

Kazimierz JARACZ  
Eugeniusz WACHNICKI

## Analiza wrażliwości układów dynamicznych na zmiany parametrów metodą dekompozycji modelu

### Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę określania funkcji wrażliwości układu liniowego  $n$ -tego rzędu za pomocą funkcji wrażliwości podukładów pierwszego lub co najwyżej  $\alpha$ -tego rzędu ( $\alpha < n$ ). Funkcja wrażliwości została zdefiniowana jako pochodna cząstkowa całki równania względem parametru modelu.

**Słowa kluczowe:** funkcja wrażliwości, układ liniowy

### 1. WSTĘP

W pracy [1] została przedstawiona metoda analizy układów liniowych czasowo inwariantnych, która pozwala obiekty dynamiczne rzędu  $n$ -tego opisywać równoważnym układem równań różniczkowych rzędu pierwszego lub  $\alpha$ -tego ( $\alpha$ -krotność pierwiastka równania charakterystycznego).

Metoda ta, nazwana „metodą równań niezależnych”, jest inna od znanej do tej pory metody odsprzęgania równania stanu za pomocą liniowej transformacji modalnej lub metody transformacji Laplace'a. Może być stosowana w dowolnych przestrzeniach wektorowych, przy operatorach liniowych  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , w równaniach

$$\left( \prod_{i=1}^n T_i \right) x(t) = u(t) \quad (1)$$

gdzie  $T_i - T_j$ ,  $i \neq j$ , jest operatorem odwracalnym oraz  $T_p$ ,  $T_j$  są operatorami komutującymi.

W niniejszej pracy zastosowano tę metodę dla przypadku operatora

$$T_i = D_i - c_i \quad (2)$$

do celów określania wrażliwości układu liniowego na zmiany parametrów modelu  $n$ -tego rzędu.

Zdefiniowano miarę wrażliwości sygnału wyjściowego układu na zmiany parametrów tego układu dla wymuszenia deterministycznego i przedstawiono sposób jej wyznaczania.

## 2. PRELIMINARIA

Rozpatrzmy stabilny układ czasowo inwariantny

$$\prod_{i=1}^n (D_i - c_i) x(t) = u(t) \quad (3)$$

$t \in [0, \infty)$ , gdzie  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi lub zespolonymi o częściach rzeczywistych dodatnich,  $D_i$  - operator różniczkowy. Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że warunki początkowe są zerowe. W pracy [1] wykazano, że jeśli  $c_i \neq c_j$  dla  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , oraz funkcja  $u$  jest różniczkowalna do rzędu  $n-1$  włącznie w przedziale  $[0, \infty)$ , to każde rozwiązanie równania (3) jest sumą rozwiązań równań różniczkowych o postaci

$$D_i x_i(t) = c_i x_i(t) + b_i u(t) \quad (4)$$

$t \in (0, \infty)$ ,

$$b_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j)^{-1}$$

$i = 1, \dots, n$ . Znaczy to, że

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (5)$$

Warto zauważyć, że przechodząc do rozwiązań uogólnionych, z założenia, iż  $u$  jest różniczkowalna do rzędu  $n-1$  włącznie można zrezygnować.

Niech  $c_i, i = 1, \dots, n$  będą ciągłymi funkcjami parametrów  $p_k, \mathbb{R} \ni p_k > 0, k = 1, \dots, m$ , czyli

$$c_i = c_i(p) \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, n, p = \{p_1, \dots, p_m\}$$

Przy zmianie wartości współczynnika  $c_i(p)$  będącej skutkiem zmiany dowolnego z parametrów  $p_k \in p$ , ulegnie zmianie rozwiązanie  $x(t)$ , które jest również funkcją parametrów  $p$ , czyli

$$x = x(t, p) \quad (7)$$

oraz również

$$x_i = x_i(t, p) \quad (8)$$

$$t \in (0, \infty), p = \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Zmianę tę określa funkcja wrażliwości określona w [2].

### 3. OKREŚLENIE FUNKCJI WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZANIA NA ZMIANY PARAMETRÓW

Funkcją wrażliwości  $\lambda_{x, p_k}$  rozwiązania  $x$  na zmianę parametru  $p_k, k = 1, \dots, m$ , nazywać będziemy pochodną cząstkową funkcji  $x(t, p)$  względem  $p_k \in p$ , czyli

$$\lambda_{x, p_k}(t, p) = \frac{\partial x(t, p)}{\partial p_k} \quad (9)$$

$$t \in [0, \infty), p_k > 0, k = 1, \dots, m.$$

Analogicznie definiujemy funkcję wrażliwości rozwiązania cząstkowego  $x_i$  na zmianę parametru  $p_k$ , tj.:

$$\lambda_{x_i p_k}(t, p) = \frac{\partial x_i(t, p)}{\partial p_k} \quad (9a)$$

$t \in [0, \infty)$ ,  $p_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Założmy, że

$$\frac{\partial}{\partial p_k} [D_t x(t, p)] = D_t \left[ \frac{\partial}{\partial p_k} x(t, p) \right] = D_t \lambda_{x_i p_k}(t, p) \quad (10)$$

Wtedy funkcja wrażliwości układu liniowego (3) jest postaci

$$\lambda_{x p_k}(t, p) = \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i p_k}(t, p) \quad (11)$$

$t \in [0, \infty)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , przy czym funkcje  $\lambda_{x_i p_k}(t, p)$  są rozwiązaniami równania:

$$D_t \lambda_{x_i p_k}(t, p) = c_{i p_k} x_i(t, p) + c_i \lambda_{x_i p_k}(t, p) + b_{i p_k} u(t) \quad (12)$$

$t \in [0, \infty)$ , gdzie

$$c_{i p_k} = \frac{\partial c_i(p)}{\partial p_k}$$

$$b_{i p_k} = \frac{\partial b_i(p)}{\partial p_k} \quad (13)$$

gdzie  $k = 1, \dots, m$

Dowód wynika wprost ze zrózniczkowania równania (4) i (5) względem  $p_k$  oraz zastosowania definicji (9) i założenia (10).

#### 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W charakterze przykładu rozpatrzono określenie wrażliwości prędkości kątowej silnika obcowzbudnego prądu stałego na zmianę zastępczego momentu bezwładności układu napędowego.

Równanie dynamiki rozpatrywanego układu ma postać [3]:

$$(D_t - c_1)(D_t - c_2)\omega(t) = \frac{v_0^2}{k}u_a(t) \quad (14)$$

przy czym

$$c_1 = -\delta - \beta, \quad c_2 = -\delta + \beta,$$

$$\delta = \frac{1}{2T_a}, \quad \beta = \sqrt{\delta^2 - v_0^2},$$

$$v_0^2 = \frac{1}{T_a T_{em}},$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \quad (15)$$

$$T_{em} = J \frac{R_a}{k^2}.$$

Znaczenie fizyczne przyjętych symboli jest następujące:  $\omega$  – prędkość kątowa wału silnika,  $u_a(t)$  – napięcie zasilające twornik,  $R_a$  – rezystancja obwodu twornika,  $L_a$  – indukcyjność obwodu twornika,  $J$  – zastępczy moment bezwładności sprowadzony do wału silnika,  $k$  – stała silnika wyrażona w  $V \cdot s (N \cdot m \cdot A^{-1})$ ,  $T_a$  – elektromagnetyczna stała czasowa obwodu twornika,  $T_{em}$  – elektromechaniczna stała czasowa układu,  $\delta$  – stała tłumienia,  $v_0$  – pulsacja drgań nietłumionych.

Równanie (14) rozpatrywane będzie dla przypadku  $T_{em} \geq 4T_a$ . Wtedy  $\beta \leq 0$ . Na podstawie (4) równanie (14) przy zerowych warunkach początkowych jest równoważne układowi równań niezależnych

$$\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t),$$

$$D_t \omega_1(t) = c_1 \omega_1(t) + b_1 u_a(t), \quad (16)$$

$$D_t \omega_2(t) = c_2 \omega_2(t) + b_2 u_a(t), \quad (17)$$

przy czym

$$b_1 = (c_1 - c_2)^{-1} \frac{v_0^2}{k} = -\frac{1}{2\beta} \frac{v_0^2}{k},$$

$$b_2 = (c_2 - c_1)^{-1} \frac{v_0^2}{k} = \frac{1}{2\beta} \frac{v_0^2}{k}. \quad (18)$$

Na podstawie (11) i (12) funkcja wrażliwości prędkości kątovej silnika obcowzbudnego prądu stałego na zmiany momentu obciążenia, oznaczona przez  $\lambda_{\omega}(t, J)$ , jest postaci

$$\lambda_{\omega}(t, J) = \lambda_{\omega 1 J}(t, J) + \lambda_{\omega 2 J}(t, J), \quad (19)$$

przy czym  $\lambda_{\omega 1 J}(t, J)$ ,  $\lambda_{\omega 2 J}(t, J)$  spełniają układ równań

$$D_t \lambda_{\omega 1 J}(t, J) = c_{1 J \omega 1}(t, J) + c_1 \lambda_{\omega 1 J}(t, J) + b_{1 J} u_a(t), \quad (20)$$

$$D_t \lambda_{\omega 2 J}(t, J) = c_{2 J \omega 2}(t, J) + c_2 \lambda_{\omega 2 J}(t, J) + b_{2 J} u_a(t). \quad (21)$$

Na podstawie (13), (15) i (18) otrzymujemy

$$c_{1 J} = \frac{\partial c_1(J)}{\partial J} = -\frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - v_0^2}} \frac{1}{J} v_0^2, \quad (22)$$

$$c_{2 J} = \frac{\partial c_2(J)}{\partial J} = -\frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - v_0^2}} \frac{1}{J} v_0^2, \quad (23)$$

$$b_{1 J} = \frac{\partial b_1(J)}{\partial J} = \frac{1}{2k} \frac{v_0^2}{J} \cdot \frac{\sqrt{\delta^2 - v_0^2} + \frac{v_0^2}{2\sqrt{\delta^2 - v_0^2}}}{\delta^2 - v_0^2}, \quad (24)$$

$$b_{2 J} = \frac{\partial b_2(J)}{\partial J} = \frac{1}{2k} \frac{v_0^2}{J} \cdot \frac{\sqrt{\delta^2 - v_0^2} + \frac{v_0^2}{2\sqrt{\delta^2 - v_0^2}}}{\delta^2 - v_0^2}. \quad (25)$$

## 5. OBLICZENIA CYFROWE

Obliczenia funkcji wrażliwości prędkości kątovej rozpatrywanego silnika zrealizowano metodą wspomaganą komputerowego, na komputerze PC przy zastosowaniu języka SIPRO [4]. Do obliczeń przyjęto silnik dużej mocy o następujących parametrach znamionowych [5]:

$$P_N = 6 \text{ MW}, \quad U_N = 1350 \text{ V}, \quad I_N = 4770 \text{ A}, \quad n_N = (0 \div 65 \div 165) \text{ obr/min}.$$

Pozostałe parametry wynoszą:

$$R_a = 0,011 \, \Omega, \quad T_a = 0,027 \text{ s}, \quad J = 95,41 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$k = 75,02 \text{ V} \cdot \text{s} (\text{Nm} \cdot \text{A}^{-1}), \quad T_{em} = 0,186 \text{ s},$$

$$\delta = 18,52 \text{ s}^{-1}, \quad v_o = 14,11 \text{ s}^{-1}, \quad \beta = 11,99 \text{ s}^{-1},$$

$$c_1 = -30,51 \text{ s}^{-1}, \quad c_2 = -6,53 \text{ s}^{-1},$$

$$b_1 = -0,11 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}^2}, \quad b_2 = -0,11 \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}^2},$$

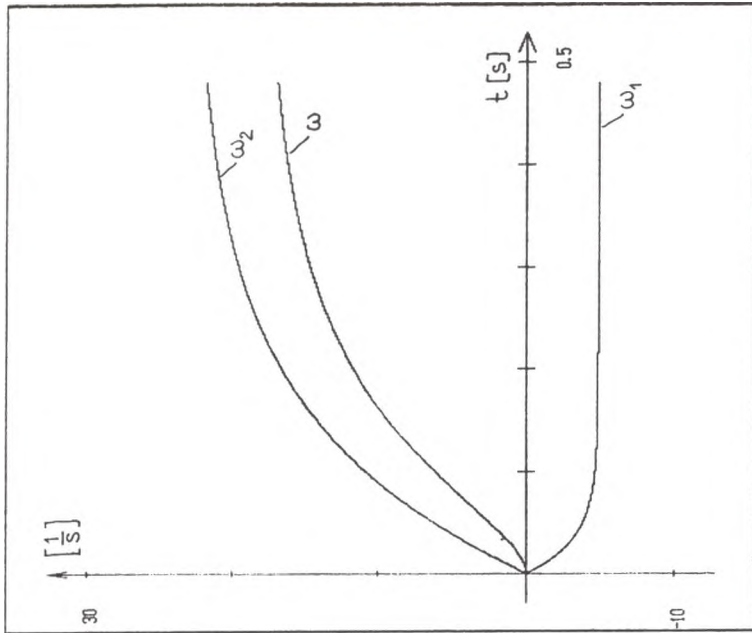
$$c_{1J} = -8,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}}, \quad c_{2J} = -8,7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}},$$

$$b_{1J} = 1,96 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}, \quad b_{2J} = -1,96 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{V} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2}.$$

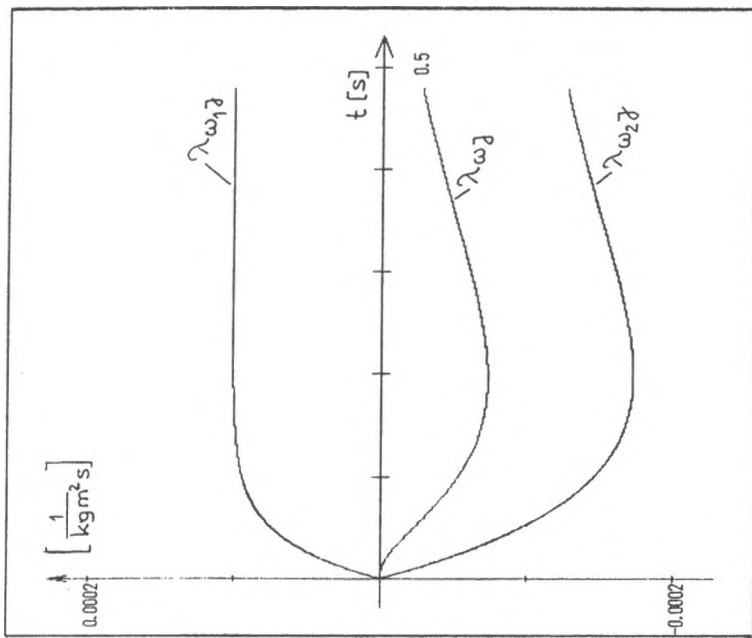
Rezultaty obliczeń przedstawiono na rys. 1 i 2.

Rys. 1 przedstawia przebiegi prędkości kątovej wału silnika  $\omega(t)$  i prędkości cząstkowych  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ , stanowiących rozwiązania numeryczne równań (16) i (17).

Rys. 2 prezentuje przebiegi funkcji wrażliwości prędkości kątovej silnika  $\lambda_{\omega}(t, J)$  i wrażliwości prędkości cząstkowych  $\lambda_{\omega_1 J}(t, J)$ ,  $\lambda_{\omega_2 J}(t, J)$  na zmiany momentu bezwładności układu napędowego. Ostatnie funkcje stanowią numeryczne rozwiązanie układu równań (19), (20), (21). Układ ten stanowi stowarzyszony z modelem (16) (17) zdekomponowany model wrażliwości rozpatrywanego silnika.



Rys. 1. Przebiegi prędkości kątowej silnika prądu stałego  $\omega(t)$  i prędkości składowych  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$



Rys. 2. Funkcje wrażliwości  $\lambda_{\omega}(t, J)$ ,  $\lambda_{\omega_1}(t, J)$ ,  $\lambda_{\omega_2}(t, J)$  prędkości kątowej silnika na zmiany następczego momentu bezwładności



## 6. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda analizy wrażliwości jest wygodna w zastosowaniach praktycznych. Pozwala bowiem określać funkcje wrażliwości wielkości wyjściowej układu  $n$ -tego rzędu za pomocą funkcji wrażliwości podukładów pierwszego (lub co najwyżej  $\alpha$ -tego rzędu). Pozwala to uniknąć konieczności obliczania wrażliwości kolejnych pochodnych wielkości wyjściowej, aż do rzędu  $n-1$  włącznie. Rezultaty obliczeń funkcji wrażliwości prędkości kątowej w przykładowym silniku dużej mocy pokazują, że wariacje zastępczego momentu bezwładności badanego układu mają niewielki wpływ na odchyłki prędkości kątowej. Silnik jest „mało wrażliwy” na te wariacje.

Zakres zastosowań prezentowanej metody jest znacznie szerszy. Będzie to przedmiotem rozważań następných prac.

## LITERATURA

- [1] Jaracz K., Wachnicki E.: *Metoda równań różniczkowych niezależnych analizy układów liniowych*. Zeszyty Nauk. Akad. Gór.-Hutniczej 2. Elektrotechnika 4 (1983), 367-378.
- [2] Cruz J. B.: *Układy ze sprzężeniem zwrotnym*. PWN, Warszawa 1977 (tłum. z j. ang.).
- [3] Szklarski L., Jaracz K., Horodecki A.: *Electric Drive Systems Dynamics. Selected Problems*. Elsevier – PWN, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo – Warszawa 1990.
- [4] Viteček A., Farana R., Smutný L., Vojaček M., Němec R.: *Univerzální simulační program SIPRO 3.1*. VŠB – Technická univerzita, Ostrava 1993.
- [5] Jaracz K.: *Random Disturbances and Expanded Model of Electric Drive of Rolling Mill*. Proc. Conf. „Electric Drive Design and Applications” EPE'94, 19-20 Ocxt. EPFL Lausanne, 1994, pp. 611-614.