

ZBIGNIEW POWĄZKA

Sur une équation fonctionnelle associée à l'équation de Jensen

Résumé. Dans ce travail on considère la condition auprès de laquelle une équation (3) possède une solution qui n'est pas la solution identiquement égale 0. On désigne aussi d'intégrables solutions de l'équation (3) et on prouve des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de telles solutions.

1. Introduction

En considérant dans sa note [3] les problèmes concernant de la moyenne M. E. Wachnicki a obtenu l'équation fonctionnelle suivante

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\lambda \frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad (1)$$

où $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $\lambda \geq 0$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à chercher. Pour cet équation il a posé les questions suivantes:

1. Quel est la forme général des solutions de (1)?
2. Y a-t-il une relation entre ces solutions et les fonctions convexes ou concaves?
3. Quel est la forme générale des solutions de l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) F\left(\lambda \frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad (2)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et paire?

Dans cette note on considère l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) G\left(\frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad (3)$$

où $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. On détermine la solution générale de (3) dans la classe de fonctions localement intégrables sur I et on démontre que l'équation (3) possède une solution non-constante et localement intégrable dans I si et seulement si la fonction G est de la forme (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$G(t) = 1 \quad \text{ou} \quad G(t) = \cos(ct) \quad \text{ou} \quad G(t) = \operatorname{ch}(ct), \quad c > 0. \quad (4)$$

Il est facile de remarquer que l'équation (1) ainsi que (2) est un cas particulier de (3). De plus, si la fonction G prend la forme

$$G(x) = 1 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

l'équation (3) passe à l'équation fonctionnelle de Jensen:

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad (5)$$

dont la forme des solutions générales est bien connue ([2]).

2. Propriétés des solutions de l'équation (3)

On remarque que la fonction u définie par

$$u(x) = 0 \quad \text{pour } x \in I \quad (6)$$

est une solution de (3). Dans la suite on considérera que l'équation (3) possède des solutions différentes de (6).

THÉORÈME 1

Si l'équation (3) admet une solution non-nulle alors

$$G(0) = 1. \quad (7)$$

Démonstration. S'il l'on pose $y = x$ dans (3) on obtient

$$2u(x) = 2u(x)G(0), \quad x \in I$$

et ensuite

$$u(x)(1 - G(0)) = 0, \quad x \in I.$$

Puisque $u(x) \neq 0$ pour certain $x \in I$ alors la relation (7) a lieu.

La condition (7) est donc une condition nécessaire pour l'existence des solutions non-nulle de (3).

THÉORÈME 2

Supposons que $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition (7) et qu'il existe $x_0 \in \frac{1}{2}(I - I)$ tel que

$$G(x_0) \neq 1. \quad (8)$$

Dans ce cas, toute solution constante de (3) est de la forme (6).

Démonstration. Admettons dans (3)

$$u(x) = u(y) = u\left(\frac{x+y}{2}\right) = c.$$

On a

$$2c\left(1 - G\left(\frac{y-x}{2}\right)\right) = 0, \quad x, y \in I.$$

D'où et de (8) il résulte que $c = 0$ et par conséquent u est de la forme (6).

Passons maintenant à étudier des zéros de solutions de (3).

THÉORÈME 3

Supposons que $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition (7) et que

$$G(x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Si la fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (3) pour laquelle ils existent des points $x_1, x_2 \in I$ tels que

$$u(x_1) = u(x_2) = 0, \quad x_1 \neq x_2 \tag{10}$$

alors l'ensemble des zéros de la fonction u est dense dans I .

Démonstration. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (3). Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que la relation (10) a lieu.

Supposons que $x_1 \leq x_2$ et designons par B l'ensemble des zéros de u . On voit que B est non-vide car $x_1, x_2 \in B$. Posons

$$A_n = \left\{ x \in I : x = \frac{kx_1 + lx_2}{2^n}, \quad k + l = 2^n, \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \tag{11}$$

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n. \tag{12}$$

On va démontrer par récurrence que $A \subset B$. Pour $n = 0$ on a $k = 1, l = 0$ ou bien $k = 0, l = 1$ et alors $A_0 = \{x_1, x_2\}$. Par suite $A_0 \subset B$.

Supposons maintenant que

$$u(x) = 0 \quad \text{pour } x \in A_n. \tag{13}$$

On démontrera que

$$u(x) = 0 \quad \text{pour } x \in A_{n+1}. \tag{14}$$

En effet. Soit $x \in A_{n+1}$. On a

$$x = x_1 \text{ si } l = 0 \quad \text{ou} \quad x = x_2 \text{ si } k = 0,$$

ou

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + (2^n - 1)x_2}{2^n} + \frac{2^n x_2}{2^n} \right) \quad \text{si } k = 1, \text{ et } l > 0,$$

ou

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{(k-1)x_1 + (2^n - k + 1)x_2}{2^n} + \frac{x_1 + (2^n - 1)x_2}{2^n} \right) \quad \text{si } k > 1, \text{ et } l > 0.$$

D'où par hypothèse (13) de récurrence et en utilisant (3), (9), (10), (11) on obtient (14). Alors $A_n \subset B$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cela implique directement que $A \subset [x_1, x_2]$, $A \subset B$.

De la définition de l'ensemble A il résulte que l'ensemble A est dense dans $[x_1, x_2]$.

Posons

$$T_1 : A \ni x \mapsto 2x_1 - x, \quad (15)$$

$$T_2 : A \ni x \mapsto 2x_2 - x \quad (16)$$

et

$$B_1 = T_1(A), \quad B_2 = T_2(A).$$

Les applications T_1 et T_2 sont continues. D'où, compte tenu de la densité de l'ensemble A dans $[x_1, x_2]$ on a la densité des $B_1 \cap (a, x_1)$, $B_2 \cap (x_2, b)$ dans les intervalles (a, x_1) et (x_2, b) respectivement. On va démontrer que la fonction u est égale à zéro dans

$$(B_1 \cap (a, x_1)) \cup A \cup (B_2 \cap (x_2, b)).$$

Pour cela il suffit d'étudier la fonction u dans $(B_1 \cap (a, x_1)) \cup (B_2 \cap (x_2, b))$ car $A \subset B$. Soit donc $y \in B_1 \cap (a, x_1)$. Compte tenu de (15) on voit qu'il existe $x \in A$ tel que $\frac{x+y}{2} = x_1$. D'où et de (3) et (10) on a

$$u(y) = u(x) + u(y) = 2u(x_1)G\left(\frac{y-x}{2}\right) = 0.$$

De même, on obtient que $u(y) = 0$ pour $y \in B_2 \cap (x_2, b)$. Alors $(B_1 \cap (a, x_1)) \cup (B_2 \cap (x_2, b)) \subset B$. Puisque $B \subset (a, b)$ et l'ensemble $(B_1 \cap (a, x_1)) \cup A \cup (B_2 \cap (x_2, b))$ est dense dans (a, b) donc B est dense dans (a, b) .

REMARQUE 1

La supposition (9) du théorème 3 est essentielle.

En effet. Considerons l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \frac{y-x}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Cet équation prend la forme (3) si $G(z) = \cos z$ pour $z \in \mathbb{R}$. La condition (9) n'est pas donc satisfaite.

Il est facile de vérifier que la fonction u définie par $u(x) = \cos x$ est une solution dans \mathbb{R} de (17) et pour cette solution l'ensemble de zéros n'est pas dense dans \mathbb{R} .

Maintenant on va chercher des relations entre des solutions de (3) et des fonctions convexes (concaves) au sens Jensen.

THÉORÈME 4

Supposons que $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait au condition (7) et

$$G(x) \geq 1 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (3). Alors

(a) s'il existe un intervalle $I_0 \subset I$ tel que

$$u(x) \geq 0 \quad \text{pour } x \in I_0 \tag{19}$$

donc u est convexe dans I_0 au sens de Jensen,

(b) s'il existe un intervalle $I_1 \subset I$ tel que

$$u(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \in I_1 \tag{20}$$

donc u est concave dans I_1 au sens de Jensen.

Démonstration. Ad (a). Supposons qu'il existe un intervalle I_0 tel que (19) a lieu. D'où et de (18) on a

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right)G\left(\frac{y-x}{2}\right) \geq 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{pour } x, y \in I_0.$$

Par conséquent u est convexe dans I_0 au sens de Jensen.

Le cas (b) on démontre dans la même façon.

REMARQUE 2

Dans le cas

$$G(x) \leq 1 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

nous avons aussi Théorème 4 mais avec le mot „convexe” remplacé par „concave” et v.v.

3. Solutions localement intégrables de l'équation (3)

Dans ce paragraphe nous faisons la supposition suivante:

- (H) La fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition (7) et elle est intégrable dans l'intervalle $[0, r]$ pour tout $r > 0$.

THÉORÈME 5

Supposons que (H) a lieu. Alors

- (a) Toute solution de (3) localement intégrable dans I est indéfiniment dérivable dans I .
- (b) Si l'équation (3) admet une solution localement intégrable dans I alors la limite suivante

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{G(r) - 1}{r^2}$$

existe et elle est un nombre fini.

- (c) Si la fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (3) localement intégrable dans I alors elle est de la forme

$$u(x) = \begin{cases} \alpha e^{\sqrt{2g}x} + \beta e^{-\sqrt{2g}x} & \text{si } g > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{si } g = 0, \\ \alpha \sin(\sqrt{-2g}x) + \beta \cos(\sqrt{-2g}x) & \text{si } g < 0. \end{cases} \quad (21)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$g = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{G(r) - 1}{r^2}. \quad (22)$$

Démonstration. Supposons que la fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (3) localement intégrable dans I . Soient $x_0 \in I$, $r > 0$. Posons $U(x_0) = [x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subset I$. Supposons que la fonction u est intégrable dans $U(x_0)$ et considérons l'intervalle $V(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$. Soit $\rho \in [0, r]$.

Ad (a). On voit que $x, x + \rho, x - \rho \in U(x_0)$ pour tout $x \in V(x_0)$. Alors

$$u(x - \rho) + u(x + \rho) = 2u(x)G(\rho), \quad x \in V(x_0). \quad (23)$$

En intégrant l'égalité (23) dans $[0, r]$ par rapport ρ on obtient

$$\int_0^r u(x - \rho) d\rho + \int_0^r u(x + \rho) d\rho = 2u(x) \int_0^r G(\rho) d\rho, \quad x \in V(x_0)$$

et par le changement des variables on a

$$\int_{x-\tau}^x u(\tau) d\tau + \int_x^{x+\tau} u(\tau) d\tau = 2u(x) \int_0^\tau G(\rho) d\rho, \quad x \in V(x_0).$$

D'où

$$\int_{x-\tau}^{x+\tau} u(\tau) d\tau = 2u(x) \int_0^\tau G(\rho) d\rho, \quad x \in V(x_0). \tag{24}$$

Posons

$$h(x) := \int_{x-\tau}^{x+\tau} u(\tau) d\tau = \int_{x_0-2\tau}^{x+\tau} u(\tau) d\tau - \int_{x_0-2\tau}^{x-\tau} u(\tau) d\tau, \quad x \in V(x_0). \tag{25}$$

L'hypothèse (H) entraîne que l'intégrale $\int_0^\tau G(\rho) d\rho$ est un nombre réel. Soit $k = \int_0^\tau G(\rho) d\rho$. De (24) et (25) il résulte que

$$h(x) = 2ku(x), \quad x \in V(x_0). \tag{26}$$

La fonction u est intégrable alors la fonction h définie par (25) est continue dans $V(x_0)$. D'où, compte tenu de (26), on obtient la continuité de u dans $V(x_0)$. Cela et (25) entraîne la dérivabilité de h dans $V(x_0)$ et donc, compte tenu de (26), on a la dérivabilité de u dans $V(x_0)$ ainsi que dans I . En continuant ce procédé on obtient la dérivabilité d'ordre quelconque de la fonction u dans I .

Ad (b). Nous avons encore une fois (23) et ensuite

$$\frac{u(x - \rho) + u(x + \rho) - 2u(x)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} u(x)(G(\rho) - 1). \tag{27}$$

En utilisant les résultats de (a) on constate que la fonction u est indéfiniment dérivable dans I et alors

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\rho^2} [u(x - \rho) + u(x + \rho) - 2u(x)] = u''(x).$$

Par suite il existe la limite finie de l'expression de la membre gauche de l'égalité (27) quand $\rho \rightarrow 0^+$ ainsi que la limite finie de l'expression de la membre droite de (27) quand $\rho \rightarrow 0^+$. Finalement on a l'existence de la limite finie (22).

Ad (c). En utilisant les résultats de (a) et (b), l'égalité (27) nous donne

$$u''(x) = 2gu(x), \quad x \in I \tag{28}$$

où g est définie par (22). D'où, en résolvant (28), on obtient (21).

REMARQUE 3

La limite (22) nous donne une condition nécessaire de l'existence des solutions localement intégrables de l'équation (3). Par exemple, pour l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) G\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

avec $G(r) = -|r| - 1$, $r \in \mathbb{R}$, la condition (H) est vérifiée mais la limite (22) n'existe pas. Alors cet équation n'admet que la solution nulle comme solution localement intégrable dans \mathbb{R} .

REMARQUE 4

Il faut noter que l'équation (23) a été étudiée dans la note [1].

THÉORÈME 6

On suppose (H). L'équation (3) admet une solution non-constante et localement intégrable dans I si et seulement si la fonction G est de la forme (4).

Démonstration. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (3) qui est non-constante et localement intégrable dans I . En appliquant le théorème 5 on constate qu'il existe la limite finie (22). Dans la suite on considéra les trois cas.

I. $g > 0$. Le Théorème 5(c) nous dit que

$$u(x) = \alpha e^{cx} + \beta e^{-cx}, \quad x \in I \quad (29)$$

où $c = \sqrt{2g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. D'où, compte tenu de (3) on a

$$\alpha (e^{cx} + e^{cy}) + \beta (e^{-cx} + e^{-cy}) = 2e^{c \frac{x+y}{2}} (\alpha + \beta e^{-c(x+y)}) G\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Puisque $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ donc

$$G\left(\frac{y-x}{2}\right) = \frac{1}{2} (e^{cx} + e^{cy}) e^{-c \frac{x+y}{2}} = \text{ch}\left(c \frac{y-x}{2}\right).$$

Par suite

$$G(t) = \text{ch}(ct), \quad t \in \mathbb{R}.$$

II. $g = 0$. Le Théorème 5(c) nous donne

$$u(x) = \alpha x + \beta, \quad x \in I \quad (30)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. On en déduit, par (3),

$$\alpha x + \beta + \alpha y + \beta = 2 \left(\alpha \frac{x+y}{2} + \beta \frac{x+y}{2} \right) G\left(\frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I.$$

Par conséquent $G(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

III. $g < 0$. Le Théorème 5(c) nous donne

$$u(x) = \alpha \sin(cx) + \beta \cos(cx), \quad x, y \in I, \quad (31)$$

où $c = \sqrt{-2g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. D'où, par (3), on a, pour $x, y \in I$,

$$2G\left(\frac{y-x}{2}\right)\left(\alpha\sin\left(c\frac{x+y}{2}\right)+\beta\cos\left(c\frac{x+y}{2}\right)\right) \\ = \alpha(\sin(cx)+\sin(cy))+\beta(\cos(cx)+\cos(cy)),$$

et aussi

$$G\left(\frac{y-x}{2}\right)\left(\alpha\sin\left(c\frac{x+y}{2}\right)+\beta\cos\left(c\frac{x+y}{2}\right)\right) \\ = \cos\left(c\frac{y-x}{2}\right)\left(\alpha\sin\left(c\frac{x+y}{2}\right)+\beta\cos\left(c\frac{x+y}{2}\right)\right).$$

Puisque $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ alors

$$G\left(\frac{y-x}{2}\right) = \cos\left(c\frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I$$

et donc $G(t) = \cos(ct)$, $t \in \mathbb{R}$.

Inversement. Il est facile de constater que si la fonction G est de la forme (4), l'équation (3) admet une solution non-constante et localement intégrable dans I , à savoir:

I. pour l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{ch}\left(c\frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad c > 0 \quad (32)$$

la solution est de la forme (29).

II. pour l'équation (5) elle est de la forme (30).

III. pour l'équation

$$u(x) + u(y) = 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(c\frac{y-x}{2}\right), \quad x, y \in I, \quad c > 0 \quad (33)$$

elle est de la forme (31).

REMARQUE 5

La forme (29) des solutions de l'équation (32) nous dit que la solution de (32), localement intégrable dans I , est une fonction concave dans I ou bien convexe dans I ou bien elle n'admet qu'un point comme son point d'inflexion. Dans ce point cette solution s'annule (voir les Théorèmes 4 et 5).

Travaux cités

[1] I. Corovei, *The functional equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)g(y)$ for nilpotent groups*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation **22(45)** (1980), 33-41.

- [2] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities, Cauchy's equation and Jensen's inequality*, PWN, Uniwersytet Śląski, Warszawa - Kraków - Katowice, 1985.
- [3] E. Wachnicki, *Sur un développement de la valeur moyenne*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne 14 (1997), 35-48.

Ecole Normale Supérieure

Podchorążych 2

PL-30-084 Kraków

Pologne

E-mail: Z.Powazka@wsp.krakow.pl