

Krystyna KUŹNIAR

## Dynamiczny model przestrzenny ścianowych budynków prefabrykowanych

### Streszczenie

Praca dotyczy doboru prostego modelu przestrzennego do analitycznego wyznaczania częstotliwości drgań własnych ścianowych budynków prefabrykowanych o średniej wysokości. Obliczone wyniki porównano z otrzymanymi doświadczalnie z badań budynków w skali naturalnej. Wykorzystano kilka sposobów wzbudzenia drgań: odstrzały materiału wybuchowego w pobliskich kamieniołomach, działanie wiatru, rytmiczne kotłowanie się ludzi na górnej kondygnacji. Stwierdzono, że zaproponowany model przestrzenny pozwala na określenie właściwości dynamicznych omawianych budynków z zadowalającą w praktyce dokładnością.

**Słowa kluczowe:** częstotliwość drgań własnych, budynki prefabrykowane, przestrzenny model dynamiczny

### 1. WSTĘP

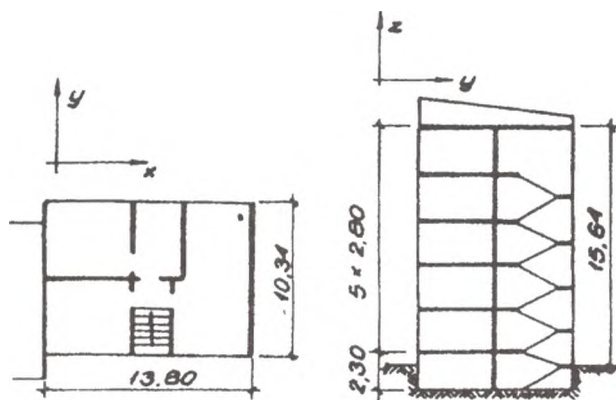
Teoretyczne wyznaczenie właściwości dynamicznych budynków podlegających drganiom wymaga przyjęcia modelu fizycznego (schematu dynamicznego) i odpowiadającego mu modelu matematycznego, opisujących układ rzeczywisty. Ukazało się w Polsce wiele prac, w których proponuje się bardzo złożone modele budynków (por. np. [1, 2]). Jednak w praktyce często dąży się do uproszczenia modeli, tym bardziej, że dane dotyczące tak złożonych konstrukcji jakimi są budynki, mogą być obarczone błędami.

Niniejsza praca dotyczy doboru prostego modelu przestrzennego do analitycznego wyznaczenia częstotliwości drgań własnych ścianowych budyn-

ków prefabrykowanych o średniej wysokości. Rozważania obejmują również porównanie obliczonych wyników z otrzymanymi doświadczalnie.

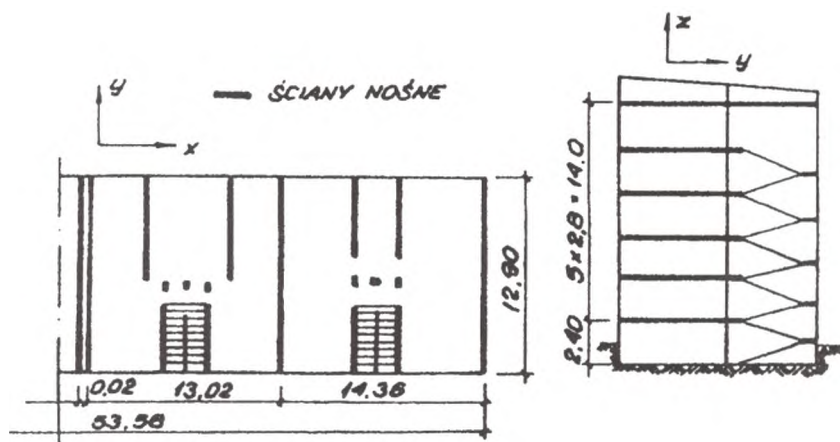
## 2. ANALIZOWANE OBIEKTY

Analizą objęto typowe wznoszone w Polsce budynki mieszkalne prefabrykowane ścianowe o pięciu kondygnacjach: trzy budynki wielkopłytowe typu C/MBY/V oraz dwa budynki wielkoblokowe typu BSK. Pionowymi elementami nośnymi w budynkach typu C/MBY/V są płyty ścienne o grubości 14 cm w układzie poprzeczno-podłużnym, a w budynkach typu BSK – prefabrykowane bloki kanałowe o grubości 24 cm w układzie poprzecznym (brak ściany podłużnej). W obu typach budynków ściany osłonowe wykonane są z bloczków gazobetonowych o grubości 24 cm. W budynkach C/MBY/V ściany piwnic są betonowe monolityczne o grubości 38 cm, a w budynkach typu BSK – z prefabrykowanych bloczków betonowych o grubości 24 – 38 cm. W obu typach budynków stropy wykonane są z żelbetowych płyt kanałowych o grubości 24 cm. Rzuty poziome i dane o wysokości budynków pokazano odpowiednio na rys. 1 (jeden segment) i rys.2 .



Rys. 1. Rzut poziomy i przekrój pionowy budynku wielkopłytowego typu C/MBY/V (jeden segment)

Wymienione budynki posadowione są bezpośrednio na gruncie poprzez ławy. Przekroje geologiczne pod budynkami C/MBY/V(I)-(III) są zróżnicowane. Oba budynki BSK posadowione są na rumoszu wapiennym, przechodzącym w skałę miękką (wapień).



Rys. 2. Rzut poziomy i przekrój pionowy budynku wieloblokowego typu BSK

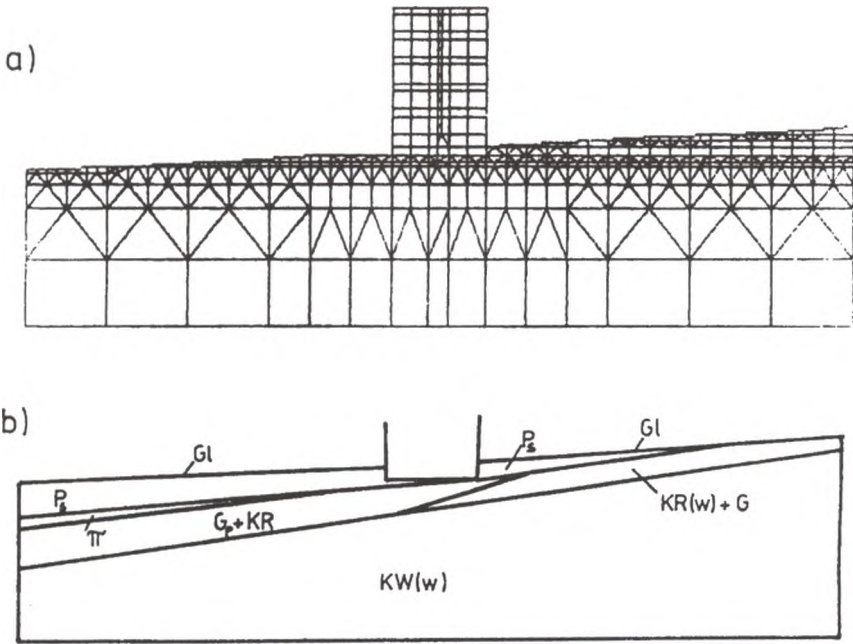
### 3. CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH BADANYCH BUDYNKÓW

#### 3.1. *Analityczne wyznaczenie podstawowych częstotliwości drgań własnych obiektów przy zastosowaniu przestrzennego modelu dynamicznego*

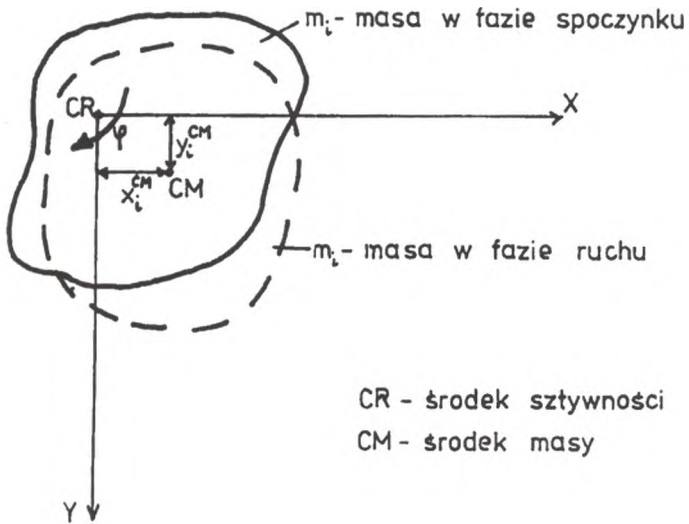
W literaturze, dla omawianego typu budynków często przyjmuje się modele dyskretne (por. m.in. [3, 4, 5, 6]), co pozwala na posłużenie się wygodnym w obliczeniach rachunkiem macierzowym. W niniejszej pracy analizowano dyskretny model przestrzenny utworzony przez układ tarcz reprezentujących ściany nośne (analizowanych za pomocą MES), współdziałających ze sobą za pośrednictwem tarcz stropowych przegubowo połączonych ze ścianami (por. [5, 7]).

Przykładowo na rys. 3a pokazano siatkę MES dla jednej ze ścian (wraz z podłożem) budynku C/MBY/V(III), a na rys. 3b zamieszczono przekrój przez warstwy podłoża pod tą ścianą.

W rozpatrywanym modelu pominięto wpływ sił podłużnych. Założono pracę konstrukcji w zakresie sprężystym i niepodatność stropów w ich płaszczyźnie (potwierdzoną badaniami doświadczalnymi na obiektach rzeczywistych, por. też [5, 8]).



Rys. 3. a) Siatka MES ściany (wraz z podłogiem) budynku C/MBY/V (III)  
 b) Przekrój przez warstwy podłoża pod powyższą ścianą



Rys. 4. Ruch n-tej kondygnacji budynku w układzie współrzędnych (x,y)

Dyskretyzacji masy budynku dokonano w poziomach stropów przy obciążeniu stałym i 40% normowego obciążenia użytkowego [9]. Macierz bezwładności (mas) ma postać :

$$[M] = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n) \quad (3.1)$$

gdzie  $m_i$  – łączna masa skupiona w poziomie  $i$ -tego stropu,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  
 $n$  – liczba kondygnacji.

Ogólne równanie macierzowe ruchu układu o  $3n$  stopniach swobody ( $n$  oznacza liczbę kondygnacji) można zapisać (za np. Veres'em [6]) w układzie współrzędnych  $(x, y)$  (por. rys. 4) w postaci:

$$[B] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{\dot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{p(t)\} \quad (3.2)$$

gdzie:  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  – macierze bezwładności, tłumienia, sztywności o wymiarach  $3n \times 3n$ , odpowiednio.

Ich postać jest następująca:

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] & -[Y_{CM}] \cdot [M] \\ [0] & [M] & [X_{CM}] \cdot [M] \\ -[Y_{CM}] \cdot [M] & [X_{CM}] \cdot [M] & [J_{CR}] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\phi}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\phi}] \\ [K_{\phi x}] & [K_{\phi y}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xy}] & [C_{x\phi}] \\ [C_{yx}] & [C_{yy}] & [C_{y\phi}] \\ [C_{\phi x}] & [C_{\phi y}] & [C_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Przy czym:

$[M]$  – diagonalna macierz ( $n \times n$ ) o postaci (3.1)

$[J_{CR}]$  – diagonalna macierz ( $n \times n$ ) zawierająca masowe momenty bezwładności od mas na każdej kondygnacji względem początku układu współrzędnych (CR)

$[J_{CR}]$  ma postać:

$$[J_{CR}] = \begin{bmatrix} J_{CR1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{CR2} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & J_{CRn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$[X_{CM}], [Y_{CM}]$  – diagonalne macierze ( $n \times n$ ) zawierające współrzędne środka masy (CM) w poziomach poszczególnych kondygnacji

$$[X_{CM}] = \begin{bmatrix} x_1^{CM} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{CM} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & x_n^{CM} \end{bmatrix}, [Y_{CM}] = \begin{bmatrix} y_1^{CM} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & y_2^{CM} & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & y_n^{CM} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$\{X\}, \{\dot{X}\}, \{\ddot{X}\}$  – wektor ( $3n$ ) odpowiednio przemieszczeń, prędkości, przyspieszenia

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{y\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix}, \{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{y}\} \\ \{\dot{\phi}\} \end{Bmatrix}, \{\ddot{X}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

gdzie

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix}, \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix}, \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

$x_i, y_i, \phi_i$  – liniowe przemieszczenie w kierunku  $x, y$  i kąt obrotu w poziomie  $i$ -tej kondygnacji, odpowiednio.

Wektory  $\{\dot{x}\}, \{\dot{y}\}, \{\dot{\phi}\}, \{\ddot{x}\}, \{\ddot{y}\}, \{\ddot{\phi}\}$  mają postać analogiczną, jak  $\{x\}, \{y\}, \{\phi\}$ .

Wektor sił działających na układ  $\{p(t)\}$  ma postać:

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} \{p_x(t)\} \\ \{p_y(t)\} \\ \{M(t)\} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

i

$$\{p_x(t)\} = \begin{Bmatrix} p_{1x}(t) \\ p_{2x}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{nx}(t) \end{Bmatrix}, \{p_y(t)\} = \begin{Bmatrix} p_{1y}(t) \\ p_{2y}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{ny}(t) \end{Bmatrix}, \{M(t)\} = \begin{Bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ M_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$p_{ix}(t), p_{iy}(t), M_i(t)$  – odpowiednio siły poziome i moment skręcający działające w poziomie  $i$ -tej kondygnacji, zredukowane do początku układu współrzędnych (CR).

Jeśli w modelu uwzględnimy się, przy analizie drgań w danym kierunku, tylko elementy nośne równoległe do kierunku drgań (por. np. [5,8,10]), to macierz sztywności  $[K]$  przyjmie postać:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [0] & [0] \\ [0] & [K_{yy}] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

gdyż  $[K_{xy}] = [K_{x\phi}] = [K_{yx}] = [K_{y\phi}] = [K_{\phi x}] = [K_{\phi y}] = [0]$ .

Macierze sztywności dla kierunków  $x$  i  $y$  określono wg zależności :

$$[K] = \sum_{j=1}^m [K_j] = \sum_{j=1}^m [D_j]^{-1} \quad (3.13)$$

gdzie:  $m$  – liczba ścian nośnych w analizowanym kierunku (poprzecznym albo podłużnym)

$[K_j]$  – macierz sztywności  $j$ -tej tarczy modelu odpowiednio w kierunku  $x$  lub  $y$ ,

$[D_j]$  – macierz podatności  $j$ -tej tarczy modelu odpowiednio w kierunku  $x$  lub  $y$ .

Macierze sztywności  $[K_{xx}]$  i  $[K_{yy}]$  w kierunku  $x$  i  $y$  mogą być wykorzystane do utworzenia macierzy  $[K_{\phi\phi}]$ . Jej elementy mają postać:

$$k_{ij}^{\phi\phi} = \sum_q [k_{ij}^{xx}]_q \cdot y_q^2 + \sum_r [k_{ij}^{yy}]_r \cdot x_r^2 + \sum_q \sum_r [q_{ij}]_{rq} \quad (3.14)$$

gdzie  $k_{ij}^{\phi\phi}$ ,  $k_{ij}^{xx}$ ,  $k_{ij}^{yy}$  – elementy odpowiednio macierzy  $[K_{\phi\phi}]$ ,  $[K_{xx}]$ ,  $[K_{yy}]$ ,  
 $q, r$  – liczba ścian nośnych odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ ,  
 $x_r, y_q$  – odległości ścian nośnych od środka sztywności CR,  
 $q_{ij}$  – element macierzy sztywności skręcania dla pojedynczej ściany.

Ze względu na bardzo mały wpływ ostatniego członu prawej strony zależności (3.14), pominięto go przy tworzeniu macierzy  $[K_{\phi\phi}]$  (por. m.in. [11, 12]).  
 Równanie drgań własnych ma postać:

$$[B] \cdot \{\ddot{X}\} + [K] \cdot \{X\} = \{0\} \quad (3.15)$$

Biorąc pod uwagę (3.3), (3.12) i (3.8) można równanie drgań własnych (3.15) zapisać w postaci trzech sprzężonych równań macierzowych:

$$\begin{aligned} [M] \cdot \{\ddot{x}\} - [Y_{CM}] \cdot [M] \cdot \{\ddot{\phi}\} + [K_{xx}] \cdot \{x\} &= \{0\} \\ [M] \cdot \{\ddot{y}\} + [X_{CM}] \cdot [M] \cdot \{\ddot{\phi}\} + [K_{yy}] \cdot \{y\} &= \{0\} \\ -[Y_{CM}] \cdot [M] \cdot \{\ddot{x}\} + [X_{CM}] \cdot [M] \cdot \{\ddot{y}\} + [J_{CR}] \cdot \{\ddot{\phi}\} + [K_{\phi\phi}] \cdot \{\phi\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

W przypadku, gdy środek sztywności pokrywa się ze środkiem masy, układ równań (3.16) ulegnie uproszczeniu ( $[X_{CM}] = [Y_{CM}] = [0]$ ) i będzie układem równań rozprzężonych opisujących kolejno drgania własne postępowe w dwóch kierunkach oraz skrętne drgania własne.

Rozwiązanie równania (3.15) przewiduje się w postaci harmoniczej i zakłada się:



$$\{\ddot{X}\} = -\omega^2 \{X\} \quad (3.17)$$

W związku z tym równanie (3.15) transformuje się do:

$$([K] - \omega^2 [B]) \{X\} = \{0\} \quad (3.18)$$

Ze względu na obliczenia korzystne jest takie przekształcenie równania (3.18), aby problem wyznaczenia częstotliwości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań własnych sprowadzić do zagadnienia wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej. W tym celu macierz [B] poddać należy tzw. rozkładowi Choleskiego, tzn. przedstawić ją jako iloczyn dwóch macierzy:

$$[B] = [L] \cdot [L]^T \quad (3.19)$$

gdzie

$$[L] = [L]^T = \begin{bmatrix} [M]^{\frac{1}{2}} & [0] & [0] \\ [0] & [M]^{\frac{1}{2}} & [0] \\ -[Y_{CM}][M]^{\frac{1}{2}} & [X_{CM}][M]^{\frac{1}{2}} & [J_{CR}] - [X_{CM}]^T [X_{CM}] + [Y_{CM}]^T [Y_{CM}][M]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

gdzie  $[ ]^{1/2}$  oznacza, że każdy element macierzy diagonalnej jest pierwiastkowany. Wtedy (3.18) przyjmie postać:

$$([K] - \omega^2 [L][L]^T) \{X\} = \{0\} \quad (3.21)$$

i dalej

$$[[K]([L]^T)^{-1} - \omega^2 [L]][L]^T \{X\} = \{0\} \quad (3.22)$$

$$[L][L]^{-1} [K]([L]^T)^{-1} - \omega^2 [I]][L]^T \{X\} = \{0\} \quad (3.23)$$

Oznaczmy:

$$[L]^{-1} [K]([L]^T)^{-1} = [S] \quad (3.24)$$

$$[L]^T \{X\} = \{X_1\} \quad (3.25)$$

Ostatecznie więc otrzymamy:

$$[L]([S] - \omega^2 [I])(X_1) = \{0\} \quad (3.26)$$

Tak więc otrzymano postać równania, w którym  $\omega^2$  jest wartością własną macierzy symetrycznej  $[S]$ , zaś  $\{X_1\}$  jej wektorem własnym. Zatem  $\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2}$  a wektor postaci drgań własnych odpowiadający i-tej częstotliwości ma postać:

$$\{X\} = [[L]^T]^{-1} \cdot \{X_1\} \quad (3.27)$$

Wyniki obliczeń częstotliwości drgań własnych analizowanych budynków przy wykorzystaniu wyżej opisanego ich przestrzennego modelu i uwzględnieniu podatności podłoża zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Obliczone częstotliwości drgań własnych przestrzennego modelu tarczowego budynków C/MBYV(I)-(III) i BSK(I),(II)

Budynek	Kier. poprzeczny		Kier. podłużny		Drgania skrętne	
	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]
C/MBYV(I)	5.80	24.90	4.33	16.56	6.68	27.75
C/MBYV(II)	5.57	24.58	4.22	16.43	6.38	27.23
C/MBYV(III)	4.76	23.11	3.70	15.57	5.51	25.64
BSK(I),(II)	6.17	25.08	4.10	14.92	6.99	27.98

### 3.2. Wyznaczone doświadczalnie częstotliwości drgań własnych analizowanych budynków

Badania budynków prowadzono w skali naturalnej przy wykorzystaniu kilku sposobów wzbudzania drgań: odstrzały materiału wybuchowego w pobliskich kamieniołomach, działanie wiatru, rytmiczne kotłowanie się ludzi na górnej kondygnacji. Główną uwagę skupiono na pomiarze składowych poziomych drgań budynków. Mierzono je w dwu wzajemnie prostopadłych kierunkach równoległych do osi poprzecznej i podłużnej budynków. Budynki badane były wielokrotnie (por. [13, 14]). W tabeli 2 zestawiono otrzymane doświadczalnie wartości częstotliwości postępowych drgań własnych omawianych budynków. W przypadku badanych budynków prefabrykowanych pięciokon-

dygnacyjnych nie udało się zaobserwować swobodnych drgań skrętnych, stąd poświęcono im mniej uwagi.

Tabela 2

Wartości podstawowych częstotliwości postępowych drgań własnych badanych budynków w [Hz]

Budynek	$f_1$ [Hz]	
	kierunek poprzeczny	kierunek podłużny
C/MBY/V(I)	5.8	5.2
C/MBY/V(II)	5.4	4.7
C/MBY/V(III)	4.4 <sup>1)</sup> 4.8 <sup>2)</sup>	4.3 <sup>1)</sup> 4.3 <sup>2)</sup>
BSK(I),(II)	6.4 - 6.5 <sup>3)</sup>	4.2 - 4.4 <sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> dla segmentu 1; <sup>2)</sup> dla segmentu 2, <sup>3)</sup> te same wartości w obu segmentach

Stwierdzono, że przy zastosowanych źródłach drgań badane budynki praktycznie drgają tylko z pierwszą częstotliwością drgań własnych, wyjątkowo rzadko pojawia się druga częstotliwość. Po odstrzałach z małymi ładunkami mogą być wzbudzone drgania z drugimi częstotliwościami (zanikają one zwykle już w fazie drgań wymuszonych), ale ich amplitudy są bardzo małe i drgania te trwają bardzo krótko (kilka okresów drgań). Stąd trudno je dokładnie określić.

Jak już wspomniano, pomiarów drgań badanych budynków dokonywano wielokrotnie: w budynkach typu BSK w okresie pięciu lat, a w budynkach typu C/MBY/V w okresie 3 lat i później po 10-letniej przerwie. Mimo że w tym czasie budynki te podlegały drganiom wzbudzonym odstrzałami w sąsiednim kamieniołomie (średnio raz w tygodniu), to ich właściwości dynamiczne nie uległy w tym okresie zmianie. Nie ma więc degradacji sztywności tych budynków.

### 3.3. Porównanie wyników analizy teoretycznej z wynikami badań doświadczalnych

W celu określenia przydatności rozważanego w p. 3.1. przestrzennego modelu dynamicznego, obliczono procentowe różnice w podstawowych częstotliwościach drgań własnych uzyskanych z badań doświadczalnych (średnich z przedziału – w przypadku, gdy udało się określić tylko pasmo dominujących częstotliwości drgań budynku) i z obliczeń analizowanych budynków. Stwierdzono, że w większości przypadków różnice te nie przekraczają kilku procent, a różnica maksymalna wynosi 17% (budynek C/MBY/V(I) – kierunek podłużny). Zatem przyjęty, stosunkowo prosty, przestrzenny model dynamiczny budynków pozwala na obliczenie ich podstawowych

częstotliwości drgań własnych z wystarczającą dokładnością dla praktycznych obliczeń.

#### 4. WNIOSKI

W świetle badań eksperymentalnych w skali naturalnej i rozważań teoretycznych pięciokondygnacyjnych ścianowych budynków prefabrykowanych stwierdzono, że zaproponowany model przestrzenny pozwala na określenie właściwości dynamicznych ww. budynków z zadowalającą w praktyce dokładnością. Obliczone wartości częstotliwości drgań własnych obiektów są bardzo bliskie otrzymanym z pomiarów.

#### LITERATURA

- [1] Stojek Z.: *Płaskie drgania własne pręta dwuwarstwowego jako modelu wielokondygnacyjnej konstrukcji*. AIL, nr 3/1980, s.533-545.
- [2] Stojek Z., Ziemiański L.: *Dwuwymiarowe modele kontynuualne wielokondygnacyjnych konstrukcji ramowych*, Zeszyty Naukowe AGH, nr 942, t.1, z.4, Kraków 1982, s.67-91.
- [3] Ciesielski R.: *Ocena szkodliwości wpływów dynamicznych w budownictwie*. Arkady, Warszawa 1973.
- [4] Juhasova E.: *Posobenie seizmických pohybov na stavebne konstrukcie*. VEDA, Vydavateľstvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1985.
- [5] Langer J., Kłasztorny M.: *Wpływ drgań podłoża na budynki wieloblokowe. Konf.: Metody doświadczalnych badań właściwości mechanicznych zrealizowanych konstrukcji inżynierskich*. Kraków-Janowice 1977, s.43-52.
- [6] Verteš G.: *Structural dynamics*. Akademiai Kiado, Budapest 1985.
- [7] Maciąg E., Kuźniar K., Tatara T.: *Zastosowanie analizy modalnej do oceny drgań prefabrykowanych budynków podlegających wymuszeniom kinematycznym*. AIL, tom XXXII, z.1/1986, s.129-139.
- [8] Rutenberg A.: *Approximate natural frequencies for coupled shear walls*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., vol.4, 1975, s.95-100.
- [9] PN-85/B-02170. *Ocena szkodliwości drgań przekazywanych przez podłoże na budynki*.
- [10] Korczyński J.L. i in.: *Osnovy projektirovania zdaniy w sejsmiczeskich rajonach*, Gosstrojizdat, Moskwa 1961.
- [11] Kan C.L., Chopra A.K.: *Effects of torsional coupling on earthquake forces in buildings*. J.Struct.Div., vol. 103, ST4, April 1977.
- [12] Kan C.L., Chopra A.K.: *Elastic earthquake of torsionally coupled buildings*. J.Earthq.Eng.Struct.Div., vol.5, 1977.
- [13] Kuźniar K.: *Właściwości dynamiczne ścianowych budynków prefabrykowanych o średniej wysokości z uwzględnieniem podatności podłoża*. IMB PK, praca doktorska 1991.
- [14] Maciąg E.: *Experimental evaluation of changes of dynamic properties of buildings on different grounds*. Earthq. Eng. Struct.Dyn., vol.14, 1986, s.925-932.