od odwołania się do rzeczywistości. Chodzić tu więc będzie o opartą na danych statystycznych weryfikację hipotezy, o której mowa w 1°. Powtarzajmy oczekiwania na wypadnięcie reszki (sukces) wiele razy, rejestrując za każdym razem, kto z graczy zwyciężył.

W klasie te dane można zbierać, bądź rzucając konkretną monetą, bądź symulując ten rzut za pomocą tablic liczb losowych. Oto próbka uzyskana w drodze symulacji opartej na liczbach losowych (cyfry parzyste interpretowano jako „orka”, cyfry nieparzyste — jako „reszkę”, cyfry czytano od początku tablicy 2 w [16], str. 228):

r-or-r-r-oor-oor-or-r-r-r-oooo-or-r-r-r-oooooooo-or-or- or-r-r-r-r-oor-r-or-  
or-r-or-or-r-r-r-r-r-or-or-r-oooo-r-r-r-r-r-r-or-r-oooo-r-r- or-r-r-oooo-r-r-  
r-r-oor-or-r-oor-r-r-r-oor-r-r-r-oor-r-r-or-r-oor-r-r-or-or-or- or-or-oooo-r-  
r-or-or-r-oooo-oooo-or-r-oor-r-r-or-r-or-or.

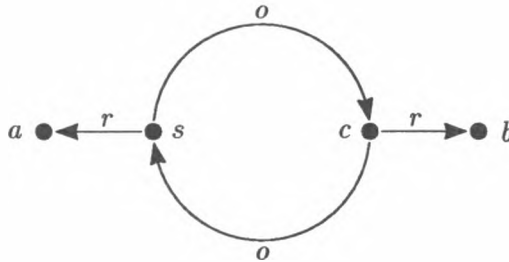
W stu wykonanych grach gracz, który miał pierwszeństwo, zwyciężył aż 71 razy, jego przeciwnik tylko 29 razy. Dane empiryczne dają podstawy do zakwestionowania pewnej hipotezy, a równocześnie inspirują matematyczne myślenie. Kreują bowiem próby wyjaśnienia (i to na gruncie matematyki) dlaczego prawie dwa razy częściej zwycięża gracz mający prawo pierwszeństwa. Zadanie matematyczne (oblicz prawdopodobieństwo...) zostaje tu zainspiro-

wane ciekawym faktem odkrytym w próbcie i chęcią jego wytłumaczenia na gruncie matematyki. I o taką aktywizującą matematycznie funkcję danych empirycznych chodzi w tych rozważaniach.

Graf z rys. 2 jest jakby planszą do opisaney gry. Na początku postawmy pionek w węźle startowym  $s$ . Po kolejnym rzucie monetą przemieszczamy ów pionek wzdłuż krawędzi odpowiadającej uzyskanemu wynikowi rzutu. Dostarcie pionka w trakcie takiego symulowania przebiegu gry do węzła  $a$  jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza, który miał pierwszeństwo. Jeśli przez  $x$  oznaczyć prawdopodobieństwo, że zwycięży ów gracz, to z grafu wynika równanie:

$$x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x$$

a zatem  $x = \frac{2}{3}$  (formalnie wzór ten wynika z tzw. *reguły pochłaniania* dla grafów z niepustym brzegiem (por. [4] i [16], str. 164). Ten rezultat rachunków tłumaczy, dlaczego gracz, który miał prawo do pierwszego rzutu, zwyciężał prawie dwa razy częściej niż jego przeciwnik. W opisaney sytuacji graf stochastyczny jest narzędziem nie tylko rachunków, ale czegoś szerszego, a mianowicie organizacji refleksji *a posteriori*.



rys. 2. graf stochastyczny jako plansza do gry z udziałem dwu graczy, którzy rzucając na przemian monetą czekają na reszkę

Analogiczne problemy kreuje gra, w której trzej gracze rzucają w ustalonej kolejności monetą dopóty, dopóki nie wypadnie reszka, a zwycięża ten, kto tę reszkę wyrzuci. Chodzi o ocenę szans każdego z graczy opartą na danych statystycznych, a przede wszystkim o refleksję *a posteriori* kreowaną przez te dane, w tym także o środki jej organizacji (graf stochastyczny jako szczególne narzędzie argumentacji i rozumowania). Do oceny tych szans można wykorzystać te same dane statystyczne, które były podstawą do oceny szans w przypadku gry z udziałem dwu graczy.

Dane statystyczne inspirują kolejną refleksję *a* dotyczącą czasu trwania każdej z tych gier, wymierzanego liczbą rzutów monetą wykonanych w grze. Rodzą się kolejne pytania: — Dlaczego potrzeba tak niewielu rzutów monetą,

aby zwycięzca został wyłoniony? Dlaczego każda z gier kończy się tak szybko? Dlaczego średni czas trwania każdej z dwu opisanych wyżej gier jest prawie identyczny (chodzi tu o średnie arytmetyczne czasów trwania każdej z tych gier w dużej liczbie ich powtórzeń, a więc o wartości statystyk średnia z próbki).

Czas trwania każdej z powyższych gier jest w istocie czasem oczekiwania na wypadnięcie reszki. Ostatnie pytanie dotyczy wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $T$ , która każdemu wynikowi oczekiwania na wypadnięcie reszki przypisuje liczbę wykonanych rzutów. Jest  $E(T) = 2$ , co wyjaśnia, dlaczego każda z gier kończyła się tak stosunkowo szybko.

#### 4. Gry Penneya. Zaskakujące własności pewnej relacji — paradoks zasugerowany przez próbkę

Każdy wynik  $k$ -krotnego rzutu monetą jest  $k$ -wyrazową wariacją zbioru  $\{o, r\}$ . Ten wynik jest pewną serią orłów i reszek. Spośród  $2^k$  możliwych wyników  $k$ -krotnego rzutu monetą dwaj gracze wybierają sobie po jednym. Rzut monetą powtarzany jest aż do uzyskania serii wybranej przez graczy. Zwycięża gracz, którego seria pojawi się wcześniej. Tego typu gry zaproponował w r. 1969 Walter Penney ([9], str. 452). Nazywamy je *gami Penneya*.

Na pytanie, co sądzisz o szansach każdego z graczy w grze Penneya, pada na ogół odpowiedź, że gra jest sprawiedliwa. Zdają się za tym przemawiać równe prawdopodobieństwa uzyskania każdej z możliwych serii w  $k$ -krotnym rzucie monetą.

Weźmy  $k=3$ . Mamy 8 jednakowo prawdopodobnych wyników trzykrotnego rzutu monetą:  $ooo, oor, oro, orr, roo, ror, rro, rrr$ . W grze uczestniczy dwu graczy  $G_A$  i  $G_B$ , każdy wybiera sobie jeden z tych wyników (każdy inny wynik). Rzut monetą jest następnie powtarzany tak długo, aż trzy ostatnie rzuty dadzą któryś z wybranych wyników. Zwycięża gracz, którego wynikiem zakończą się trzy ostatnie rzuty. Załóżmy, że graczowi  $G_A$  zaproponowano pierwszeństwo przy wyborze wyniku. Czy powinien on z niego skorzystać?

Niezależnie od tego jakie wyniki wybiorą gracze, ich szanse w grze wydają się równe. W sposób prawie oczywisty zdaje się to wynikać z faktu, iż wyniki rozstrzygające kto zwycięża są jednakowo prawdopodobne. Taki wniosek podsuwa nam intuicja.

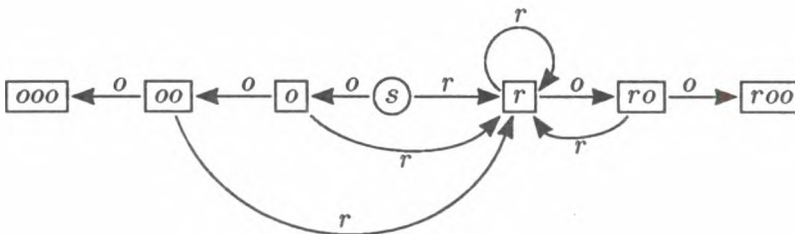
Założmy, że gracz  $G_A$  wybrał wynik  $ooo$ , gracz zaś  $G_B$  — wynik  $roo$ . Wniosek, że gra jest sprawiedliwa, jest pewną hipotezą. W celu jej zweryfikowania odwołajmy się do danych statystycznych. Można je w klasie szybko zebrać w dwuosobowych zespołach (każdy zespół powtarza grę np. 10 razy). Zgromadźmy te dane symulując rzut monetą za pomocą liczb losowych. Czytajmy cyfry znów od początku tablicy 2 z [16] (str. 228). Mamy zatem następującą



próbkę:

rorrrroo-roo-ororrrrrroo-oororrrrrroo-ooo-ooo-rrororrrrrroo-  
 rrororrororrrrrrororrorroo-oorrrrrrrrororroo-oorrrrorrrroo-oorrrrrroo-rorrrroo-  
 rrrroo-rrroo-orrrrorrrroo-orrrrororororororroo-oorrrrororrrroo-oroo-ororrrroo-  
 rrrrorrrrorororroo-ooroo-rorrrrorroo-oorrrroo-rororrrroo-rrroo-oroo-roo-  
 rrrrorrororororororrorroo-rorororrrrrrororroo-rorooo-rooo-ooo-rrorrrroo-rrroo-orrorroo-  
 orrrrorroo-roo-rrrrroo-rroroo-ororrororororrorroo-oorroo-rrorrrroo-

Grę powtórzono 42 razy. Gracz  $G_A$  zwyciężył tylko 3 razy. Ta różnica w częstościach zwycięstw obu graczy wydaje się na tyle istotna, że pozwala zakwestionować hipotezę o sprawiedliwości gry. Ale dane statystyczne skłaniają do refleksji nad tym, dlaczego gracz  $G_A$  zwyciężał tak rzadko, gracz zaś  $G_B$  tak często. Jak wytłumaczyć to na gruncie rachunku prawdopodobieństwa? Środkiem matematyzacji i argumentacji, a więc organizacji *refleksji a posteriori*, może być w opisanej sytuacji graf stochastyczny z rysunku 3.



rys. 3. graf stochastyczny jako plansza do gry *trzy orły pod rząd, albo dwa po reszce*

Symulujmy przebieg gry błędzeniem losowym pionka po grafie z rys. 3. Zwycięstwo gracza  $G_B$  jest równoznaczne z dotarciem do węzła  $roo$  pionka błądzącego po grafie i startującego z węzła startowego  $s$ . Ten graf, jako planszę do opisanej gry, można zredukować. Wystarczy zauważyć, że ilekroć pionek trafi do węzła  $r$  zwycięstwo gracza  $G_B$  jest już przesądzone. Z tego węzła droga do mety  $ooo$  jest zamknięta (a więc zwycięstwo gracza  $G_A$  nie jest już możliwe). Prawdopodobieństwo, że zwycięży  $G_B$  jest równe prawdopodobieństwu dotarcia z węzła startowego  $s$  do węzła  $r$ , a więc wynosi:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ , tj.  $\frac{7}{8}$ . Jest to zarazem wyjaśnienie, dlaczego jeden z graczy zwyciężał tak często, drugi tak rzadko.

Fakt, że ilekroć wypadnie, reszka rezultat gry jest już przesądzony, niektórzy studenci odkrywają w trakcie zbierania danych statystycznych. Ta skonstatowana prawidłowość empiryczna także kreuje matematyczne myślenie. Już w trakcie gromadzenia danych pojawia się zatem argumentacja (... żeby po wyrzuceniu reszki mógł zwyciężyć gracz  $G_A$  trzeba aby trzy razy pod rząd wypadł orzeł, ale gdy wypadnie drugi raz orzeł to już są dwa po reszce, co oznacza zwycięstwo gracza  $G_B$ ; zwycięstwo gracza



$G_A$  po wyrzuceniu reszki nie jest zatem możliwe.)

Wynik *roo* można uważać za „lepszy” od wyniku *ooo*. Wydaje się zatem, że wśród ośmiu wyników trzykrotnego rzutu monetą da się wyłonić wynik najlepszy, a ściślej wynik nie gorszy od każdego innego. O wynikającym stąd paradoksie mowa jest szerzej w [15] (str. 218-223, por. także [7]).

Z symetrii grafu stochastycznego wynika, że gra jest sprawiedliwa, gdy gracze wybiorą wyniki *oro* i *roo*. Te wyniki są „jednakowo dobre”.

Zalóżmy, że  $G_A$  wybrał wynik *oor*, gracz  $G_B$  zaś wynik *oro*. Zbierając dane statystyczne odkrywamy, że gracz  $G_A$  zwycięża prawie dwa razy częściej niż  $G_B$ . Dane te sugerują hipotezę, że wynik *oor* jest „lepszy” od wyniku *oro*. Weryfikacja tej hipotezy oparta na grafie stochastycznym jest zarazem organizacją refleksji a posteriori.

Wynik *oor* jest „lepszy” od wyniku *oro* a wynik *oro* jest „równie dobry” jak wynik *roo*. Tu bez wahania każdy odpowiada, że wynik *oor* jest zatem „lepszy” od wyniku *roo*. Przed weryfikacją tego sądu na gruncie matematyki (graf stochastyczny jako środek argumentacji) odwołajmy się znów do danych statystycznych, które także kreuja matematyczne myślenie (organizację refleksji a posteriori), ujawniają bowiem zaskakujący fakt: gracz, któremu odpowiada wynik *roo* zwycięża prawie dwa razy częściej niż jego przeciwnik, któremu odpowiada wynik *oor* (są podstawy, aby twierdzić, iż wynik *roo* jest „lepszy” niż wynik *oor*). Relacja „być lepszym” nie jest więc przechodnia. Tę osobliwą własność relacji można odkrywać także na drodze statystycznej.

Kolejne zagadnienie, jakie inspirują ostatnie rozważania, to wyjaśnianie powodów odkrytego paradoksu. Środkiem argumentacji jest tu pojęcie przestrzeni probabilistycznej. Dla każdych dwu ustalonych wyników ich „jakościowa ocena” rozstrzygana jest w innej przestrzeni probabilistycznej.

Do gier typu Penneya zalicza się ogólniejszą wersję omawianej gry. Dwaj gracze mogą wybierać różnej długości serie orłów i reszek. Aby zwycięzca mógł być wyłaniany jednoznacznie (por. sytuację graczy, którzy wybrali serie: *oro* i *ro*) i aby gra dawała każdemu z graczy szanse na zwycięstwo (por. serie *ro* i *oror*), jedna z tych serii nie może „zawierać się” w drugiej. Zaskakujące własności serii różnej długości w kontekście tego typu gry Penneya (chodzi o relację „być lepszym” w zbiorze takich serii) a także paradoksalne fakty związane ze średnimi czasami czekania na każdą z serii oddzielnie i średnim czasem trwania gry Penneya z tymi seriami, można na zajęciach ze studentami odkrywać na drodze statystycznej.

## 5. Dlaczego pewne średnie są tak bardzo do siebie zbliżone?

Z urny  $U_s$  o  $s$  ponumerowanych kulach losujemy  $k$  razy kulę ( $k \leq s$ ). Za wynik losowania gracz zdobywa tyle złotych, ile wynosi suma numerów wylosowanych kul. Przy jakiej opłacie za wejście do takiej gry jest ona sprawiedliwa, gdy: a) kule losujemy bez zwracania, b) kule losujemy ze zwracaniem?

Wygrana gracza w wersji a) jest zmienną losową  $X$ , wygrana w wersji b) — zmienną losową  $Y$ . Pytanie dotyczy wartości oczekiwanych tych zmiennych losowych. Wydaje się, że  $E(X) \neq E(Y)$ , tymczasem można udowodnić, że  $E(X) = E(Y)$ .

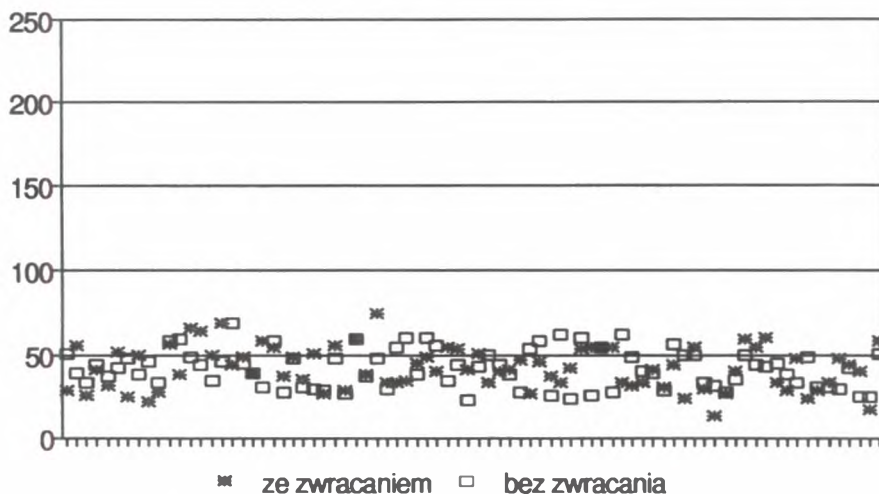
Ostatnia równość jest tezą twierdzenia, które w typowym zadaniu z rachunku prawdopodobieństwa jest już sformułowane i które należy udowodnić. Jest to zaskakująca *a priori* własność dwu przestrzeni probabilistycznych (chodzi o przestrzenie generowane na prostej przez zmienne losowe  $X$  i  $Y$ ). Uczeń szuka narzędzi organizacji *fazy dedukcji*. Aktywności związane są wyłącznie z rachunkami. Zupełnie inny charakter mieć będzie zaskoczenie *a posteriori*. Chodzi o weryfikację sądu, jaki podsuwa intuicja, poprzez odwołanie się najpierw do danych statystycznych i o odkrycie twierdzenia, które we wspomnianym podejściu zostało z góry narzucone.

Najpierw rozważmy niewielkie  $s$  oraz  $k$  i dane zbieramy w klasie poprzez autentyczne losowanie kul. Klasa pełni tu rolę „stochastycznego arytmomometru” szybko opracowując liczną próbkę. Wystarczy, by każdy uczeń 10 razy powtórzył  $k$ -krotne losowanie kuli, aby w krótkim czasie uzyskać w klasie wiarygodne źródło informacji o dwu wspomnianych przestrzeniach probabilistycznych. Próbka ma tu zainspirować matematyczne odkrycie. Jej analiza kończy się sformulowaniem pewnej hipotezy. Niech  $n$  oznacza dalej liczbę powtórzeń  $k$ -krotnego losowania, a więc licznosc próbki. Mamy dwie próbki. Jedna dotyczy wygranej w wielu powtórzeniach gry, gdy kule losowano bez zwracania, druga — gdy kule losowano ze zwracaniem. Średnie arytmetyczne wygranych (tj. wartości statystyk średnia z próbki) oznaczamy odpowiednio przez  $\bar{x}_n$  dla losowania bez zwracania i  $\bar{y}_n$  dla losowania ze zwracaniem.

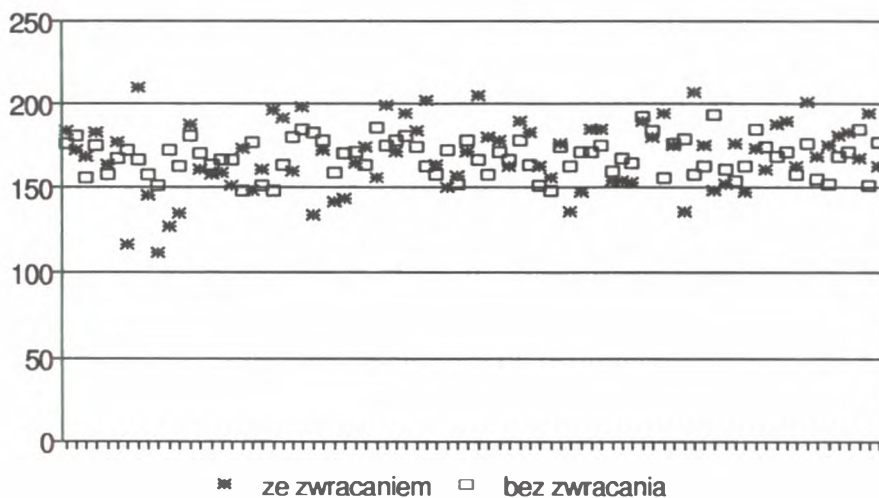
Narzędziem generowania i opracowywania danych statystycznych może być komputer, który pozwala na szybkie wylosowanie licznej próbki, przy różnych parametrach wyjściowych ( $s$  i  $k$ ) oraz na dobór odpowiedniej wizualizacji wartości pewnych statystyk (statystyka średnia z próbki). Ikoniczne prezentacje, o których tu mowa, mają zasugerować równość  $E(X) = E(Y)$ , jako niewątpliwie niespodziewaną własność zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ . W tym sensie zaduma nad empirycznym faktem staje się stadium matematycznego myślenia (także odkrycia). Dane statystyczne sugerują tezę. Zaskoczenie jej postacią dostar-

cza specyficznych motywacji dla aktywności związanych z jej uzasadnieniem na gruncie rachunku prawdopodobieństwa. Są to innej natury aktywności matematyczne niż kreowane zadaniami typu *oblicz...*, *udowodnij...*, *sprawdź...*

Dla  $k=4$ ,  $s=20$  i  $n=80$  próbkę uzyskaną w drodze symulacji komputerowej prezentuje rys. 4 oraz rys. 6a). Mamy tu:  $\bar{x}_{80}=42,2875$  i  $\bar{y}_{80}=42,1$ . Jest natomiast  $E(X) = E(Y) = 42$ .



rys. 4. wyniki 80 powtórzeń czterokrotnego losowania kuli z urny  $U_{20}$



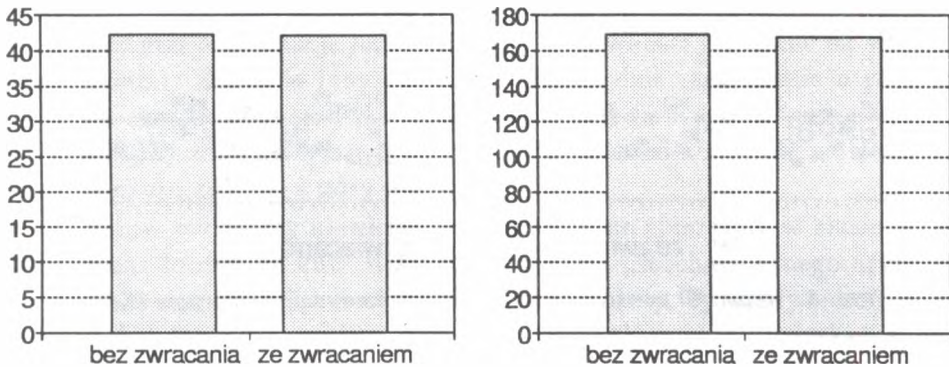
rys. 5. wyniki 80 powtórzeń szesnastokrotnego losowania kuli z urny  $U_{20}$

Dla  $k=16$ ,  $s=20$  i  $n=80$  próbkę uzyskaną za pomocą symulacji komputerowej prezentuje rys. 5 oraz rys. 6b). Jest tu:  $\bar{x}_{80}=168,725$  i  $\bar{y}_{80}=168,5625$ , natomiast  $E(X) = E(Y) = 168$ .

W obu próbkach średnie są bardzo zbliżone, co dobrze oddaje rys. 6 prezentujący średnie arytmetyczne wygranych w  $n$  powtórzeniach gry przy losowaniu bez i przy losowaniu ze zwracaniem, rys. 6a odpowiada sytuacji, gdy:  $n=80$ ,  $s=20$  i  $k=4$ , rys. 6b odpowiada sytuacji, gdy:  $n=80$ ,  $s=20$  i  $k=16$ .

Próbka sugeruje twierdzenie, że w przypadku omawianych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  jest  $E(X) = E(Y)$ .

Prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa przyjmuje wartość  $c$  interpretujemy jako masę skupioną na osi liczbowej w punkcie  $c$ . Rozkład zmiennej losowej jest w tej interpretacji rozkładem jednostkowej masy na osi liczbowej, wartość oczekiwana zaś jest środkiem ciężkości tego układu mas.



rys. 6.

Środkiem uzasadnienia odkrytej tezy może być fakt, że w obu schematach losowania (bez i ze zwracaniem) rozkład sumy numerów wylosowanych kul ma „środek symetrii”, a ten jest środkiem ciężkości, a więc wartością oczekiwaną. W obu przypadkach wartość oczekiwana zmiennej losowej jest więc średnią arytmetyczną najmniejszej i największej wartości zmiennej losowej. Te wartości łatwo znaleźć, by wykazać, że  $E(X) = E(Y) = \frac{k(s+1)}{2}$ .

Załóżmy, że w urnie  $U_{b \times c}$  jest  $b$  kul białych i  $c$  czarnych. Niech  $b + c = s$ . Niech  $k$  będzie liczbą naturalną mniejszą od  $s$ .

1° Z urny  $U_{b \times c}$  losujemy  $k$  razy bez zwracania kulę.  $X$  jest liczbą wylosowanych kul czarnych.

2° Z urny  $U_{b \times c}$  losujemy  $k$  razy ze zwracaniem kulę.  $Y$  jest liczbą etapów, na których wylosowana kula jest czarna.

Fakt, że  $E(X) = E(Y)$ , może być — podobnie, jak w przypadku gdy w urnie są ponumerowane kule — przedmiotem matematycznego odkrycia

zainspirowanego danymi statystycznymi.

## 6. Estymacja średniej liczby skojarzeń a organizacja refleksji a posteriori inspirująca matematyczne odkrycie

Z urny o  $s$  ponumerowanych kulach losowana jest kula  $s$  razy bez zwracania. Mówmy o skojarzeniu, ilekroć numer kuli zgadza się z numerem etapu, na którym została ona wylosowana. Liczba skojarzeń jest zmienną losową  $W_s$ . Jej wartość oczekiwana nie zależy od  $s$  i jest równa 1. Ten bez wątpienia interesujący fakt można uczynić na lekcji przedmiotem matematycznego odkrycia zainicjowanej organizacją refleksji a posteriori.

Rozważmy grę, w której rozkłada się w rzędzie  $s$  różnych, uprzednio potasowanych, kart. Wynik rozkładania jest permutacją ich zbioru. Zanim nastąpi to doświadczenie gracz stawia na jego wyniki, a więc typuje, która karta trafi na kolejne miejsce i wygrywa tyle złotych, w ilu przypadkach trafnie przewiździ kartę. Wygrana gracza jest liczbą trafień. Tę zmienną losową oznaczmy przez  $X_s$ . Problem dotyczy wysokości opłaty za wejście do gry, przy której gra jest sprawiedliwa. Zmienne losowe  $X_s$  i  $W_s$  mają identyczne rozkłady.

Rozłóżmy  $s$  różnych kart w rzędzie, a następnie w rzędzie równoległym, po uprzednim potasowaniu, rozłóżmy  $s$  identycznych, jak uprzednie, kart. Mówmy o skojarzeniu, ilekroć naprzeciw w obu rzędach znajdują się identyczne karty. Liczba skojarzeń jest zmienną losową  $Y_s$ , o identycznym rozkładzie jak rozkład zmiennej losowej  $X_s$ , tj. wygranej gracza, który przed rozkładaniem  $s$  kart stawia na jego wynik.

Weźmy najpierw  $s = 3$ . Trzy karty: waleta, damę i króla, rozłóżmy w rzędzie, a następnie trzy takie same karty, po ich potasowaniu, rozłóżmy w rzędzie równoległym. Rozkładanie trzech potasowanych kart w rzędzie naprzeciw trzech uprzednio rozłożonych kart powtarzajmy  $n$  razy i zliczajmy, ile nastąpiło skojarzeń. Przez  $l_n(Y_3=j)$  oznaczmy liczbę doświadczeń, w których nastąpiło  $j$  skojarzeń ( $j=0,1,3$ ). Suma  $0 \cdot l_n(Y_3=0) + 1 \cdot l_n(Y_3=1) + 3 \cdot l_n(Y_3=3)$  jest łączną wygraną w  $n$  grach. Iloraz

$$\frac{0 \cdot l_n(Y_3 = 0) + 1 \cdot l_n(Y_3 = 1) + 3 \cdot l_n(Y_3 = 3)}{n}$$

jest średnią wygraną przypadającą na jedną grę. Jeśli próbka jest dostatecznie liczna, to praktycznie na pewno ta średnia arytmetyczna — jako wartość statystyki średnia z próbki — będzie bliska 1.

Weźmy  $s = 4$ , a więc cztery karty, waleta, damę, króla i asa. Powtarzajmy  $n$  razy rozkładanie kart i rejestrowanie ilości skojarzeń. Przy dostatecznie dużym  $n$  analogiczna średnia arytmetyczna jest także bliska 1.



Rozkładajmy teraz wszystkie karty pikowe z pełnej talii ( $s = 13$ ). Po  $n$  powtórzeniach średnia arytmetyczna liczby skojarzeń znów jest zaskakująco bliska 1.

Teraz zbieranie i opracowywanie danych statystycznych dla większych  $s$  można powierzyć komputerowi.

Dane empiryczne ujawniają ciekawą prawidłowość: przy dużym  $n$ , niezależnie od  $s$ , średnia wygrana gracza przypadająca na jedną grę jest bliska 1. Powstaje tym samym problem wyjaśniania tego faktu na gruncie rachunku prawdopodobieństwa. Chodzi o sformułowanie i dowód twierdzenia, że  $E(W_s) = E(X_s) = E(Y_s) = 1$  dla każdego  $s > 2$ . To probabilistyczne twierdzenie może więc być przedmiotem matematycznego odkrycia.

Dla nauczyciela ważna tu być musi argumentacja co do wiarygodności wspomnianych wniosków (i pewnej niezawodności ocen). Średnia arytmetyczna, o której tu mowa, jest wartością statystyki średnia z próbki (populacją jest tu zbiór wyników rozkładania w rzędzie  $s$  kart, zaś cecha  $Y_s$  przypisuje każdemu wynikowi liczbę skojarzeń). Z prawa wielkich liczb Chinczyna wynika, iż statystyka średnia z próbki jest estymatorem zgodnym wartości średniej cechy. Oznacza to, że przy dostatecznie dużym  $n$ , z prawdopodobieństwem bliskim 1 (a więc praktycznie na pewno) ta średnia i liczba 1 (jako wartość oczekiwana liczby skojarzeń) będą się różnić nieznacznie.

Dotykamy tu relacji ŚWIAT REALNY — ŚWIAT MATEMATYCZNEJ ABSTRAKCYJ. Działalność, którą tu proponujemy (i którą także chcemy zaliczać do aktywności matematycznej), odnosi się do obiektów realnego świata (rzucamy konkretną monetą, plastikową kostką, losujemy tekturowe krążki, wyciągamy „na chybił trafił” konkretne kule z konkretnego woreczka). Wiarygodność ocen, którą opieramy tu na matematycznych twierdzeniach (prawa wielkich liczb, twierdzenia o wartościach oczekiwanych itd) ma ten sam charakter co wiarygodność pomiarów na lekcji geometrii (w narysowanym przez ucznia „rombie” mierzone kątomierzem „kąty” między „przekątnymi” są „proste”, „środkowe boków” narysowanego na tablicy „trójkąta” przecinają się w jednym „punkcie” itd.). Bez takich odniesień do rzeczywistości trudno wyobrazić sobie nauczanie geometrii. Odwoływanie się do rzeczywistości w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa budzi spore kontrowersje. W proponowanych w pracy problemach konkretna czynność otwiera (podobnie jak w geometrii) proces interioryzacji tj. przejścia od działań efektywnych w materialnym świecie do działań pomyślanych, wyobrażeniowych. Działalność organizowana jest na konkretnych obiektach fizycznych, ale jej celem jest ujawnianie pewnego związku matematycznego modelu z rzeczywistością, dla której ten model jest tworzony. Informacje o pewnych cechach przestrzeni probabilistycznej są tu wydobywane z danych empirycznych.

Proponowane procedury, gdy chodzi o ich naturę i rolę w matematycznej aktywizacji, można porównać z konstrukcjami i pomiarami w nauczaniu geometrii. Te procedury są typowe przy stosowaniu metod Monte Carlo. W tym sensie rola proponowanej formy i treści problemów wiąże się z ukazywaniem pewnych idei statystycznych, w tym także idei Monte Carlo. Idee te pojawiają się tu nie tyle w kontekście estymacji, ile prowokowania zadumy i matematycznego myślenia.



## 7. Stabliwość rozkładów stanów dla schematu Ehrenfestów i kolejne środki organizacji refleksji a posteriori

W urnie jest  $b$  kul białych i  $c$  czarnych. Załóżmy, że  $b + c = r$  i że  $r$  jest liczbą parzystą. To stan początkowy urny. W kolejnych jednostkach czasu (to jedynie umowa) losujemy kulę z urny. Jeśli jest ona biała (czarna), to odkładamy ją na bok, do urny zaś wkładamy kulę czarną (białą). Nazywamy tę procedurę próbą. Liczbę czarnych kul w urnie po  $n$ -tej próbie nazywamy *stanem urny w chwili  $n$* . Powtarzamy próbę bardzo wiele razy, obserwując stan urny po kolejnej próbie. Rozważmy następujące przypadki stanu początkowego:

$$1^\circ b = r \text{ i } c = 0,$$

$$2^\circ b = 0 \text{ i } c = r,$$

$$3^\circ b = c = \frac{r}{2},$$

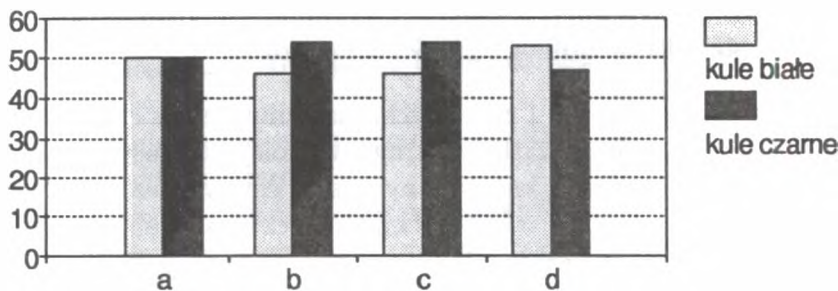
4° Zanim zapełnimy urnę kulami rzucamy  $r$  monet i następnie do urny wkładamy tyle kul białych, na ilu monetach wypadł orzeł oraz tyle czarnych, na ilu monetach wypadła reszka. Mowa tu zatem o etapie wstępnym, na którym zawartość (stan) urny zostaje ustalona losowo. Liczby czarnych i białych kul w urnie określają jej stan.

Opisany schemat, zwany *schematem Ehrenfestów*, jest modelem przepływu temperatury między dwoma ciałami (liczba czarnych kul określa temperaturę jednego z tych ciał, liczba kul białych temperaturę drugiego, por. [10], str. 65).

Weźmy 30 kul białych i 30 czarnych. Włóżmy do woreczka wszystkie kule białe, czarne włóżmy do pudełka. Losujemy kulę z woreczka, wylosowaną kulę włóżmy do pudełka, a z pudełka do woreczka przełożmy kulę przeciwnego koloru. Powtarzamy taką próbę wiele razy. Po kilkudziesięciu powtórzeniach woreczek a także pudełko są jakby w „stanie równowagi”, w każdym jest prawie tyle samo kul białych co i czarnych. Rodzi się pytanie: Jak ten fakt wytłumaczyć na gruncie matematyki?

Wyjdźmy od innego stanu początkowego woreczka. Włóżmy doń  $c$  kul czarnych i  $30 - c$  białych, gdzie  $c=0,1,2,\dots,30$ . W klasie różne zespoły robią to przy różnych stanach początkowych. Po wielu próbach w każdym zespole stan woreczka jest prawie identyczny (jest w nim prawie tyle samo kul białych co i czarnych).

Weźmy  $r = 100$  i powtarzamy bardzo wiele opisany schemat, obserwując zmiany stanu urny po kolejnych próbach. Wykorzystajmy komputer do gromadzenia i opracowywania danych statystycznych. Stan urny po  $n = 1000$  próbach symulowanych za pomocą komputera (dla czterech różnych stanów początkowych) prezentuje rys. 7.



rys. 7. stan urny po 1000 próbach przy różnych stanach początkowych

Dla stanu początkowego  $b = 100, c = 0$  stan końcowy po 1000 próbach prezentuje rys. 7a, jest  $b = c = 50$ . Dla stanu początkowego  $b = 0, c = 100$  stan końcowy przedstawia rys. 7b, jest  $b = 46$  i  $c = 54$ . Dla stanu początkowego  $b = c = 50$  stan końcowy prezentuje rys. 7c, jest  $b = 46$  i  $c = 54$ . Rys. 7d przedstawia stan końcowy ( $b = 53$  i  $c = 47$ ) gdy stan początkowy ustalono tak, jak w punkcie 4°.

Liczbę kul czarnych w urnie po  $n$ -tej próbie nazywamy *stanem urny w chwili  $n$* . Niezależnie od stanu początkowego urny, wraz ze wzrostem liczby prób stan urny stabilizuje się, skupia się wokół jakby stanu równowagi (blisko połowa kul jest białych i połowa czarnych). Pojawia się pytanie, jak ten zaskakujący fakt empiryczny uzasadnić na gruncie matematyki.

Możliwe stany urny tworzą zbiór  $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ . Przez  $p_{j,k}$  oznaczmy prawdopodobieństwo, że jeśli w danej chwili jest w urnie  $j$  kul czarnych, to w chwili następczej będzie ich tam  $k$ . Nietrudno zauważyć, że

$$p_{j,j-1} = \frac{j}{r}, \quad p_{j,j+1} = \frac{r-j}{r}, \quad p_{j,k} = 0 \text{ dla pozostałych } j, k.$$

Prawdopodobieństwa te tworzą macierz  $Q = [p_{j,k}]$ .

Przebieg zmian stanu urny po kolejnych próbach można rejestrować (symulować) błędzeniem losowym pionka po punktach  $0, 1, 2, \dots, r$  na osi liczbowej (pionek jest po danej próbie w punkcie  $j$  jeśli po tej próbie w urnie jest  $j$  kul czarnych). Mowa tu tym samym o pewnym grafie stochastycznym. Odnieśmy powyższe prawdopodobieństwa do tego grafu.

- Jeżeli  $j < \frac{r}{2}$  (kul czarnych jest mniej niż białych), to  $p_{j,j-1} < \frac{1}{2}$  oraz  $p_{j,j+1} > \frac{1}{2}$ . Im bliższe zera jest  $j$  tym  $p_{j,j-1}$  jest mniejsze,  $p_{j,j+1}$  zaś większe. Oznacza to, że gdy pionek znajduje się na lewo od  $\frac{r}{2}$ , to z większym prawdopodobieństwem przesunie się w prawo niż w lewo. Gdy w urnie jest mniej kul czarnych niż białych, to jest bardziej prawdopodobne iż liczba kul czarnych w następczej próbie wzrośnie, niż że zmaleje.

- Jeśli  $j > \frac{r}{2}$ , to  $p_{j,j-1} > \frac{1}{2}$  i  $p_{j,j+1} < \frac{1}{2}$ . Im  $j$  jest bliższe  $r$  tym  $p_{j,j+1}$  jest mniejsze,  $p_{j,j-1}$  zaś większe. Oznacza to, że gdy w urnie jest więcej czarnych kul niż białych, to jest bardziej prawdopodobne, że w następnej próbie liczba kul czarnych zmaleje, niż że wzrośnie. Ta interpretacja wyjaśnia tendencję do wyrównywania się frakcji poszczególnych kul w urnie wraz ze wzrostem liczby prób.

Na zajęciach ze studentami ten dostrzeżony fakt wyjaśniamy na gruncie teorii łańcuchów Markowa. Nietrudno sprawdzić, że rozkład, o którym mowa w punkcie d), jest rozkładem stacjonarnym. Niezależnie więc od rozkładu początkowego, rozkład stanów w chwili  $n$  zdąży (gdy  $n$  rośnie) do rozkładu stacjonarnego (por. [6], str. 331), a w jego przypadku najbardziej prawdopodobna liczba kul czarnych jest równa  $\frac{r}{2}$ .

## 8. Godne refleksji zachowanie się wraz z upływem czasu rozkładów stanów w innych schematach urnowych

Weźmy znów urnę  $U_{b+c}$  z  $b$  białymi i  $c$  czarnymi kulami na początku. Niech  $b + c = r$  i załóżmy, że  $r$  jest liczbą parzystą. Liczbę  $c$  nazywajmy *stanem początkowym urny*. W kolejnych jednostkach czasu losujemy kulę i jeśli jest ona biała (czarna), to jedną czarną (białą) kulę w urnie zamieniamy na białą (czarną), wylosowaną kulę zwracamy do urny. Nazywajmy tę procedurę próbą. Liczbę kul czarnych w urnie po  $n$ -tej próbie nazywajmy *stanem urny w chwili  $n$* . Liczby 0 i  $r$  nazywamy *stanami brzegowymi*. Ilekroć urna znajdzie się w stanie brzegowym, doświadczenie losowe kończy się.

Rozważmy  $b = c = 15$ . Powtarzając próbę bardzo wiele razy zauważymy wyraźną tendencję zbliżania się stanu urny do stanu brzegowego (od pewnego momentu albo liczba kul czarnych wyraźnie maleje do zera, albo wyraźnie maleje do zera liczba kul białych). Tendencję do osiągnięcia stanu brzegowego (i to od samego początku procesu) zauważymy gdy liczby  $b$  i  $c$  różnią się istotnie (np. przy  $b = 10$  i  $c = 20$ ). Podobny fakt empiryczny zaobserwujemy przy innych stanach początkowych. Za każdym razem, wraz z upływem czasu (ze wzrostem liczby prób), stan urny zmierza do stanu brzegowego. Schemat Ehrenfestów wykazywał tendencję do stanu równowagi, opisany teraz schemat wykazuje tendencję do skrajności. Znowu stajemy przed problemem wyjaśnienia tej osobliwości odkrytej na drodze empirycznej?

Weźmy dowolne, ale stosunkowo duże  $r$ . Możliwe stany urny w opisanym procesie tworzą zbiór  $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ . Przez  $p_{j,k}$  oznaczmy prawdopodobieństwo przejścia urny ze stanu  $j$  w danej chwili do stanu  $k$  w chwili następnej. Mamy

$$\begin{aligned}
 p_{j,k} &= \frac{r-j}{r} & \text{dla } k = j-1, & & p_{j,k} &= \frac{j}{r} & \text{dla } k = j+1, \\
 p_{0,0} &= p_{r,r} = 1, & & & p_{j,k} &= 0 & \text{dla pozostałych } j, k.
 \end{aligned}$$

Jest  $p_{j,j+1} = \frac{j}{r}$ , a więc im większa jest liczba  $j$  czarnych kul w urnie tym bardziej jest prawdopodobne że liczba kul czarnych wzrośnie. Z kolei  $p_{j,j-1} = \frac{r-j}{r}$ , a zatem im mniejsza jest liczba kul czarnych, tym większe jest prawdopodobieństwo, że liczba kul czarnych zmaleje. Jeśli  $j < \frac{r}{2}$ , to stan urny wykazuje tendencję do zbliżania się do stanu 0, gdy  $j > \frac{r}{2}$  — to do stanu  $r$ .

Pozostaniemy przy urnie  $U_{b*c}$ . Teraz próbą jest rzut monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to kulę czarną z urny zamieniamy na kulę białą, jeśli zaś reszka — to kulę białą zamieniamy na czarną. Weźmy  $r = 30$  i  $c = 10$ . Po bardzo wielu próbach daje się zaobserwować tendencję do pozostawiania urny w stanie bliskim stanu początkowego. Podobną tendencję do stabilizacji skonstatujemy w przypadku innych stanów początkowych. Podobnie, jak uprzednio środkiem argumentacji może być macierz  $[p_{j,k}]$ , gdzie  $p_{j,k}$  jest prawdopodobieństwem tego, iż w urnie będzie w danej chwili  $k$  kul czarnych, skoro w chwili poprzedniej było ich tam  $j$ .

## 9. Losowe rozmieszczenie dużej liczby kul w dużej liczbie szuflad a rozkład Poissona

Losowanie  $k$ -krotne ze zwracaniem kuli z urny o  $s$  ponumerowanych kulach interpretujemy jako losowe rozmieszczenie  $k$  ponumerowanych kul w  $s$  ponumerowanych szufladach (numer kuli wylosowanej za  $j$ -tym razem to numer szuflady, do której trafia kula o numerze  $j$ ). Weźmy duże  $s$  i duże  $k$ .

Rysunek 8 przedstawia protokół z zajęć z rachunku prawdopodobieństwa (ze studentami II roku matematyki Kolegium Nauczycielskiego w Nowym Sączu), poświęconych szacowaniu metodą Monte Carlo rozkładu dwumianowego  $b(200, \frac{1}{100})$ . Chodziło w istocie o rozstrzygnięcie na gruncie rachunku prawdopodobieństwa następującego pozamatematycznego problemu:

W piekarni wisi ogłoszenie, że dziś sprzedaje się 100 bułek wypieczonych z ciasta, do którego wsypano 200 rodzyneków. Kupiłeś jedną bułkę i w niej nie było rodzynek. Czy możesz czuć się oszukany?"

Studenci mieli sformułować na tle tej pozamatematycznej sytuacji matematyczne zadanie (rozwiązywanie problemu obejmuje tym samym fazę matematyzacji i fazę interpretacji). Studenci symulowali losowe rozmieszczenie 200 rodzyneków w stu bułkach (jako losowe rozmieszczenie 200 kul w stu ponumerowanych szufladach) za pomocą tablic liczb losowych (korzystano z tablic *Zufallsziffern I i II* w [5], str. 166-167). Dane statystyczne zebrano i opracowano w tabeli na rysunku 8. W kolumnie odpowiadającej liczbie  $j$  wpisano liczbę szuflad, do których trafiło dokładnie  $j$  kul ( $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).



Wyniki są zaskakująco do siebie podobne. W każdym jest średnio około 13 szuflad pustych, około 27 szuflad z jedną kulą, tyleż szuflad z dwiema kulami, około 18 szuflad z trzema kulami, około 9 z czterema kulami itd. Pojawiają się pytania:

- Jak ten fakt wytłumaczyć na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?
- Jak wykorzystać go do oceny pewnych prawdopodobieństw związanych z rozkładem liczby kul w wylosowanej szufladzie (jako liczby rodzynek w kupowanej bulce).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
David K.	13	29	25	19	7	6	1	0	0	0
Mirosław Z.	12	30	29	19	11	3	1	0	0	0
Aurita K.	13	26	29	18	9	4	1	0	0	0
Michał G.	14	26	25	19	13	3	0	0	0	0
Barbara G.	11	32	29	12	9	5	1	1	0	0
Eliza M.	14	24	28	17	13	3	0	0	0	0
Rozalia H.	11	28	31	17	10	1	0	0	2	0
Ana D.	15	24	29	17	8	4	0	0	0	0
Marta B.	13	25	28	21	10	0	1	0	1	0
Aleksandra M.	11	29	23	16	13	5	0	0	0	0
Anna L.	14	26	27	20	7	5	0	1	0	0
Agnieszka Z.	13	27	29	17	9	6	1	0	0	0
Marcin M.	16	25	24	21	7	6	1	0	0	0
Janik, P.	13	27	28	18	9	4	0	1	0	0
Mariusz C.	14	29	26	13	12	4	2	0	0	0
Maiłomata S.	12	26	30	18	5	8	0	0	0	0
Agnieszka K.	13	26	26	22	10	2	1	0	0	0
Anna Z.	13	26	28	21	6	5	1	0	0	0
Agnieszka S.	14	28	26	16	10	5	0	1	0	0
Anna Z.	11	28	30	18	9	9	0	1	0	0
<b>Średnio</b>	<b>13.15</b>	<b>27.05</b>	<b>27.35</b>	<b>17.95</b>	<b>9.25</b>	<b>4.25</b>	<b>0.55</b>	<b>0.25</b>	<b>0.15</b>	<b>0</b>

rys. 8. opracowane wyniki losowego rozmieszczenia 200 kul w stu szufladach

Niech  $X$  będzie liczbą kul w szufladzie wylosowanej spośród stu szuflad po losowym rozmieszczeniu w nich dwustu kul. Z zebranych danych statystycznych wynika, że:

$P(X=0) \approx 0,13$ ,  $P(X=1) \approx 0,27$ ,  $P(X=2) \approx 0,27$ ,  $P(X=3) \approx 0,017$ ,  
 $P(X=4) \approx 0,09$ ,  $P(X=5) \approx 0,04$ ,  $P(X=6) \approx 0,01$ ,  $P(X=7) \approx 0,003$  itd.

Uzyskane metodą Monte Carlo oszacowanie rozkładu zmiennej losowej  $X$  (a więc pewien rozkład empiryczny) porównujemy teraz z rozkładem Poissona o parametrze  $r = 2$ . Twierdzenie Poissona i rozkład Poissona były tematem poprzednich zajęć. Zgodność empirycznego rozkładu z rozkładem Poissona jest zaskakująca. Organizacja *refleksji a posteriori* obejmowała na wspomnianych zajęciach odkrywanie przybliżenia Poissona.

Do gromadzenia i opracowywania powyższych danych statystycznych (zwłaszcza przy większych liczbach kul i szuflad) można wykorzystać komputer. Rys. 9 prezentuje trzy wyniki losowego rozmieszczenia 300 kul w stu szufladach uzyskane na drodze symulacji komputerowej.

0	2	5	2	3	5	5	4	2	5
3	4	3	4	5	3	5	2	3	1
5	3	4	4	1	6	3	1	1	4
3	1	3	2	0	6	2	3	2	1
1	5	1	5	3	2	1	6	0	1
3	3	4	2	5	5	2	2	3	2
4	1	1	3	4	6	4	4	3	1
5	1	0	2	2	5	1	3	3	5
4	3	4	3	2	1	4	2	4	3
5	2	4	7	7	3	1	2	2	2

2	2	1	6	5	4	3	4	3	9
1	4	1	2	3	2	1	4	4	3
1	2	3	1	2	2	4	2	2	1
4	5	1	3	3	5	3	4	3	2
2	2	3	4	2	2	1	5	2	2
3	3	2	3	7	2	2	4	4	2
3	5	3	3	5	5	3	3	5	2
3	1	3	1	5	1	4	4	1	0
1	6	7	2	8	2	4	2	2	5
3	5	3	5	3	1	2	3	0	2

4	3	3	2	3	4	4	3	6	1
0	4	1	0	5	2	2	2	4	1
1	5	2	5	3	0	1	4	3	3
9	1	3	4	2	2	3	4	4	2
1	5	6	1	3	5	2	5	4	4
1	5	7	4	1	4	1	3	2	5
1	2	4	5	2	4	1	3	3	5
4	2	2	2	3	4	1	4	2	3
4	3	3	4	5	5	0	3	0	4
1	5	1	1	2	6	3	1	5	3

rys. 9.

Dla wyniku  $\omega$  losowego rozmieszczenia  $k$  kul w  $s$  szufladach oznaczmy przez  $l_\omega(j)$  liczbę szuflad, do których trafiło dokładnie  $j$  kul. Iloraz  $\frac{l_\omega(j)}{s}$ , tj. frakcję szuflad z  $j$  kulami, oznaczmy przez  $q_\omega(j)$  dla  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .

Dla wyniku  $\omega$  rozmieszczenia funkcja  $q_\omega$  jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ .

W [16] (str. 190-193) zaproponowano wyjaśnienie na gruncie rachunku prawdopodobieństwa tego wyraźnego podobieństwa wielu wyników losowego rozmieszczenia dużej liczby kul w stu szufladach, gdy chodzi o funkcje  $l_\omega$  i  $q_\omega$ .

W przypadku  $k = 300$  i  $s = 100$  średnio na jedną szufladę przypadają 3 kule. Rozważmy w tym kontekście rozkład Poissona o parametrze 3, tj. funkcję  $p$ :

$$p(j) = \frac{2^j}{j!} e^{-3} \text{ dla } j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

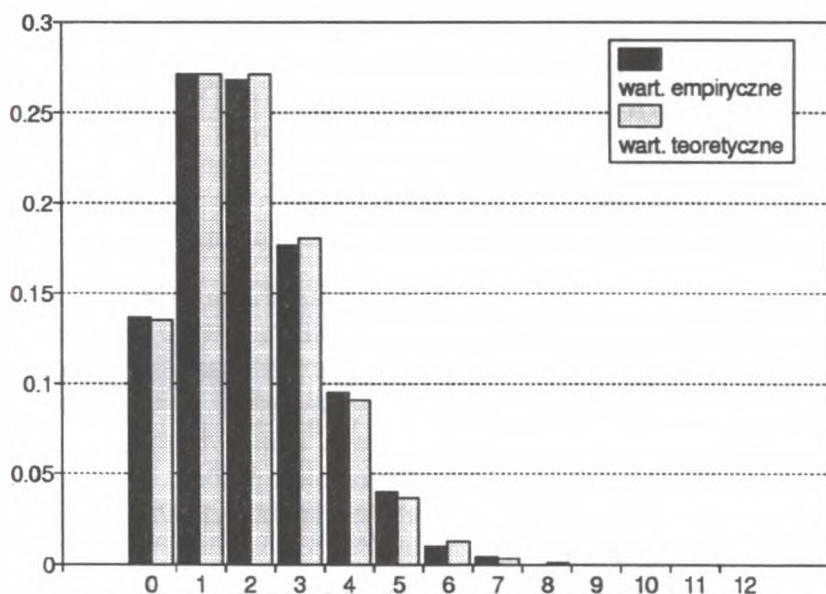
Zbierzmy dane dotyczące funkcji  $q_\omega$  dla wyników  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$  z rys. 9 i porównajmy  $q_{\omega_k}(j)$  z  $p(j)$  dla  $k = 1, 2, 3$ .



$j$	$q_{\omega_1}(j)$	$q_{\omega_2}(j)$	$q_{\omega_3}(j)$	średnia około	$p(j)$
0	0,04	0,02	0,05	0,0366	0,049787
1	0,17	0,15	0,18	0,1666	0,149361
2	0,20	0,27	0,17	0,2133	0,224042
3	0,22	0,24	0,20	0,2200	0,224042
4	0,16	0,14	0,21	0,1700	0,168031
5	0,15	0,12	0,14	0,1366	0,100819
6	0,04	0,02	0,03	0,0300	0,050409
7	0,02	0,02	0,01	0,0166	0,021604
8	0,00	0,01	0,00	0,0030	0,008102
9	0,00	0,01	0,01	0,0066	0,002701

Fakt, że  $q_{\omega}(j) \approx p(j)$  dla  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , wydaje się zaskakujący.

Wykorzystajmy komputer do gromadzenia wyników losowego rozmieszczenia większej liczby kul (np. 5 000) w większej liczbie szuflad (np. w 2 500).



rys. 10.

Rysunek 10 prezentuje dwa diagramy słupkowe:

- histogram funkcji  $q_{\omega}$  (ciemne słupki) dla wyniku  $\omega$  losowego rozmieszczenia 5000 kul w 2500 szufladach uzyskanego za pomocą komputera i
- histogram funkcji  $p$  (jasne słupki), tj. rozkładu Poissona o parametrze  $r = 2$ .

Ich podobieństwo jest zaskakującym faktem empirycznym.

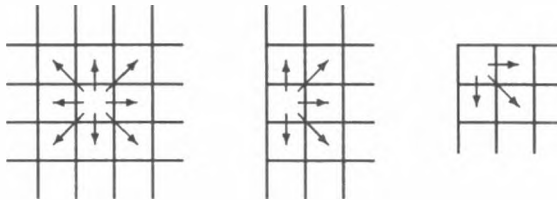
## 10. Probabilistyczny schemat zderzeń atomów lub drgań w kryształach i rozkład wykładniczy

a) Rozważmy komodę o  $s = 2500$  ponumerowanych szufladach (w układzie 50 wierszy i 50 kolumn) i 5000 kul rozmieszczonych po dwie w każdej szufladzie (to stan początkowy komody<sup>4</sup>) oraz następujące doświadczenie losowe:

1° Losujemy szufladę, dając każdej równe szanse.

2° Gdy jest to szuflada „wewnętrzna” (rys. 11a), to losujemy jedną z ośmiu „sąsiednich” szuflad, gdy szuflada leży na „brzegu” (rys. 11b), to jedną z pięciu sąsiednich, gdy w „rogu” (rys. 11c), to jedną z trzech. Każda z sąsiednich szuflad ma w tym losowaniu równe szanse.

3° Kulę z wylosowanej szuflady na etapie 1° (jeśli jest w niej kula<sup>5</sup>) przekładamy do wylosowanej szuflady sąsiedniej.



rys. 11. szuflady „sąsiednie” i ich kierunki

Takie pojedyncze losowanie do momentu aż trafimy na szufladę z kulą, losowanie szuflady sąsiedniej i przekładanie kuli, nazywamy *próbą*. Powtarzamy próbę wiele razy. Niech  $l_n(j)$  oznacza liczbę szuflad, w których po  $n$ -tej próbie jest  $j$  kul. Po  $n$  próbach  $l_n$  jest pewną funkcją określoną na zbiorze  $\{0, 1, 2, \dots, 5000\}$ . Ta funkcja określa *stan komody po  $n$ -tej próbie*. Jest to wartość pewnej statystyki dla  $n$ -wyrazowej próbki. Wykres funkcji  $l_n$  dla wyników  $n$ -krotnego powtórzenia próby, uzyskanych w drodze symulacji komputerowej, prezentuje rys. 12.

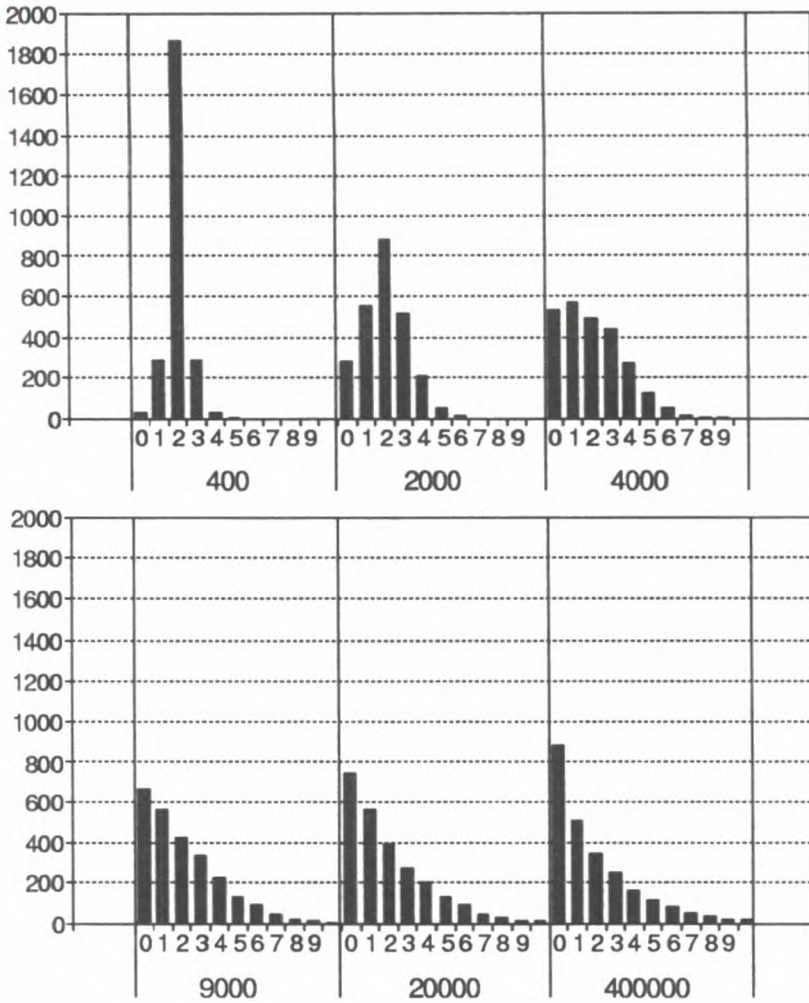
Diagramy słupkowe mają osobliwy kształt. Gdyby nakryć krzywą trzy ostatnie z rys. 12, to przypomina ona wykres gęstości rozkładu wykładniczego, tj. funkcji

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \text{ dla } x \geq 0 \text{ i } f(x) = 0 \text{ dla } x < 0.$$

Ten fakt inspiruje pytanie, dlaczego tak się dzieje?

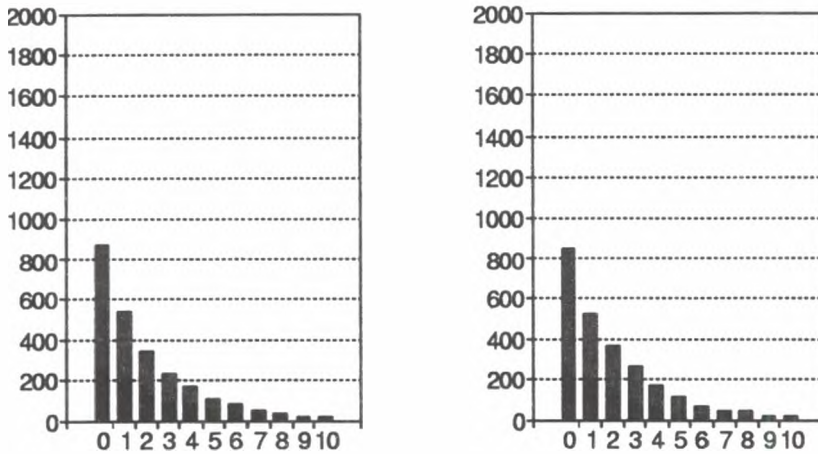
<sup>4</sup>komoda jest więc w stanie pewnej równowagi

<sup>5</sup>jeśli w tej szufladzie nie ma kuli, to losowanie szuflady powtarzamy



rys. 12. diagramy słupkowe funkcji  $l_n$  dla  $n = 400$ ,  $n = 2000$ ,  $n = 4000$ ,  $n = 9000$ ,  $n = 20000$  i  $n = 400000$

b) Poprzedźmy doświadczenie losowe opisane w a) etapem wstępnym, na którym 5 000 kul zostaje losowo rozmieszczonych w 2 500 szufladach. Stan początkowy jest zatem rezultatem doświadczenia losowego. Rysunek 13 prezentuje diagramy słupkowe stanów komody po  $n = 10000$  próbach dla dwu wyników losowego rozmieszczenia  $\omega_1$  (rys. 13a) i  $\omega_2$  (rys. 13b).



rys. 13. diagramy stanów komody po 10 000 prób, gdy stany początkowe ustalono przez losowe rozmieszczenie 5 000 kul w 2 500 szufladach tej komody

Oto dane liczbowe dotyczące stanu komody po  $n$  próbach:

$j$	$l_n(j)$ dla $\omega_1$	$l_n(j)$ dla $\omega_2$
0	870	847
1	544	525
2	348	367
3	232	264
4	173	173
5	104	116
6	82	66
7	52	41
8	33	39
9	16	20
10	14	18

Oba diagramy słupkowe są bardzo zbliżone do ostatniego z diagramów na rys. 12.

Rodzi się tu pytanie, jak w opisanych sytuacjach wytłumaczyć obecność rozkładu wykładniczego przy dużym  $n$  i to niezależnie od rozkładu początkowego kul w szufladach? Jakie twierdzenia graniczne rachunku prawdopodobieństwa tłumaczą te podobieństwa rozkładów stanów do rozkładu wykładniczego?

Schematy, o których mowa, opisują przekazywanie kwantów energii w danej temperaturze w trakcie zderzeń atomów. Atomy — to szuflady, kule — to kwanty energii. Model jest oczywiście uproszczony z uwagi na przyjęte tylko dwa wymiary.

„Świat przypadku” zna wiele podobnych zaskakujących faktów, które w nauczaniu (ale także w kształceniu stochastycznym nauczyciela matematyki) można wykorzystać do inspiracji matematycznej aktywności. Praca zawiera propozycję ich odkrywania za pośrednictwem danych empirycznych. Zawiera także sugestie dotyczące użycia komputera w aktywizacji matematycznej działalności.

## Uwagi końcowe

W kontekście nauczania matematykę należy rozumieć jako rozwiązywanie problemów, a więc jako specyficzną działalność intelektualną, a nie jako gotowy produkt. Matematyczna wiedza może i powinna być zdobywana na drodze odkrywania kreowanego rozwiązywaniem problemów (nauczanie odkrywające, problemowe uczenie się matematyki). Dydaktyka matematyki mówi tu o prowokowaniu uczenia się przez wykorzystywanie różnych typów sytuacji problemowych (także pozamatematycznych), wytworzonych przez nauczyciela a prowadzących drogą matematyzacji do sformułowania matematycznego zadania i zastosowania (a nawet odkrywania) matematycznego aparatu do jego rozwiązania („matematyka sytuacji”). W tym podejściu do nauczania matematyki tworzenie oraz rozwiązywanie zadań stanowi główny typ aktywności matematycznej (por. [21], str. 40). Tymczasem szkolne zadania matematyczne zawsze są już gotowe, nie wiadomo tylko przez kogo sformułowane, w jakiej sytuacji i w jakim celu. Cel ich rozwiązywania to na ogół utrwalanie wiedzy i ćwiczenie technik rachunkowych. Jest to szczególnie jaskrawo widoczne na przykładzie zadań z rachunku prawdopodobieństwa.

Proponowane w pracy formy inspiracji problematyki probabilistycznej (i statystycznej) kreuja motywacje poprzez odpowiednio dawkowane tzw. przeżywanie sprzeczności wywołane sytuacją konfliktową (zdziwienie na skutek eksperymentalnego stwierdzenia pewnej prawidłowości lub na skutek zaskoczenia brakiem oczekiwanej prawidłowości, por. [14], str. 130-131). Mowa tu o sytuacjach

- mobilizujących do działania, do matematycznej aktywności,
- pobudzających do dyskusji, do refleksji i do argumentowania,
- kształcących intuicje pobudzające do przewidywania i uzasadniania,
- kształcących konstruktywny stosunek do błędów (por. [14], str. 174).

Z badań nad intuicjami stochastycznymi i nad skutecznymi zabiegami dydaktycznymi w procesie ich kształtowania (Fischbein, Kahneman, Tversky,

Shaughnessy) wynika, że ogromną rolę w rozwoju właściwych intuicji probabilistycznych, statystycznych i kombinatorycznych ma osobisty kontakt ucznia z empirią (losowanie i opracowywanie danych statystycznych, korzystanie z gotowych danych empirycznych, np. wyników gier losowych, wyznaczanie częstości, konfrontacja ocen *a posteriori* z ocenami *a priori*).

Badania, o których tu mowa, potwierdzają, że nauczanie rachunku prawdopodobieństwa zbyt sformalizowane, odizolowane od statystyki matematycznej, pomijające empiryczny aspekt pojęć i metod probabilistycznych, pomijające także refleksję nad pewnymi klasycznymi paradoksami rachunku prawdopodobieństwa, nie usuwa błędnych intuicji. Niniejsza praca jest także propozycją zabiegów dydaktycznych w procesie kształtowania właściwych intuicji stochastycznych jako ważnego aspektu stochastycznego kształcenia.



rys. 14.

Problematyka pracy wiąże się z metodami Monte Carlo, ale wprowadzono je nie tyle do szacowania, ile do inspirowania matematycznej działalności. Rysunek 14 ukazuje relacje między realnym światem a światem matematycznej abstrakcji w omawianych zagadnieniach. Dane empiryczne pozwalały odkrywać pewne własności lokalnych przestrzeni probabilistycznych (tj. przestrzeni konstruowanych jako modele konkretnych doświadczeń, jak losowe kojarzenie osobników zwane *panmiksją*, losowe rozmieszczenie kul w szufladach, zderzenia atomów, wymiana ciepła między dwoma ciałami). Odkrywane na drodze empirycznej własności modelu probabilistycznego znajdowały potwierdzenie



w rachunkach i dedukcji. Rozwiązywane w tym kontekście matematyczne zadania ukazywały zatem zgodność matematycznego modelu z rzeczywistością, dla której był on konstruowany, a zarazem wyjaśniały na gruncie matematyki odkryte uprzednio i na ogół zaskakujące, fakty empiryczne.

Praca dotyczy ważnego aktualnie zagadnienia jak uczyć rachunku prawdopodobieństwa, a ściślej stochastyki i to „stochastyki dla wszystkich” oraz jak kształcić nauczyciela w zakresie tej dziedziny matematyki. Przedstawiona idea wyraźnie koresponduje z sugestiami odpowiedzi na analogiczne pytania postawione w pracy [13] w odniesieniu do geometrii. J. Lange sugeruje, by w kształceniu geometrycznym wykorzystać realny świat i jego „geometryczną naturę” do inspirowania problematyki geometrycznej. W [13] podkreśla się jak algebraizacja geometrii i presje matematyków, by uczyć geometrii wyłącznie jako teorii dedukcyjnej, zmieniły formę i treści powszechnego kształcenia geometrycznego. Odwoływanie się do rzeczywistych doświadczeń w przypadku geometrii ma długą tradycję. Lange wzbogaca ją o mało znane zagadnienia z przestrzeni trójwymiarowej, w której człowiek żyje. W przypadku rachunku prawdopodobieństwa odwoływanie się do realnego świata albo jest pomijane, albo trywializowane (poleca się uczniowi rzucać 200 razy kostką, aby na podstawie zebranych danych statystycznych wnioskować o prawdopodobieństwie wyników rzutu kostką). W [13] nauczanie geometrii traktowane jest jako aktywność w doświadczeniach, matematyka (za Freudenthałem) traktowana jest jako ludzka aktywność. Intuicyjne aktywności doświadczalne są transmitowane również na naucznie w szkole średniej.

Niniejsza praca zawiera propozycje adaptacji powyższych idei na grunt rachunku prawdopodobieństwa, a ściślej do tworzenia dydaktycznych ujęć stochastyki dla nauczyciela a następnie stochastyki jako elementu matematyki „dla wszystkich”.

## Literatura

- [1] K. Augustyniak, W. Augustyniak, *Gry i automaty*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1980.
- [2] H. Athen, H. Griesel, *Mathematik heute. Grundkurs Stochastik*, H. Schroedel Verlag KG, Hannover, 1979.
- [3] J. Cwirko-Godycki, *Sześcian w procesie dydaktycznym*, WSiP, Warszawa, 1988.
- [4] A. Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Band 1)*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1980.
- [5] A. Engel, T. Varga, W. Walser, *Zufall oder Strategie?*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1974.

- [6] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 1, PWN, Warszawa, 1987.
- [7] M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.
- [8] J. Giżycki, A. Górny, *Fortuna kołem się toczy*, Wydawnictwo Sport i Turystyka, Warszawa, 1976.
- [9] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.
- [10] M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa, 1988.
- [11] H. Krzanowska, A. Łomnicki, J. Rafiński, *Wprowadzenie do genetyki populacji*, PWN, Warszawa, 1982.
- [12] Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, *Dydaktyka Matematyki* 6 (1986), 25-41.
- [13] J. de Lange Jzn, *Geometria dla wszystkich, czy w ogóle nie geometria?*, *Dydaktyka Matematyki* 6 (1986), 43-82.
- [14] W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 1989.
- [15] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla Szkoły”, Bielsko-Biała, 1997.
- [16] A. Płocki, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992.
- [17] A. Płocki, *Spór o treści i formę stochastycznego kształcenia nauczyciela matematyki*, *Dydaktyka Matematyki* 17 (1995), 135-165.
- [18] W. Sadowski, *Decyzje i prognozy*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1977.
- [19] S. Skowron, *Dziedziczność*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1960.
- [20] H. K. Strick, *Einführung in die Beurteilende Statistik*, Schroedel Schulbuchverlag, Hannover, 1986.
- [21] St. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa, 1990.
- [22] T. Varga, *Mathematik 1. Flussdiagramme. Lochkarten. Wahrscheinlichket*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.

*Institut Matematyki*

*WSP*

*Podchorążych 2*

*PL-30-084 Kraków*

*Poland*

*E-mail: adplocki@wsp.krakow.pl*