ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 196 Prace Matematyczne XV 1998

Zenon Moszner

Sur un problème de Marley

Résumé. On donne une méthode de la construction des solutions du système des équations fonctionnelles liées avec la théorie de l'aggrégation ([3]) et de leur généralisation.

J. Aczél pendant le $33^{\text{ème}}$ ISFE en 1995 a formulé ([2]) le problème suivant de A. A. J. Marley, lié avec la théorie de l'agrégation ([3]).

Soit $\mathbb{R}_{++} = (0, \infty)$. Donner toutes les fonctions F, H, G telles que $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $H = (H_1, \ldots, H_n)$, $F_j : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow (0,1)$, $H_j : (0,1)^{mn} \longrightarrow (0,1)$ $(j = 1, \ldots, n)$, $G : \mathbb{R}^m_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ et

$$\begin{aligned} &H\left(F\left(x_{11}, \ldots, x_{1n}\right), \ldots, F\left(x_{m1}, \ldots, x_{mn}\right)\right) \\ &\quad = F\left(G\left(x_{11}, \ldots, x_{m1}\right), \ldots, G\left(x_{1n}, \ldots, x_{mn}\right)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = \sum_{j=1}^{n} H_j = 1, \tag{2}$$

$$\exists\, \psi : \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++} : \ F\left(\alpha z_1, \ldots, \alpha z_n\right) = \psi(\alpha) F\left(z_1, \ldots, z_n\right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \exists\, \Phi : \mathbb{R}^m_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++} : \ &G\left(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_m x_m\right) \\ &= \Phi\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) G\left(x_1, \ldots, x_m\right). \end{aligned} \tag{4}$$

On considère aussi la condition complementaire suivante:

$$\begin{aligned} &H\left(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}\right) \\ &\quad = F\left(G\left(x_{11}, \ldots, x_{m1}\right), \ldots, G\left(x_{1n}, \ldots, x_{mn}\right)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

G. Maksa a donné une réponse à ce problème ([5]). Les fragments de cette note se trouvent dans [3].

AMS (1991) subject classification: 39B22, 39B62.

1. Une méthode de la construction des solutions des équations (1), (2), (3) et (4)

L'implication suivante a lieu d'après (1)

$$\begin{aligned} F(x_{\nu 1},\ldots,x_{\nu n}) = F(y_{\nu 1},\ldots,y_{\nu n}) \quad \text{pour} \quad \nu = 1,\ldots,m \Longrightarrow \\ F(G(x_{11},\ldots,x_{m1}),\ldots,G(x_{1n},\ldots,x_{mn})) \\ = F(G(y_{11},\ldots,y_{m1}),\ldots,G(y_{1n},\ldots,y_{mn})). \end{aligned} \tag{6}$$

Nommons par un *niveau* chaque ensemble de la forme $F^{-1}(\{y\})$, où $y \in F(\mathbb{R}^n_{++})$. Ces niveaux forment une décomposition de l'ensemble $\mathbb{R}^n_{++}$. Si G est donnée, nous pouvons définir par cette fonction une opération $*$ sur $(\mathbb{R}^n_{++})^m$ de la façon suivante. Soit $x_\nu = (x_{\nu 1},\ldots,x_{\nu n})$ pour $\nu = 1,\ldots,m$ et posons

$$x_1 * x_2 * \ldots * x_m := G(1,\ldots,1)^{-1}\left(G(x_{11},\ldots,x_{m1}),\ldots,G(x_{1n},\ldots,x_{mn})\right).$$

On peut donc intérpreter l'implication (6) de la manière suivante. La fonction F doit être telle que les niveaux de cette fonction forment la décomposition invariante par rapport à l'opération $*$, c. à d. si x_ν et $y_\nu = (y_{\nu 1},\ldots,y_{\nu n})$ sont dans le même niveau pour $\nu = 1,\ldots,m$, alors $x_1 * \cdots * x_m$ et $y_1 * \cdots * y_m$ sont aussi dans le même niveau.

Il résulte d'après les conditions (2) et (3) que chaque demi-droite dans $\mathbb{R}^n_{++}$ qui passe par le point $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ doit être contenue dans un niveau de F. Puisque G remplit la condition (4) le sous-espace S de l'espace $\mathbb{R}^n_{++}$ pour lequel $x_n = 1$ est invariante par rapport à l'opération $*$ et de là les réstrictions des niveaux de F au sous-espace S forment la décomposition de S invariante par rapport à $*$.

Retournant nos considérations nous pouvons construire chaque solution du problème en considération par la méthode suivante. Prenons une solution arbitraire G de (4) et une décomposition de S invariante par rapport à $*$. Considérons la fonction F de S dans $(0,1)$, stable sur chaque composante de la décomposition de S et telle que (2) est remplie et en autre arbitraire. Prolongeons cette fonction F sur $\mathbb{R}^n_{++}$ de la manière qu'elle est constant sur chaque demi-droite de $\mathbb{R}^n_{++}$ passante par $(0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Enfin définissons H par (1) sur $[F(\mathbb{R}^n_{++})]^m$ et arbitrairement sur $(0,1)^{mn} \setminus [F(\mathbb{R}^n_{++})]^m$ pourvu que (2) ait lieu. La fonction H est bien définie puisque l'implication (6) a lieu.

Il résulte de nos considération que le problème examiné est équivalent au problème de déterminer toutes les décompositions de S invariantes par rapport à $*$, c. à d. toutes les relations d'équivalence invariantes par rapport à $*$ (toutes les congruences).

Nous donnerons quelques exemples.

EXEMPLE 1

Soit G arbitraire remplissante (4).

a) Si nous prenons S comme la seule composante de S, cette décomposition est évidemment invariante par rapport à $*$. Cela désigne que $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ est constante, donc $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = (c_1, \ldots, c_n)$, où $c_\nu \in (0,1)$ pour $\nu = 1, \ldots, n$ et $c_1 + \cdots + c_n = 1$. La fonction H est donnée par (1) seulement dans le point $p_0 = (c_1, \ldots, c_n, \ldots, c_1, \ldots, c_n) \in (0,1)^{mn}$ par $H(p_0) = (c_1, \ldots, c_n)$ et H sur $(0,1)^{mn} \setminus \{p_0\}$ est arbitraire, pourvu que (2) ait lieu.

b) La décomposition S aux ensembles qui n'ont qu'un point est aussi invariante. Pour la fonction $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ on peut et il faut prendre dans ce cas une fonction injective arbitraire, pourvu que $\sum_{j=1}^{n} F_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = 1$ sur S. La fonction H est définie par (1) sur $(F(S))^m$ et en autre sur $(0,1)^{mn}$ elle est arbitraire, pourvu que (2) ait lieu.

En particulier si nous prenons $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ de la forme

$$F_j(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = a_j x_j \left(1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu x_\nu\right)^{-1} \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, n-1,$$

$$F_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu x_\nu\right)^{-1},$$

où $a_j \in \mathbb{R}_{++}$, elle est injective et pour H nous recevons

$$\begin{aligned} &H(u_{11}, \ldots, u_{1n}, \ldots, u_{m1}, \ldots, u_{mn}) \\ &= F\left(G\left(\frac{1}{a_1}\frac{u_{11}}{u_{1n}}, \ldots, \frac{1}{a_1}\frac{u_{m1}}{u_{mn}}\right), \ldots, G\left(\frac{1}{a_{n-1}}\frac{u_{1n-1}}{u_{1n}}, \ldots, \frac{1}{a_{n-1}}\frac{u_{mn-1}}{u_{mn}}\right), 1\right), \end{aligned}$$

où $u_{ij} \in (0,1)$ et $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1$ pour $i = 1, \ldots, m$. La fonction H est en autre arbitraire sur $(0,1)^{mn}$, pourvu que (2) ait lieu.

Si la fonction F remplit (2) et (3) elle doit être de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f\left(x_1 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1}, \ldots, x_n \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1}\right).$$

On suppose dans le théorème de G. Maksa ([5]) que la fonction f est injective. Remarquons que cette injectivité est équivalente à l'injectivité de la fonction $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$. En effet nous avons la liaison suivante entre ces deux fonctions

$$F\left(x_1,\ldots,x_{n-1},1\right)=f\left(\frac{x_1}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}x_l},\ldots,\frac{x_{n-1}}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}x_l},\frac{1}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}x_l}\right).$$

Si donc $F\left(x_1,\ldots,x_{n-1},1\right)=F\left(y_1,\ldots,y_{n-1},1\right)$ et f est injective, alors

$$\frac{x_\nu}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}x_l}=\frac{y_\nu}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}y_l}\quad\text{pour}\quad\nu=1,\ldots,n-1$$

et

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}x_l}=\frac{1}{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}y_l},$$

d'où $x_\nu=y_\nu$. Inversement si $f\left(z_1,\ldots,z_n\right)=f\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ et $\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu=1$, alors $F\left(z_1,\ldots,z_n\right)=F\left(u_1,\ldots,u_n\right)$, d'où puisque $F\left(x_1,\ldots,x_n\right)=F\left(\frac{x_1}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n},1\right)$ nous avons

$$F\left(\frac{z_1}{z_n},\ldots,\frac{z_{n-1}}{z_n},1\right)=F\left(\frac{u_1}{u_1},\ldots,\frac{u_{n-1}}{u_n},1\right).$$

Si la fonction $F\left(x_1,\ldots,x_{n-1},1\right)$ est injective il en résulte que $\frac{z_\nu}{z_n}=\frac{u_\nu}{u_n}$ pour $\nu=1,\ldots,n-1$, d'où $z_\nu=au_\nu$ pour $\nu=1,\ldots,n-1$ et $a=\frac{z_n}{u_n}$. Aussi $z_n=au_n$. Nous avons donc

$$1=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}z_\nu=a\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu=a,$$

alors $z_\nu=u_\nu$, c.q.f.d.

Exemple 2

Soit $G\left(x_1,\ldots,x_m\right)=x_1^{a_1}\ldots x_m^{a_m}$, où $a_1,\ldots,a_m$ sont des nombres entiers ($=\mathbb{Z}$) et soit $n=2$. L'ensemble $E=\{2^c;c\in\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_{++}$. Décomposons S aux ensembles $C\times\{1\}$, où $C\in\mathbb{R}_{++}/E$ (le groupe quotient). Cette décomposition est invariante. Soit g_1 une bijection de $\mathbb{R}_{++}/E$ sur $(0,1)$ et $g(x)=g_1(C)$ pour $x\in C$. En posant $F(x_1,1)=(g(x_1),1-g(x_1))$ nous constatons que les composantes de notre décomposition de S forment les niveaux de F. La fonction H est par (1) définie sur $[F(S)]^m=[\{(z,1-z);z\in(0,1)\}]^m$ de la manière suivante:

$$H\left(z_1, 1-z_1, z_2, 1-z_2, \ldots, z_m, 1-z_m\right) \\ = \left(g\left(\prod_{i=1}^{m}\left[g^{-1}(z_i)\right]^{a_i}\right), 1-g\left(\prod_{i=1}^{m}\left[g^{-1}(z_i)\right]^{a_i}\right)\right),$$

où $g^{-1}(z_i)$ désigne quelconque élément u_i pour lequel $g(u_i) = z_i$ (H ne dépend pas du choix de u_i puisque la famille des niveaux de F est invariante) et H est arbitraire sur $(0,1)^{2m} \setminus [F(S)]^m$, pourvu que (2) ait lieu.

En particulier nous pouvons prendre $g_1(C) = g_1\,(Ea) = h(a)$, où $a \in [1,2)$ et $h(a) = -a + 3 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour $a \in \left[2 - \frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k+1}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. La fonction h est une bijection de $[1,2)$ sur $(0,1)$ et pour $g^{-1}(z_i)$ il suffit prendre $h^{-1}(z_i)$.

Exemple 3

Soit à présent G comme dans l'exemple précédent et $n = 2$. En remplaçant E dans cet exemple par l'ensemble des nombres rationnels positifs nous recevons un autre exemple. Si dans G comme plus haut nous supposons seulement que $a_1, \ldots, a_m$ soient rationnels et remplaçons E par l'ensemble des nombres algébriques positifs nous recevons encore un exemple.

2. Une généralisation du théorème de G. Maksa

Théorème

Si (1), (2), (3), (4) *et* (5) *ont lieu et* $F\,(z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)$ *est injective, dans ce cas*

$$G\,(y_1, \ldots, y_m) = c\,\Phi\,(y_1, \ldots, y_m) \tag{7}$$

pour un $c \in \mathbb{R}_{++}$, *où* Φ *remplit la condition*

$$\Phi\,(x_1 y_1, \ldots, x_m y_m) = \Phi\,(x_1, \ldots, x_m)\,\Phi\,(y_1, \ldots, y_m), \tag{8}$$

$$F_\nu\,(z_1, \ldots, z_n) = \frac{f_\nu\left(\dfrac{z_1}{z_n}, \ldots, \dfrac{z_{n-1}}{z_n}\right) z_\nu}{\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu\left(\dfrac{z_1}{z_n}, \ldots, \dfrac{z_{n-1}}{z_n}\right) z_\mu} \quad \textit{pour} \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

où $f_\nu : \mathbb{R}_{++}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ *et*

$$\left[f_\nu(\mathbb{R}_{++}^{n-1})\right]^m \subset \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_{++}^m : \; G\,(y_1, \ldots, y_m) = G\,(1, \ldots, 1)\} \tag{10}$$

pour $\nu = 1, \ldots, n$ *et* $H = (H_1, \ldots, H_n)$, *où*

$$H_\nu(x_{11},\dots,x_{mn}) = \frac{f_\nu\left(\Phi\left(\frac{x_{11}}{x_{1n}},\dots,\frac{x_{m1}}{x_{mn}}\right),\dots,\Phi\left(\frac{x_{1n-1}}{x_{1n}},\dots,\frac{x_{mn-1}}{x_{mn}}\right)\right)G(x_{1\nu},\dots,x_{m\nu})}{\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu\left(\Phi\left(\frac{x_{11}}{x_{1n}},\dots,\frac{x_{m1}}{x_{mn}}\right),\dots,\Phi\left(\frac{x_{1n-1}}{x_{1n}},\dots,\frac{x_{mn-1}}{x_{mn}}\right)\right)G(x_{1\mu},\dots,x_{m\mu})}. \tag{11}$$

Inversement si les fonctions G, Φ, F et H remplissent les conditions (7) - (11) *elles satisfont aussi aux conditions* (1) - (5).

Démonstration. En posant $x_1 = \dots = x_n = 1$ dans (4) et en désignant $c = G(1,\dots,1)$ nous recevons (7) et (8). Nous avons $\psi(\alpha) \equiv 1$ d'après (2) et (3), d'où

$$F(z_1,\dots,z_n) = F\left(\frac{z_1}{z_n},\dots,\frac{z_{n-1}}{z_n},1\right). \tag{12}$$

Nous recevons d'après (1) et (5)

$$\begin{aligned} &F(G(F_1(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_1(x_{m1},\dots,x_{mn})),\\ &\dots,G(F_n(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_n(x_{m1},\dots,x_{mn})))\\ &\quad= F(G(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots,G(x_{1n},\dots,x_{mn})), \end{aligned} \tag{13}$$

d'où d'après (12), (7), (8) et l'injectivité de $F(z_1,\dots,z_{n-1},1)$ on a pour $\nu = 1,\dots,n-1$

$$G\left(\frac{x_{1n}F_\nu(x_{11},\dots,x_{1n})}{x_{1\nu}F_n(x_{11},\dots,x_{1n})},\dots,\frac{x_{mn}F_\nu(x_{m1},\dots,x_{mn})}{x_{m\nu}F_n(x_{m1},\dots,x_{mn})}\right) = G(1,\dots,1).$$

En désignant

$$f_\nu(z_1,\dots,z_{n-1}) = \frac{F_\nu(z_1,\dots,z_{n-1},1)}{z_\nu F_n(z_1,\dots,z_{n-1},1)}$$

nous constatons que (10) a lieu. De là

$$F_\nu(z_1,\dots,z_{n-1},1) = z_\nu f_\nu(z_1,\dots,z_{n-1})F_n(z_1,\dots,z_{n-1},1)$$

et d'après (2)

$$F_n(z_1,\dots,z_{n-1},1) = \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} z_\nu f_\nu(z_1,\dots,z_{n-1})\right]^{-1}.$$

Si nous prenons $f_n(z_1,\dots,z_{n-1}) \equiv 1$ nous recevons (9) et d'après (5) nous avons (11).

Pour démontrer la deuxième partie du théorème il suffit vérifier seulement (1) et pour cela il suffit montrer (13), que résulte de (7), (8) et (9), puisque d'après (10) on a

$$G\left(f_\nu\left(\frac{x_{11}}{x_{1n}},\ldots,\frac{x_{1n-1}}{x_{1n}}\right),\ldots,f_\nu\left(\frac{x_{m1}}{x_{mn}},\ldots,\frac{x_{mn-1}}{x_{mn}}\right)\right)=G(1,\ldots,1)$$

pour $\nu = 1,\ldots,n$.

REMARQUE 1

Si nous supposons que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_{++}\ [x\neq 1\Longrightarrow G(x,\ldots,x)\neq G(1,\ldots,1)], \tag{14}$$

dans ce cas d'après (10): $f_\nu(\mathbb{R}^{n-1}_{++})=\{1\}$, alors $f_\nu\equiv 1$, donc F et H ont la forme comme dans le théorème de Maksa. En particulier (14) a lieu si

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_{++}\ [G(x,\ldots,x)=x]. \tag{15}$$

Inversement si toutes les fonctions F et H remplissantes (1) et (5) ont les formes (9) et (11) avec $f_\nu\equiv 1$ dans ce cas (14) a lieu, puisque dans le cas contraire il suffit prendre dans (9) et (11) $f_1\equiv f_2\equiv\cdots\equiv f_{n-1}\equiv 1$ et $f_n\equiv x_0\neq 1$, où $G(x_0,\ldots,x_0)=G(1,\ldots,1)$ pour avoir une contradiction.

REMARQUE 2

Si nous supposons (14) nous constatons d'après la démonstration du théorème qu'on peut supposer dans ce théorème la condition (5) seulement pour $x_{\nu\mu}=x_{1\mu}$ ($\nu=2,\ldots,m$; $\mu=1,\ldots,n$).

REMARQUE 3

L'implication (14) a lieu si

$$G(x_1,\ldots,x_m)=cx_1^{a_1}\ldots x_m^{a_m}\qquad\text{et}\qquad\sum_{i=1}^m a_i\neq 0. \tag{16}$$

Dans ce cas nous recevons le théorème de G. Maksa ([5]). Si $\sum_{i=1}^m a_i=0$ nous avons les deux possibilités:

(a) au moins un a_i est $\neq 0$,

(b) $a_i=0$ pour $i=1,\ldots,m$.

Dans le cas (a) chaque ensemble $f_\nu(\mathbb{R}^{n-1}_{++})$ n'a qu'un seul point, alors $f_\nu\equiv k_\nu$ (const.) et en autre arbitraires. Dans le cas (b) les fonctions f_ν sont arbitraires.

REMARQUE 4

La supposition (14) est plus faible que les conditions (15) et (16). On peut ça montrer en considerant un homomorphisme $G(x_1,\ldots,x_m)$ de $(R^m_{++},\cdot)$ dans $(\mathbb{R}_{++},.)$ qui a comme le noyau les suites $(x_1,\ldots,x_m)$ des nombres algébriques pour lesquels $x_1x_2\cdots x_m=1$.

REMARQUE 5

La fonction $F(z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)$ ne doit pas être injective pour la fonction F donnée par (9). En effet si nous posons $f_1(z_1, 1, \ldots, 1) = \frac{1}{z_1}$ pour z_1 algèbrique et $f_\nu \equiv 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ en autre dans (9) nous recevons $F(z_1, 1, \ldots, 1) = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Dans ce cas nous prenons G tel que

$$\{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m_{++} : \ G(y_1, \ldots, y_m) = G(1, \ldots, 1)\} = A^m,$$

où A est le corps des nombres algèbriques. Si (14) a lieu ou si $G(y_1, \ldots, y_m) = cy_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m}$ la fonction $F(z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)$ est injective, sauf le cas $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

REMARQUE 6

Les fonctions f_ν dans (9) et (10) ne sont pas déterminées uniquement par les fonctions F et H, elles sont désignées avec précision jusqu'à une fonction multiplicative de $\mathbb{R}^n_{++}$ dans $\mathbb{R}_{++}$, indépendate de ν.

REMARQUE 7

Remarquons que le problème de Marley complété par (5) est équivalent au problème de la solution des équations (3), (4), (13) avec $\sum_{j=1}^n F_j = 1$, puisque si nous définissons H par (5) nous aurons (1).

3. Une généralisation de l'équation (13)

J. Aczél m'a posé le problème de la solution de l'équation

$$\begin{aligned} &K(L(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_1(x_{m1}, \ldots, x_{mn}),\\ &\ldots, L(F_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_n(x_{m1}, \ldots, x_{mn})))\\ &\qquad = F(G(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G(x_{1n}, \ldots, x_{mn})), \end{aligned} \tag{17}$$

où F et G sont comme plus haut, $K = (K_1, \ldots, K_n)$, $K_j : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow (0, 1)$, K satisfait aux conditions analogues que F dans (2) et (3) et $L : \mathbb{R}^m_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ remplit la condition analoque que G dans (4). Cette équation c'est une généralisation de l'équation (13).

Si G est une fonction stable ($G \equiv a$), dans ce cas on peut prendre $F : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow (0, 1)^n$ arbitraire, pourvu que (2) ait lieu et, pour L donnée, poser $K = F(a, \ldots, a)$ sur l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{L(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_1(x_{m1}, \ldots, x_{mn}),\\ &\quad \ldots, L(F_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_n(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) : \ x_{ij} \in \mathbb{R}_{++}\} \end{aligned}$$

et en autre arbitraire sur $\mathbb{R}^n_{++}$.

Je vais donner une idée de la solution de ce problème dans le cas si $F(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ et $K(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ soient injectives, $G(z_1,\ldots,z_m) = az_1^{a_1}\cdots z_m^{a_m}$, $L(z_1,\ldots,z_m) = bz_1^{b_1}\cdots z_m^{b_m}$ et G pas constante.

Nous avons d'après l'injectivité de $F(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ et $K(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$, en désignant

$$\Phi_\nu(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \frac{F_\nu(x_1,\ldots,x_{n-1},1)}{F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},1)}$$

pour $\nu = 1,\ldots,n-1$, équivalence suivante

$$\begin{aligned}&L(\Phi_k(x_{11},\ldots,x_{1n-1}),\ldots,\Phi_k(x_{m1},\ldots,x_{mn-1}))\\ &= L(\Phi_k(y_{11},\ldots,y_{1n-1}),\ldots,\Phi_k(y_{m1},\ldots,y_{mn-1}))\\ &\text{pour } k=1,\ldots,n-1\\ &\iff G(x_{1k},\ldots,x_{mk}) = G(y_{1k},\ldots,x_{mk})\\ &\qquad \text{pour } k=1,\ldots,n-1.\end{aligned} \tag{18}$$

Au moins a_ν dans G est $\neq 0$ (G n'est pas stable) et dans ce cas aussi $b_\nu \neq 0$ puisque dans le cas contraire si nous posons dans (18): $x_{\alpha\beta} = y_{\alpha\beta}$, $\beta = 1,\ldots,n-1$ et $\alpha = 1,\ldots,\nu-1,\nu+1,\ldots,m$ et $(x_{\nu 1},\ldots,x_{\nu n-1}) \neq (y_{\nu 1},\ldots,y_{\nu n-1})$ nous recevons que le membre gauche de (18) a lieu et le membre droit n'est pas vrai. Si $a_\nu = 0$ dans ce cas aussi $b_\nu = 0$, puisque dans le cas contraire d'après (18) Φ_k sont stable pour $k = 1,\ldots,n-1$. Puisque $\sum_{j=1}^n F_j = 1$ on a $F_n = \left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_k\right]^{-1}$, donc $F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ est aussi stable, alors $F_\nu(x_1,\ldots,x_{n-1},1) = F_n(x_1,\ldots,x_{n-1},1)\,\Phi_\nu(x_1,\ldots,x_{n-1})$ sont stables pour $\nu = 1,\ldots,n-1$, contrairement à l'injectivité de $F(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$. Supposons que $a_1 \neq 0$, donc $b_1 \neq 0$. Si nous posons dans (18) $y_{\alpha\beta} = 1$ pour $\alpha = 2,\ldots,m$ et $\beta = 1,\ldots,n-1$ et $y_{1\beta} = x_{1\beta}x_{2\beta}^{c_2}\cdots x_{m\beta}^{c_m}$, où $c_\nu = a_\nu a_1^{-1}$ $(\nu = 2,\ldots,m)$, nous voyons que le membre droite de l'équivalence (18) a lieu, donc d'après le membre gauche pour $k = 1,\ldots,n-1$

$$\begin{aligned}&e_k\,\Phi_k(x_{11}x_{21}^{c_2}\cdots x_{m1}^{c_m},\ldots,x_{1n-1}x_{2n-1}^{c_2}\cdots x_{mn-1}^{c_m})\\ &= \Phi_k(x_{11},\ldots,x_{1n-1})\,\Phi_k(x_{21},\ldots,x_{2n-1})^{d_2}\cdots\Phi_k(x_{m1},\ldots,x_{mn-1})^{d_m},\end{aligned} \tag{19}$$

où $d_\nu = b_\nu b_1^{-1}$ $(\nu = 2,\ldots,m)$ et $e_k \in \mathbb{R}_{++}$, alors Φ_k doivent être des solutions de l'équation comme plus haut. C'est une équation du type de Cauchy. Nous voyons que par le changement convenable des variables et des fonctions cherchées nous recevons l'équation linéaire (généralisée), dont la théorie est donnée p.ex. dans [1] p. 66-72 ou [4] p. 339-345. Dans la suite $F_k = F_n\cdot\Phi_k$ pour $k = 1,\ldots,n-1$, où $F_n = \left[1+\sum_{i=1}^{n-1}\Phi_i\right]^{-1}$, puisque $\sum_{j=1}^n F_j = 1$.

Il faut prendre les solutions Φ_k de (19) telles que $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})$ est injective puisque dans ce cas et seulement dans ce cas $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = (F_1, \ldots, F_n)$, où F_k sont définies comme plus haut, est injective.

Inversement on voit facilement que si $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ injective est construite comme plus haut, alors le membre gauche de (18) entraîne le membre droit. Si nous connaissons la fonction F nous receverons la fonction K par l'équation (17) et l'équivalence (18) nous assure que cette définition est correcte.

Travaux cités

[1] J. Aczél, *Lectures on Fonctional Equations and their Applications,* Academic Press, New York and London, 1966.

[2] J. Aczél, *Problems,* Aequationes Math. **51** (1996), 170-172.

[3] J. Aczél, G. Maksa, A. A. J. Marley, Z. Moszner, *Consistent aggregation of scale families of selection probabilities,* Math. Social Sci **33** (1997), 227-250.

[4] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.

[5] G. Maksa, *Remark,* Aequationes Math. **51** (1996), 175-177.

Ecole Normale Supérieure
Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Pologne