ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 207 Prace Matematyczne XVI 1999

Zenon Moszner

# L'équation de translation et l'équation de Sincov généralisée

**Résumé.** On donne une liaison entre l'équation de translation (1) et l'équation de Sincov généralisée (2), aussi dans le cas du type de Pexider ((20) et (23)). On formule aussi quelques problèmes ouverts.

Nous comprenons par l'équation de translation (de transformation) l'équation de la forme

$$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x \cdot y), \tag{1}$$

où $F : \Gamma \times S \to \Gamma$ est une fonction cherchée, $\Gamma$ étant un ensemble arbitraire et $(S, \cdot)$ une structure algébrique par raport à l'opération $\cdot : S \times S \to S$ (un groupoïde — dans quelques applications l'opération $\cdot$ n'est pas définie sur $S \times S$ tout entier). Cette équation joue un rôle fondamental dans beaucoup des domaines de mathématique ([9]) et elle possède déjà une théorie générale ([13]).

L'équation de Sincov généralisée c'est l'équation de la forme

$$G(\alpha, \beta) \cdot G(\beta, \gamma) = G(\alpha, \gamma), \tag{2}$$

où $G : \Gamma \times \Gamma \to S$ est une fonction cherchée. L'équation de Sincov joue un rôle dans la théorie de la probabilité dans le processus de Markov ([1] p. 223-224).

L'objet de cette note est donner une liaison entre ces deux équations. L'idée de cette liaison est suggérée par les considérations dans [5] (autour de la notion de "Größengleichung"), rappelées par D. Gronau au cours de $9^{\text{ème}}$ conférence européenne sur la théorie de l'itération (European Conference on Iteration Theory — ECIT) en Autriche en 1994 et pendant $33^{\text{ème}}$ symposium au sujet des équations fonctionnelles (International Symposium on Functional Equations — ISFE) en Espagne en 1995 ([6]) et publiées dans [7]. Cette liason nous permet de donner une forme générale de la solution de (1) dans le cas si $S$ forme un groupe abélien.

AMS (1991) subject classification: 39B12, 39B52.

**1.** Supposons que la solution $F$ de l'équation (1) soit telle que

$$F(\alpha,\cdot) : S \to \Gamma \text{ est une bijection pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma \tag{3}$$

et désignons par $G$ la fonction de $\Gamma \times \Gamma$ à $S$ telle que

$$F(\alpha, x) = \beta \iff x = G(\alpha, \beta). \tag{4}$$

Nous avons de là

$$F(\beta, y) = \gamma \iff y = G(\beta, \gamma),$$

d'où

$$\gamma = F(\beta, y) = F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x \cdot y) \iff x \cdot y = G(\alpha, \gamma),$$

alors (2) a lieu.

D'après (3) et (4) la fonction

$$G(\alpha,\cdot) : \Gamma \to S \text{ est une injection pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma, \tag{5}$$

donc si nous fixons $\alpha = \alpha_0$ et posons $h(\delta) = G(\alpha_0, \delta)$ nous obtenons d'après (2) pour $\alpha = \alpha_0$ :

$$h(\beta) \cdot G(\beta, \gamma) = h(\gamma), \quad \text{d'où } \gamma = h^{-1}(h(\beta) \cdot G(\beta, \gamma)). \tag{6}$$

Posons $G(\beta, \gamma) = z$, d'où $\gamma = F(\beta, z)$, alors

$$F(\beta, z) = h^{-1}(h(\beta) \cdot z), \tag{7}$$

où $h(\beta) = G(\alpha_0, \beta)$.

Nous allons montrer que $h$ est une bijection de $\Gamma$ à $S$. En effet pour une fonction $G : \Gamma \times \Gamma \to S$ remplissante (5) la conditon

$$\forall\, \alpha \in \Gamma : \; G(\alpha, \Gamma) = S \tag{8}$$

est toujours remplie, puisque dans ce cas il doit exister une fonction $F : \Gamma \times S \to \Gamma$ pour laquelle (4) a lieu, d'où pour $x \in S$, $\alpha \in \Gamma$ arbitraires et $\beta = F(\alpha, x)$ nous avons $G(\alpha, \beta) = x$.

Il résulte de nos considérations que la solution $F$ de (1) remplissante (3) est donnée par (7) avec une bijection $h : \Gamma \to S$.

Inversement si $G : \Gamma \times \Gamma \to S$ est une solution de (2) et (5) a lieu, dans ce cas $F : \Gamma \times S \to \Gamma$ définie par (4) est une solution de (1) pour laquelle (3) est remplie.

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME 1

*L'équivalence* (4) *donne une correspondance biunivoque entre les solutions de* (1) *remplissantes* (3) *et les solutions de* (2) *satisfaisantes à* (5). *La solution de* (1) *remplissante* (3) *est donnée par* (7).

La fonction $F$ donnée par (7) est une solution de (1) si et seulement si $S$ est associative. Si l'équation (1) a la solution $F$ remplissante (3) pour un $\alpha = \alpha_0 \in \Gamma$, alors $S$ doit être associative, puisque

$$\begin{aligned} F(\alpha_0, (x \cdot y) \cdot z) &= F(F(\alpha_0, x \cdot y), z) = F[F(F(\alpha_0, x), y), z] \\ &= F(F(\alpha_0, x), y \cdot z) = F(\alpha_0, x \cdot (y \cdot z)) \end{aligned}$$

nous donne $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

La fonction $F$ donnée par (7) remplit (3) si et seulement si

$$\forall\, x, y, z \in S: \; x \cdot y = x \cdot z \;\Rightarrow\; y = z$$

et

$$\forall\, x, y \in S \; \exists\, z \in S: \; x \cdot z = y.$$

La structure $S$ associative et remplissante les conditions plus haut ne doit pas former un groupe, comme celà montre l'exemple suivant: $S = \{a, b\}$, $a \neq b$, avec l'opération $a \cdot a = b \cdot a = a$ et $a \cdot b = b \cdot b = b$. Mais si $S$ est abélien, il doit former un groupe.

D'après le théorème 3 dans [1] p. 356 si pour une solution $G$ de (2) a lieu (8) et

$$\exists\, \beta_0 \in \Gamma: \; G(\Gamma, \beta_0) = S, \tag{9}$$

dans ce cas $(S, \cdot)$ forme un groupe. Dans ce cas la formule (7) nous donne ([1] p. 356, Théorème 2)

$$G(\beta, \gamma) = [h(\beta)]^{-1} \cdot h(\gamma). \tag{10}$$

Pour une fonction $G$ comme plus haut la condition (9) est équivalente à la condition

$$\bigcap_{x \in S} F(\Gamma, x) \neq \emptyset. \tag{11}$$

Il résulte de notre considération que s'il existe une solution $F$ de l'équation (1) remplissante (3) et (11), alors $(S, \cdot)$ doit former un groupe.

La fonction $F$ donnée par (7) remplit (11) si et seulement si

$$\exists\, b_0 \in S \; \forall\, a \in S \; \exists\, x \in S: \; x \cdot a = b_0 .$$

**2.** Supposons dans la suite que $(S, \cdot)$ forme un groupe. La solution $F$ de (1) ne doit pas remplir (3) dans ce cas. En effet si $\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(S, \cdot)$ est le groupe $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ multiplicatif des nombres réels positifs, $F_1(\alpha, x) = \alpha \cdot x$ est une solution de (1) que ne remplit pas (3), puisque $x \to F_1(\alpha, x)$ n'est pas surjective, étant injective, $F_2(\alpha, x) = h^{-1}(h(\alpha) \cdot x)$, où $h$ est une bijection de $\Gamma$ à $\mathbb{R}_+/\mathbb{Q}_+$ (le groupe quotient de $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ par rapport au sous-groupe $\mathbb{Q}_+$ des nombres rationnels positifs), étant une solution de (1), ne remplit pas (3), puisque $x \to F_2(\alpha, x)$ n'est pas injective, étant surjective et $F_3(\alpha, x) = 1$ étant aussi une solution de (1), ne satisfait pas à (3), puisque $x \to F(\alpha, x)$ est ni injective ni surjective. Nous montrerons dans la suite que la solution $F$ de (1) doit remplir (11) si $S$ forme un groupe. Dans le cas si $S$ ne forme pas du groupe, il existe une solution $F$ de (1) qui ne satisfait pas à (11), même remplissante (3), p. ex. $F(\alpha, x) = \alpha \cdot x$, pour $\Gamma = S = \{a, b\}$ comme plus haut.

Si $S$ forme un groupe la supposition (3) pour une solution de (1) est équivalente à la suivante:

— il existe un $\alpha_0$ de $\Gamma$ tel que $F(\alpha_0, \cdot)$ est une bijection.

En effet soit $\alpha$ arbitraire dans $\Gamma$. Il existe un $x_0$ de $S$ tel que $F(\alpha_0, x_0) = \alpha$, d'où $F(\alpha, x) = F(\alpha_0, x_0 \cdot x)$, alors si $F(\alpha_0, \cdot)$ est une bijection, $F(\alpha, \cdot)$ est la même.

Nous allons montrer comme on peut donner par (7) une forme de la solution générale de (1), si $(S, \cdot)$ forme un groupe abélien.

Les lemmes suivants ont lieu pour la solution $F$ de (1), sous la supposition que $(S, \cdot)$ forme un groupe avec l'élément neutre $e$ (dans les lemmes 1-3 pas nécessairement abélien).

Lemme 1

*Il existe une fonction* $f : \Gamma \to \Gamma$ *telle que* $f(f) = f$ *et* $f(\Gamma) = F(\Gamma, S)$ *et il existe une solution* $F^* : F(\Gamma, S) \times S \to F(\Gamma, S)$ *de* (1) *telles que* $F^*(\alpha, e) = \alpha$ *pour chaque* $\alpha \in F(\Gamma, S)$ *et* $F(\alpha, x) = F^*(f(\alpha), x)$.

*Démonstration.* Posons $f(\alpha) = F(\alpha, e)$ et $F^* = F|_{F(\Gamma, S) \times S}$. Evidement $f(f) = f$. On a $F(\Gamma, e) = F(\Gamma, S)$ puisque $F(\Gamma, e) \subset F(\Gamma, S)$ et $F(\alpha, x) = F(F(\alpha, x), e)$. Soit $\alpha \in \Gamma$, d'où $F(\alpha, e) \in F(\Gamma, S)$, alors

$$F(\alpha, x) = F(F(\alpha, e), x) = F^*(F(\alpha, e), x) = F^*(f(\alpha), x).$$

De plus nous avons pour $\alpha \in F(\Gamma, S) = F(\Gamma, e)$, $\alpha = F(\gamma, e)$ pour un $\gamma$ de $\Gamma$, d'où

$$F^*(\alpha, e) = F(\alpha, e) = F(F(\gamma, e), e) = F(\gamma, e) = \alpha.$$

LEMME 2

*Si $F$ remplit la condition*

$$F(\alpha, e) = \alpha \quad \textit{pour chaque } \alpha \in \Gamma, \tag{12}$$

*alors $\Gamma = \bigcup_{k\in K} \Gamma_k$, où $\Gamma_k \neq \emptyset$ et $\Gamma_k \cap \Gamma_s = \emptyset$ pour $k \neq s$ et*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \Gamma_k\ \exists x \in S:\ F(\alpha, x) = \beta. \tag{13}$$

Les ensembles $\Gamma_k$ sont nommés les fibres transitives de $F$.

*Démonstration.* La relation $\rho$ définie comme il suit

$$\alpha\, \rho\, \beta \iff \exists x \in S:\ F(\alpha, x) = \beta$$

est l'équivalence et il suffit prendre pour $\{\Gamma_k\}_{k\in K}$ l'ensemble $\Gamma/\rho$.

LEMME 3

*Pour $F$ remplissante* (12) *et $\alpha$ fixé dans $\Gamma$ la famille*

$$\Big\{\{x \in S:\ F(\alpha, x) = \beta\}\Big\}_{\beta\in\Gamma}$$

*s'accorde avec la famille*

$$S/S_\alpha = \Big\{\{S_\alpha \cdot x:\ x \in S\}\Big\},$$

*où $S_\alpha$ est un sous-groupe du groupe $S$.*

*Démonstration.* Il suffit remarquer que la relation

$$x\, R_\alpha\, y \iff F(\alpha, x) = F(\alpha, y) \tag{14}$$

est compatible droitement avec l'opération $\cdot$ dans $S$ ([4] p. 68-69).

LEMME 4

*Si le groupe $S$ est abélien, le sous-groupe $S_\alpha$ est le même pour chaque $\alpha \in \Gamma_k$.*

*Démonstration.* Si $\alpha$ et $\beta$ sont dans $\Gamma_k$, d'aprés (11) il existe un élément $a$ dans $S$ tel que $\beta = F(\alpha, a)$. Nous avons d'aprés (12)

$$\begin{aligned} S_\beta &= \{x \in S:\ x\, R_\beta\, e\} = \{x \in S:\ F(\beta, x) = F(\beta, e)\} \\ &= \{x \in S:\ F(\alpha, a \cdot x) = F(\alpha, a)\} \\ &= \{x \in S:\ F(\alpha, a \cdot x \cdot a^{-1}) = F(\alpha, e)\} \\ &= \{x \in S:\ F(\alpha, x) = F(\alpha, e)\} = \{x \in S:\ x\, R_\alpha\, e\} \\ &= S_\alpha. \end{aligned}$$

Supposons dans la suite que $S$ soit un groupe abélien et, pour $F$ remplissante (1) et (12), désignons $S_k := S_\alpha$ pour $\alpha \in \Gamma_k$ et

$$F_k^*(\alpha, C) = F(\alpha, x) \quad \text{pour } x \in C \in S/S_k \,. \tag{15}$$

$S/S_k$ forme un groupe quotient et la fonction

$$F_k^* : \Gamma_k \times (S/S_k) \to \Gamma_k$$

remplit l'équation de translation. De plus $F_k^*(\alpha, \cdot)$ est une bijection, on peut donc appliquer pour la fonction $F_k^*$ la forme

$$F_k^*(\alpha, C) = h_k^{-1}(h_k(\alpha) \cdot C) \quad \text{pour } \alpha \in \Gamma_k,$$

où $h_k : \Gamma_k \to S/S_k$ est une bijection. Puisque l'opération $\cdot$ dans le groupe quotient c'est l'opération indiquée par l'opération $\cdot$ dans $S$ nous avons: $h_k(\alpha) \cdot C = h_k(\alpha) \cdot x$ pour $x \in C$. Il résulte de là et d'après (15) que

$$F(\alpha, x) = h_k^{-1}(h_k(\alpha) \cdot x) \quad \text{pour } \alpha \in \Gamma_k,$$

ou $h_k : \Gamma_k \to S/S_k$ est une bijection.

Nous avons donc d'aprés les lemmes le

THÉORÈME 2

*Si la fonction* $F : \Gamma \times S \to \Gamma$ *remplit* (1), *où* $(S, \cdot)$ *forme un groupe abélien, alors ils existent*

(a) *une fonction* $f : \Gamma \to \Gamma$ *telle que* $f(f) = f$,

(b) *une décomposition de l'ensemble* $f(\Gamma) = F(\Gamma, S) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$, $\Gamma_k \neq \emptyset$, $\Gamma_k \cap \Gamma_s = \emptyset$ *pour* $k \neq s$, *telle que pour chaque* $k$ *de* $K$ *il existe un sous-groupe* $S_k$ *du groupe* $S$ *tel que* $\operatorname{card} \Gamma_k = \operatorname{card} S/S_k$,

(c) *les bijections* $h_k : \Gamma_k \to S/S_k$ *telles que*

$$F(\alpha, x) = h_k^{-1}(h_k(f(\alpha)) \cdot x) \quad \textit{pour } f(\alpha) \in \Gamma_k \,. \tag{16}$$

On peut facilement vérifier que la fonction donnée par (16) est une solution générale de l'équation de translation si $(S, \cdot)$ forme un groupe abélien.

Remarquons que si nous comprendrons par $S/S_k$ pas le groupe quotient mais seulement l'ensemble des classes d'équivalence à droit du groupe $S$ par rapport au sous-groupe $S_k$, la formule (16) donne aussi une solution générale de (1) si $(S, \cdot)$ forme un groupe pas nécessairement abélien, mais dans ce cas la méthode de la démonstration doit être différente ([10]). Il en résulte en particulier que $F(\Gamma, x) = f(\Gamma)$ pour chaque $x$ de $S$, d'où la solution $F$ de (1) dans le cas du groupe $S$ doit remplir (11).

Nos considérations restent valables, en particulier le lemme 4, aussi pour le groupe $(S, \cdot)$ pas nécessairement abélien si la solution $F$ de (1) est telle que tous ses sous-groupes $S_\alpha$ sont normaux. Géométriquement cela signifie que les graphes des chaques deux fonctions de la famille $\{F(\alpha,x)\}_{x\in S}$ sont sur chaque l'ensemble $f^{-1}(\Gamma_k)$ idéntiques ou disjoints, c. à d. que

$$\begin{aligned}\forall\, x,y\in S\;\forall\, k\in K\;\; \big[&\forall\,\alpha\in f^{-1}(\Gamma_k):\;F(\alpha,x)=F(\alpha,y)\;\;\text{ou}\\ &\forall\,\alpha\in f^{-1}(\Gamma_k):\;F(\alpha,x)\neq F(\alpha,y)\big]\,.\end{aligned}$$

Cette condition est liée avec la propriété suivante: $F$ est disjointe au point $\alpha_0$ (voir [9] p. 30), plus précisement elle est équivalente à la condition que pour chaque $k$ de $K$ la fonction $F|_{f^{-1}(\Gamma_k)\times S}$ est disjointe à chaque point (il suffit: à un point) de l'ensemble $f^{-1}(\Gamma_k)$.

PROBLÈME

Recevoir la forme générale (16) pour la solution de (1) par l'équation de Sincov (2) dans le cas si $(S,\cdot)$ forme un groupe pas commutatif.

**3.** L'équation de translation peut avoir directement la forme de l'équation de Sincov généralisée. Dans la théorie des objects géometriques non-différentiels ([2] p. 20-21), si $F(\alpha,(x,y))$ signifie la règle de transformation de cet object et pour la famille des courves sur le plan à un paramètre, c. à d. la famille de telles courves que par chaque point du plan passe exactement une courve de cette famille (p. ex. la famille des intégrales de l'équation différentielle $y'=f(x,y)$ ayante la propriété d'unicité sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$), si nous désignons par $F(\alpha,(x,\cdot))$ la fonction dont le graphe c'est la courve de notre famille passante par le point $(x,\alpha)$, nous obtenons l'équation de la forme de l'équation de translation

$$F(F(\alpha,(x,y)),(y,z))=F(\alpha,(x,z)) \tag{17}$$

avec

$$F(\alpha,(x,x))=\alpha. \tag{18}$$

Dans l'équation (17) $S$ forme le groupoïde de Brandt des paires ([2] p. 11), c. à d. $S=A\times A$ ($A$ l'ensemble arbitraire, ici $A\subset\mathbb{R}$), avec l'opération définie comme suit:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a,d)\quad\Longleftrightarrow\quad b=c.$$

L'équation (17) a la forme de l'équation de Sincov généralisée (2)

$$F(\alpha,(x,y))\,\#\,F(\cdot,(y,z))=F(\alpha,(x,z)),$$

où $\#$ signifie la superposition des fonctions de la forme $F(\cdot,(a,b))$. Dans cette dernière équation $S$ est l'ensemble des fonctions $F(\cdot,(a,b))$ et $\Gamma=\mathbb{R}$, dans ce cas $S$ forme un groupe si (18) a lieu ([2] p. 20-21).

L'équation plus générale que (17)

$$F(F(\alpha,(x,y,a)),(y,z,b)) = F(\alpha,(x,z,a\cdot b)), \tag{19}$$

où $F:\Gamma\times(A\times A\times S)\to\Gamma$, $\Gamma$ et $A$ étant des ensembles arbitraires, $S$ formant un groupe par rapport à l'opération $\cdot$ , sans les conditions complémentaires (p. ex. de la forme (18)), est résous dans [14].

L'équation (19) dans le cas si $(S,\cdot)=(\mathbb{R}_+,+)$ est un cas particulier des équations de Chapman–Kolmogorov pour le processus de Markov homogène ([3] p. 61).

**4.** Considérons maintenant l'équation de translation du type de Pexider

$$F_1(F_2(\alpha,x),y) = F_3(\alpha,(x\cdot y)), \tag{20}$$

où $F_1:\Gamma_2\times S\to\Gamma_3$, $F_2:\Gamma_1\times S\to\Gamma_2$, $F_3:\Gamma_1\times S\to\Gamma_3$ sont des fonctions cherchées, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ étant des ensambles arbitraires et $(S,\cdot)$ forme un groupoïde donné.

Supposons que

$$\left.\begin{array}{l} F_i(\alpha,\cdot) \text{ pour } i=1,2,3 \text{ soient des bijections pour chaque} \\ \alpha \text{ de l'ensemble } \Gamma_2,\ \Gamma_1,\ \Gamma_1 \text{ respectivement.}\end{array}\right\} \tag{21}$$

Il existent dans ce cas les fonctions: $G_1:\Gamma_2\times\Gamma_3\to S$, $G_2:\Gamma_1\times\Gamma_2\to S$, $G_3:\Gamma_1\times\Gamma_3\to S$ telles que

$$F_i(\alpha,x)=\beta \iff x=G_i(\alpha,\beta) \quad \text{pour } i=1,2,3. \tag{22}$$

Il en résulte que

$$F_2(\alpha,x)=\beta \iff x=G_2(\alpha,\beta)$$

et

$$F_1(\beta,y)=\gamma \iff y=G_1(\beta,\gamma),$$

d'où

$$\gamma=F_1(F_2(\alpha,x),y)=F_3(\alpha,x\cdot y) \iff x\cdot y=G_3(\beta,\gamma),$$

alors

$$G_3(\alpha,\gamma)=G_2(\alpha,\beta)\cdot G_1(\beta,\gamma). \tag{23}$$

C'est l'équation de Sincov du type de Pexider.

Supposons maintenant que $(S,\cdot)$ forme un groupe et pour les solutions $G_1$, $G_2$, $G_3$ de (23) désignons

$$h_3(\delta) = G_3(\alpha_0, \delta) \quad \text{pour un } \alpha_0 \text{ de } \Gamma_1,$$
$$h_2(\delta) = G_2(\alpha_0, \delta),$$
$$h_1(\delta) = h_3(\bar{\alpha}) \cdot [G_3(\delta, \bar{\alpha})]^{-1} \quad \text{pour un } \bar{\alpha} \text{ de } \Gamma_3 .$$

Nous avons d'après (23)

$$h_3(\gamma) = h_2(\beta) \cdot G_1(\beta, \gamma),$$

d'où

$$G_1(\beta, \gamma) = [h_2(\beta)]^{-1} \cdot h_3(\gamma). \tag{24}$$

Dans la suite d'après (23):

$$G_3(\alpha, \bar{\alpha}) = G_2(\alpha, \beta) \cdot G_1(\beta, \bar{\alpha}),$$

d'où

$$\begin{aligned} G_2(\alpha, \beta) &= G_3(\alpha, \bar{\alpha}) \cdot [G_1(\beta, \bar{\alpha})]^{-1} \\ &= [h_1(\alpha)]^{-1} \cdot h_3(\bar{\alpha}) \cdot [h_3(\bar{\alpha})]^{-1} \cdot h_2(\beta) \\ &= [h_1(\alpha)]^{-1} \cdot h_2(\beta) \end{aligned} \tag{25}$$

et de là

$$\begin{aligned} G_3(\alpha, \gamma) &= [h_1(\alpha)]^{-1} \cdot h_2(\beta) \cdot [h_2(\beta)]^{-1} \cdot h_3(\gamma) \\ &= [h_1(\alpha)]^{-1} \cdot h_3(\gamma). \end{aligned} \tag{26}$$

On peut facilement démontrer que les fonctions $G_i$ données par (24), (25) et (26), avec les fonctions

$$h_i : \Gamma_i \to S \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \tag{27}$$

et en autre arbitraires, remplissent l'équation (23).

Nous avons donc le

THÉORÈME 3

*Si* $(S, \cdot)$ *forme un groupe, la solution générale de* (23) *est de la forme* (24), (25), (26) *avec les fonctions* (27) *arbitraires.*

Remarquons que si la supposition (21) est remplie, alors d'après (22) chaque fonction $G_i(\alpha, \cdot)$ pour $i = 1, 2, 3$ est une bijection de l'ensemble $\Gamma_3$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ respectivement sur $S$. Il résulte de (24), (25) et (26) d'après (22) que

$$\left.\begin{aligned} F_1(\alpha, x) &= h_3^{-1}(h_2(\alpha) \cdot x), \\ F_2(\alpha, x) &= h_2^{-1}(h_1(\alpha) \cdot x), \\ F_3(\alpha, x) &= h_3^{-1}(h_1(\alpha) \cdot x). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Si nous supposons que $(S, \cdot)$ forme un groupe et pour les solutions $F_1$, $F_2$, $F_3$ de (20):

$$F_2(\alpha, \cdot) \text{ soit une surjection pour chaque } \alpha \text{ de } \Gamma_1 \tag{29}$$

et

$$\exists\, \alpha_0 \in \Gamma_1 : \ F_3(\alpha_0, \cdot) \text{ soit une bijection,} \tag{30}$$

dans ce cas (21) est remplie.

En effet soit (29) et (30). Supposons que $F_1(\alpha, x_1) = F_1(\alpha, x_2)$. Il existe d'après (29) un $\bar{x}$ tel que $F_2(\alpha_0, \bar{x}) = \alpha$, alors

$$\begin{aligned} F_3(\alpha_0, \bar{x} \cdot x_1) &= F_1(F_2(\alpha_0, \bar{x}), x_1) = F_1(\alpha, x_1) = F(\alpha, x_2) \\ &= F_1(F_2(\alpha_0, \bar{x}), x_2) \\ &= F_3(\alpha_0, \bar{x} \cdot x_2), \end{aligned}$$

d'où d'après (30) on a $\bar{x} \cdot x_1 = \bar{x} \cdot x_2$, donc $x_1 = x_2$. $F_1(\alpha, \cdot)$ est donc une injection pour chaque $\alpha$ de $\Gamma_2$.

Soit $\beta$ arbitrare dans $\Gamma_3$. Il existe d'après (30) un $x^*$ tel que $F_3(\alpha_0, x^*) = \beta$. De plus d'après (29) pour arbitraire dans $\Gamma_2$ il existe $\bar{x}$ tel que $F_2(\alpha_0, \bar{x}) = \alpha$. Il en résulte que

$$F_1(\alpha, \bar{x}^{-1} \cdot x^*) = F_1(F_2(\alpha_0, \bar{x}), \bar{x}^{-1} \cdot x^*) = F_3(\alpha_0, x^*) = \beta,$$

donc $F_1(\alpha, \cdot)$ est une surjection pour chaque $\alpha$ de $\Gamma_2$.

Supposons que $F_3(\alpha, x_1) = F_3(\alpha, x_2)$. Il en résulte que

$$F_1(F_2(\alpha, e), x_1) = F_1(F_2(\alpha, e), x_2),$$

où $e$ désigne l'élément neutre du groupe $S$, et puisque $F_1(\alpha, \cdot)$ est une injection nous avons $x_1 = x_2$. La fonction $F_3(\alpha, \cdot)$ est donc une injection pour $\alpha$ dans $\Gamma_1$. Soit $\beta$ arbitraire dans $\Gamma_3$. Puisque $F_1(\alpha, \cdot)$ est une surjection pour chaque $\alpha$ de $\Gamma_2$ il existe un $\bar{x}$ tel que $F_1(F_2(\alpha, e), \bar{x}) = \beta$, alors

$$F_3(\alpha, \bar{x}) = F_1(F_2(\alpha, e), \bar{x}) = \beta,$$

donc $F_3(\alpha, \cdot)$ est une surjection pour chaque $\alpha$ dans $\Gamma_1$.

Enfin si $F_2(\alpha, x_1) = F_2(\alpha, x_2)$, alors

$$F_3(\alpha, x_1) = F_1(F_2(\alpha, x_1), e) = F_1(F_2(\alpha, x_2), e) = F_3(\alpha, x_2)$$

et puisque $F_3(\alpha, \cdot)$ est une injection, on a $x_1 = x_2$.

Nous avons donc démontré que (29) et (30) entrainent (21).

On peut facilement vérifier que si nous remplaçons $h_3^{-1}$ dans (28) par une fonction de $S$ à $\Gamma_3$ (pas nécéssairement injective), $h_2$ étant une fonction injective de $\Gamma_2$ á $S$ et $h_1$ étant une fonction de $\Gamma_1$ à $S$, nous obtenons une solution de (20).

Nous avons d'après toutes nos considérations le

THÉORÈME 4

*Si $(S,\cdot)$ forme un groupe, les formules* (28), *avec $h_i : \Gamma_i \to S$ pour $i = 1,2,3$ et $h_2$, $h_3$ étant des bijections, donnent la solution générale de* (20) *avec $F_2$ et $F_3$ remplissantes* (29) *et* (30).

Ils existent des solutions de (20) qui ne sont pas de la forme (28), aussi dans le cas si $(S,\cdot)$ forme un groupe. En effet telles sont les fonctions (une généralisation de la formule (16))

$$\begin{aligned}
&F_1(\alpha,x) = h_{3k}(h_{2k}(\alpha)\cdot x) \quad \text{pour } (\alpha,x) \in \Gamma_{2k}\times S,\\
&F_1(\alpha,x) \quad \text{sur } \big(\Gamma_2 \setminus \textstyle\bigcup_{k\in K}\Gamma_{2k}\big)\times S \text{ est une fonction arbitraire des valeurs}\\
&\qquad\qquad \text{dans } \Gamma_3,\\
&F_2(\alpha,x) = h_{2k}^{-1}(h_{1k}(f(\alpha))\cdot x) \quad \text{pour } \alpha\in\Gamma_1 \text{ tell que } f(\alpha)\in\Gamma_{2k} \text{ et } x\in S,\\
&F_3(\alpha,x) = h_{3k}(h_{1k}(f(\alpha))\cdot x) \quad \text{pour } \alpha\in\Gamma_1 \text{ tell que } f(\alpha)\in\Gamma_{2k} \text{ et } x\in S,
\end{aligned}$$

où $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ est une fonction arbitraire, $f(\Gamma_1) = \bigcup_{k\in K}\Gamma_{2k}$ est telle décomposition de $f(\Gamma_1)$ que

$$\forall\, k\in K\ \exists\, S_k \text{ un sous-groupe de } S:\ \operatorname{card}\Gamma_{2k} = \operatorname{card} S/S_k\,,$$

où $S/S_k = \{S_k a:\ a\in S\}$, $h_{1k}$ est une fonction de $\Gamma_{2k}$ à $S/S_k$, $h_{2k}$ est une bijection de $\Gamma_{2k}$ sur $S/S_k$ et $h_{3k}$ est une fonction de $S/S_k$ à $\Gamma_3$.

On peut donner une construction de la solution générale de (20) dans le cas si $(S,\cdot)$ possède un élément neutral $e$.

Si $F_1$, $F_2$, $F_3$ est une solution de (20) et si $f(\alpha) = F_1(\alpha,e)$ nous avons

$$F_3(\alpha,x) = f(F_2(\alpha,x)) \tag{31}$$

et d'après (20):

$$\begin{aligned}\forall\,\alpha,\bar\alpha\in\Gamma_1\ \forall\, x,\bar x,y\in S\ [F_2(\alpha,x) = F_2(\bar\alpha,\bar x) \implies&\\ f(F_2(\alpha,x\cdot y)) = f(F_2(\bar\alpha,\bar x\cdot y))]\,.&\end{aligned} \tag{32}$$

Inversement si $f:\Gamma_2\to\Gamma_3$ et $F_2:\Gamma_1\times S\to\Gamma_2$ sont telles que (32) a lieu et si nous définissons $F_3$ par (31) et $F_1$ sur $F_2(\Gamma_1,S)\times S$ par

$$\begin{aligned}F_1(\beta,x) = F_1(F_2(\alpha,\bar x),x) = f(F_2(\alpha,\bar x\cdot x))&\\ \text{pour } \beta = F_2(\alpha,\bar x),\ x\in S&\end{aligned} \tag{33}$$

et

$$F_1 \text{ sur } (\Gamma_2\setminus F_2(\Gamma_1,S))\times S \text{ arbitraire dans } \Gamma_3, \tag{34}$$

la fonction $F_1$ est bien définie sur $\Gamma_2\times S$ tout entier et $F_1$, $F_2$, $F_3$ forment une solution de (20).

Nous avons donc le

THÉORÈME 5

*Chaque solution* $F_1$, $F_2$, $F_3$ *de* (20) *et seulement la solution doit être donnée par* (31), (33), (34) *avec* $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ *et* $f : \Gamma_2 \to \Gamma_3$ *remplissantes* (32) *et en outre arbitraires.*

On peut interpreter (construire — mais en réalité pas effectivement) la solution de (32) comme il suit. En définissant les deux relations $\rho^*$ et $\rho$ sur $F_2(\Gamma_1, S)$ d'une façon suivante:

$$\begin{aligned} \beta\,\rho^*\,\gamma \iff{} & \exists\,\alpha, \bar{\alpha} \in \Gamma_1\ \exists\, x, \bar{x}, y \in S\ [F_2(\alpha, x \cdot y) = \beta \\ & \text{et}\ \ F_2(\bar{\alpha}, \bar{x} \cdot y) = \gamma\ \ \text{et}\ \ F_2(\alpha, x) = F_2(\bar{\alpha}, \bar{x})], \\ \beta\,\rho\,\gamma \iff{} & f(\beta) = f(\gamma), \end{aligned}$$

nous voyons que (32) est équivalente à la condition $\rho^* \subset \rho$. Il faut et il suffit donc pour avoir une solution de (32) prendre: une fonction $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ arbitraire, une relation d'équivalence $\rho$ remplissante la condition $\rho^* \subset \rho$ et de plus quelconque et une fonction $f : F_2(\Gamma_1, S) \to \Gamma_3$ dont les niveaux ces sont les classes d'équivalence de la relation $\rho$ et en outre arbitraire. Telle relation $\rho$ existe toujours, p. ex. il suffit prendre $\rho = F_2(\Gamma_1, S) \times F_2(\Gamma_1, S)$. Dans ce cas $f$ est stable.

Nous avons donc le

THÉORÈME 6

*Nous obtiendrons chaque solution* $F_2$, $f$ *de* (32) *et seulement une solution comme il suit: prenons* $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ *arbitraire et* $f : F_2(\Gamma_1, S) \to \Gamma_3$ *telle que la condition* $\rho^* \subset \rho$ *est remplie et de plus quelconque.*

Remarquons que la relation $\rho^*$ est symétrique et si $S \subset S \cdot S = \{x \cdot y : x, y \in S\}$ elle est aussi reflexive. Elle ne doit pas être en même temps transitive, donc elle ne doit pas être une relation d'équivalence, même si $(S, \cdot)$ forme un groupe, par contre $\rho$ est toujours une relation d'équivalence.

En effet soit $\Gamma_1 = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 3\} \cup \mathbb{R}_-$, $(S, \cdot) = (\mathbb{R}, +)$ et

$$F_2(1, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } x = 1, \\ 0 & \text{pour } 0 \neq x \neq 1, \end{cases}$$

$$F_2(2, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 1 \text{ ou } x = 2, \\ 2 & \text{pour } 1 \neq x \neq 2, \\ 3 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

$$F_2(3, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = 2, \\ \text{injective dans } \mathbb{R}_- & \text{pour } 0 \neq x \neq 2. \end{cases}$$

Nous avons $1\,\rho^*\,2$ et $2\,\rho^*\,3$, mais $1\,\rho^*\,3$ n'a pas lieu.

Si $F_2$ remplit l'équation de translation (1), la condition (32) est satisfaite pour chaque fonction $f : \Gamma_2 \to \Gamma_3$, puisque dans ce cas

$$\forall \alpha, \bar{\alpha} \in \Gamma_1 \ \forall x, \bar{x}, y \in S \ [F_2(\alpha, x) = F_2(\bar{\alpha}, \bar{x}) \implies F_2(\alpha, x \cdot y) = F_2(\bar{\alpha}, \bar{x} \cdot y)]. \tag{35}$$

La condition (35) peut être remplie aussi par une fonction $F_2$ n'étant pas une solution de (1). En effet s'il existe un élément $\alpha_0 \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$, la fonction $F_2(\alpha, x) = \alpha_0$ sur $\Gamma_1 \times S$ remplit (33), n'étant pas une solution de (1) ($F_2(\alpha_0, y)$ n'est pas définie! ). Aussi chaque fonction $F_2 : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ injective remplit (35).

Si $F_2$ remplit (35), alors dans ce cas $\beta \rho^* \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$ donc $\rho$ peut être une relation d'équivalence arbitraire, d'où la fonction $f : F_2(\Gamma_1, S) \to \Gamma_3$ peut être aussi quelconque.

Si nous supposons que $(S, \cdot)$ forme un demi-groupe, il existe une liaison entre la solution $F_2$ de (35) et une solution d'une équation de translation ([12]). Si la fonction $F_2$ remplit (35) ses niveaux, c à d. les images inverses $F_2^{-1}(\{\gamma\})$ pour $\gamma \in F_2(\Gamma_1, S)$, sont invariants par rapport au demi-groupe des transformations $T_y(\alpha, x) = (\alpha, x \cdot y)$ pour $\alpha \in \Gamma_1$ et $x, y \in S$ avec la superposition comme l'opération. En considérant analogiquement que dans [11] nous constatons que la fonction $G$ définie sur $F_2(\Gamma_1, S) \times S$ de la manière suivante

$$G(\beta, y) = G(F_2(\alpha, x), y) = F_2(\alpha, x \cdot y) \tag{36}$$

est d'après (35) bien définie et elle remplit l'équation

$$G(G(\alpha, y), z) = G(\alpha, y \cdot z). \tag{37}$$

De plus si $(S, \cdot)$ possède un élément neutre $e$ nous avons d'après (36)

$$G(\beta, e) = \beta. \tag{38}$$

On peut prolonger la fonction $G$ à la solution $\bar{G} : \Gamma_2 \times S \to \Gamma_2$ de (37) remplissante (38) de la manière suivante

$$\bar{G}(\beta, y) = \begin{cases} G(\beta, y) & \text{pour } (\beta, y) \in F_2(\Gamma_1, S) \times S, \\ \beta & \text{pour } (\beta, y) \in [\Gamma_2 \setminus F_2(\Gamma_1, S)] \times S. \end{cases}$$

Inversement si $(S, \cdot)$ forme un groupe, soit $G : \Gamma_2 \times S \to \Gamma_2$ une solution de (37) remplissante (38), soit $A$ un selecteur de la famille $\{\{(\alpha, x) : x \in S\}\}_{\alpha \in \Gamma_1}$ (p. ex. on peut prendre $A = \{(\alpha, e) : \alpha \in \Gamma_1\}$) et soit $F_2^* : A \to \Gamma_2$ une fonction arbitraire. On peut vérifier que le prolongement $F_2$ de $F_2^*$ sur l'ensemble $\Gamma_1 \times S$ défini comme il suit

$$F_2(\alpha, x) = G(F_2^*(\alpha, x \cdot y), y^{-1}) \quad \text{pour } (\alpha, x \cdot y) \in A, \tag{39}$$

est bien défini et il remplit (35) (voir [11] — les transformations $T_y(\alpha, x)$ forment maintenant un groupe des bijections de $\Gamma_1 \times S$).

La détermination des toutes fonctions $F_2$ remplissantes (35) est donc, dans le cas si $(S, \cdot)$ forme un groupe, équivalente à la détermination des toutes solutions de (37) remplissantes (38) (voir la formule (16)).

Remarquons que si $f(F_2)$ remplit la condition

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha, \bar{\alpha} \in \Gamma_1\ \forall\, x, \bar{x}, y \in S\ \ [f(F_2(\alpha, x)) = f(F_2(\bar{\alpha}, \bar{x})) \implies \\ f(F_2(\alpha, x \cdot y)) = f(F_2(\bar{\alpha}, \bar{x} \cdot y))]\,, \end{aligned} \tag{40}$$

alors la condition (32) a lieu. On peut faire toutes considération pour la fonction $f(F_2)$ remplissante (40) que nous avons fait plus haut pour la fonction $F_2$ satisfaisante à (35). Si nous avons déterminée la fonction $H = f(F_2)$ sur $\Gamma_1 \times S$ comme plus haut la fonction $F_2$, nous pouvons prendre la fonction $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ telle que

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha, \bar{\alpha} \in \Gamma_1\ \forall\, x, \bar{x} \in S:\ [F_2(\alpha, x) = F_2(\bar{\alpha}, \bar{x}) \implies \\ H(\alpha, x) = H(\bar{\alpha}, \bar{x})]\,, \end{aligned} \tag{41}$$

c. à d. telle que les niveaux de $F_2$ sont inclus dans les niveaux de $H$, et déterminer par la condition $f(F_2)$ la fonction $f : F_2(\Gamma_1, S) \to \Gamma_3$. Ayant les fonctions $F_2$ et $f$ nous déterminons $F_1$ et $F_3$ par (31), (33) et (34), en obtenant les solutions $F_1$, $F_2$, $F_3$ de (20). Remarquons que dans cette méthode $F_2$ est presque arbitraire (la condition (41)) et $f$ est déterminée et plus haut nous avons la situation inverse.

Remarquons enfin que si $f$ est injective les conditions (32), (35) et (40) sont équivalentes. Si $F_2$ est injective (32) et (35) sont toujours vraies. Du reste si $f$ et $F_2$ sont injectives (40) a aussi lieu.

On peut résumer nos considérations dans le

Théorème 7

*Supposons que $(S, \cdot)$ forme un groupe.*

(I) *Chaque solution $F_1$, $F_2$, $F_3$ de* (20), *pour laquelle $F_2$ remplit de plus* (35) *et seulement cette solution, on peut obtenir de la manière suivante: nous prenons une solution $G : \Gamma_2 \times S \to \Gamma_2$ de* (37) *et* (38) *par la formule* (16) *(avec $f(\alpha) \equiv \alpha$), nous définissons $F_2$ par* (39) *et $F_1$ et $F_3$ par* (33) *(avec $f : \Gamma_2 \to \Gamma_3$ arbitraire),* (34) *et* (31).

(II) *Chaque solution $F_1, F_2, F_3$ de* (20), *pour laquelle $f(F_2)$, où $f(\alpha) = F_1(\alpha, e)$ pour $\alpha \in F_2(\Gamma_1 \times S)$, remplit* (40) *et seulement cette solution, on peut obtenir comme il suite: nous prenons une solution $G : \Gamma_3 \times S \to \Gamma_3$*

*de* (37) *et* (38) *par la formule* (16) *(avec* $f(\alpha) \equiv \alpha$*), nous définissons la fonction* $H : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_3$ *comme* $F_2$ *dans* (39), *prenons la fonction* $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ *telle que* (41) *a lieu et définissons* $f : F_2(\Gamma_1, S) \to \Gamma_3$ *par la condition* $f(F_2) = H$ *et* $F_1$ *et* $F_3$ *par* (33), (34) *et* (31).

Voilà des EXEMPLES simples de l'application de ce théorème pour la construction des solutions de (20). Au commencement un exemple pour la partie (I) du théorème 7. Soient $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \mathbb{R}$ (les nombres réeles) et $(S, \cdot) = (\mathbb{R}, +)$ et prenons $G(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, le selecteur $A = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $F_2^* : A \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire, $g(\alpha) = F_2^*(\alpha, 0)$ et d'après (39): $F_2(\alpha, x) = g(\alpha) + x$. Dans la suite pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitraire d'après (31) on a: $F_3(\alpha, x) = f(g(\alpha) + x)$ et d'après (33): $F_1(\beta, x) = f(\beta + x)$ ((34) n'est pas employé dans ce cas puisque $\Gamma_2 \setminus F_2(\Gamma_1, S) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$). Les fonctions $F_1$, $F_2$, $F_3$ forment une solution de (20) pour laquelle $F_2$ remplit (35).

Maintenant un exemple pour la partie (II) du théorème 7. Soient $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $(S, \cdot)$, $G$, $A$ comme plus haut. Prenons la fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come plus haut la fonction $F_2$, c. à d. posons $H(\alpha, x) = g(\alpha) + x$. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une injection, posons $F_2(\alpha, x) = h(g(\alpha) + x)$, donc (41) est remplie. Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la condition $f(F_2) = H$, alors $f(\alpha) = h^{-1}(\alpha)$, $F_1$ par (33) et (34) comme $F_1(\beta, x) = h^{-1}(\beta) + x$ pour $\beta \in h(\mathbb{R})$ et arbitraire pour $\beta \notin h(\mathbb{R})$ et $F_3$ par (31) comme $F_3(\alpha, x) = g(\alpha) + x$. Les fonctions $F_1$, $F_2$, $F_3$ forment une solution de (20) pour laquelle $f(F_2)$ remplit (40).

Remarquons que la fonction $f(F_2)$ dans l'exemple premier ne remplit pas de la condition (40), mais la fonction $F_2$ dans l'exemple deuxième satisfait à (35). On peut modifier cet exemple de cette manière que la fonction $F_2$ ne remplit pas (35). Soient $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $(S, \cdot)$, $G$, $A$ comme plus haut, posons $H(\alpha, x) = x$ (c. à d. nous mettons $g(\alpha) \equiv 0$) et

$$F_2(\alpha, x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{pour } x \neq 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ h_2(\alpha) & \text{pour } x = 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $h_1$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur l'ensemble des nombres réels non-négatifs et $h_2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des nombres réels négatifs. La condition (41) est remplie, mais la fonction $F_2$ ne satisfait pas à la condition (35). Nous avons dans notre cas $f(\alpha) = h_1^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$ et $f(\alpha) = 0$ pour $\alpha < 0$, et de là d'après (31): $F_3(\alpha, x) = x$ et d'après (33)

$$F_1(\alpha, x) = \begin{cases} h_1^{-1}(\alpha) + x & \text{pour } \alpha \geqslant 0 \text{ et } x \in S, \\ x & \text{pour } \alpha < 0 \text{ et } x \in S. \end{cases}$$

Les méthodes de la construction des solutions de (20), données dans les parties (I) et (II) du théorème 7, se donc croissent.

PROBLÈMES

1. Donner effectivement une solution générale de l'équation conditionnelle (32), où $f : \Gamma_2 \to \Gamma_3$ et $F_2 : \Gamma_1 \times S \to \Gamma_2$ sont des fonctions cherchées.
2. Resoudre des équations conditionnelles (35) et (40) pour le groupoïde $(S, \cdot)$ arbitraire.

L'équation (20) est considérée dans [1] p. 311 sous la forme

$$F(G(x,y),z) = H(x, K(y,z))$$

et sous les suppositions au sujet des fonctions $F$, $G$, $H$, $K$ différentes que chez nous.

On considère dans [8] l'équation (19) du type de Pexider, c. à d. l'équation de la forme

$$F_1(F_2(\alpha,(x,y,a)),(y,z,b)) = F_3(\alpha,(x,z,a\cdot b)).$$

Si l'ensemble $A$ n'a qu'un élément nous obtenons l'équation (20).

**5.** En liaison avec l'équation (1) on peut poser la question sous quelles conditions nécéssaires et suffisantes au suject de la famille $\mathcal{F}$ des fonctions $F(\cdot,x) : \Gamma \to \Gamma$ pour $x$ de $S$ il existe une operation $\cdot : S \times S \to S$ avec laquelle la fonction $F : \Gamma \times S \to \Gamma$ remplit (1). On peut formuler la même question pour l'operation $\cdot$ avec laquelle $(S, \cdot)$ forme un groupe.

La réponse à la première question est facile. Il faut et il suffit que

$$F(F(\alpha,x),y) \in \mathcal{F} \quad \text{pour chaque } x, y \text{ de } S, \tag{42}$$

c. à d. la famille $\mathcal{F}$ est fermée par rapport à la superposition des fonctions.

La nécéssité est évidente. Si (42) a lieu, pour chaque $(x,y) \in S \times S$ il existe au moins un $z \in S$ tel que $F(F(\alpha,x),y) = F(\alpha,z)$. L'opération qui à la paire $(x,y)$ attribue un de ces $z$, c'est l'operation $\cdot$ exigée.

La réponse à la deuxième question est suivante: il faut et il suffit que

$$\left.\begin{array}{l}\text{la famille } \mathcal{F} \text{ forme un groupe par raport}\\ \text{à la superposition des fonctions}\end{array}\right\} \tag{43}$$

et

$$\left.\begin{array}{l}\text{les classes d'équivalence de la relation } \rho\\ x\,\rho\,y \ \Leftrightarrow\ \forall\,\alpha \in \Gamma:\ F(\alpha,x) = F(\alpha,y)\\ \text{ont la même puissance.}\end{array}\right\} \tag{44}$$

Pour démontrer la nécéssité soit l'opération $\cdot : S \times S \to S$ tel que $(S, \cdot)$ forme un groupe et $F$ remplit (1). Puisque $x \to F(\cdot, x)$ est un homomorphisme de $S$ sur $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F}$ forme un groupe, alors (43) a lieu. La relation $\rho$ est une congruence, donc il existe un sous-groupe $S^*$ de $S$ tel que $S/\rho = S/S^*$, d'où (44) a lieu.

Supposons maintenant que (43) et (44) aient lieu, d'où la famille $\mathcal{F}^* = \{F^*(\cdot, C)\}_{C \in S/\rho}$, où $F^*(\alpha, C) = F(\alpha, x)$ pour $\alpha \in \Gamma$, $x \in C \in S/\rho$, forme aussi un groupe par rapport à la superposition des fonctions. De plus l'application $C \to F^*(\cdot, C)$ est une bijection de $S/\rho$ sur $\mathcal{F}^*$. Il en résulte que pour chaque paire $(C_1, C_2) \in S/\rho \times S/\rho$ il existe exactement un $C$ telle que

$$F^*(F^*(\alpha, C_1), C_2) = F^*(\alpha, C).$$

Si nous prenons $C_1 * C_2 = C$, cette opération $* : S/\rho \times S/\rho \to S/\rho$ est bien définie et $(S/\rho, *)$ forme un groupe comme l'image du groupe $\mathcal{F}^*$ par l'isomorphisme $F^*(\cdot, C) \to C$. Désignons par $C_0$ l'élément neutre du groupe $(S/\rho, *)$, par $\# : C_0 \times C_0 \to C_0$ une opération telle que $(C_0, \#)$ forme un groupe, par $\phi_C : C_0 \to C \neq C_0$ $(C \in S/\rho)$ une bijection quelconque (elle existe d'après (44)), $\phi_{C_0} = \mathrm{id}|_{C_0}$ et posons

$$x \cdot y = \phi_{C_1 * C_2}[\phi_{C_1}^{-1}(x) \# \phi_{C_2}^{-1}(y)] \quad \text{pour } x \in C_1 \in S/\rho \text{ et } y \in C_2 \in S/\rho.$$

Nous allons montrer que $\cdot$ est une opération exigée. L'opération $\cdot$ est bien définie sur $S \times S$ et on peut facilement démontrer qu'elle est associative et que l'élément neutre $e$ du groupe $(C_0, \#)$ est aussi l'élément neutre de l'opération $\cdot$. L'élément $y = \phi_{C^{-1}}\left([\phi_C^{-1}(x)]^{-1}\right)$ pour $x \in C \in S/\rho$ est l'élément inverse pour l'élément $x$ $(x \cdot y = e)$. Nous avons donc montré que $(S, \cdot)$ forme un groupe. De plus pour $x \in C_1 \in S/\rho$ et $y \in C_2 \in S/\rho$:

$$F(F(\alpha, x), y) = F^*(F^*(\alpha, C_1), C_2) = F^*(\alpha, C_1 * C_2) = F(\alpha, x \cdot y),$$

donc (1) a lieu, c.q.f.d.

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME 8

*Il existe, pour une famille $\mathcal{F}$ des fonctions $F(\cdot, x) : \Gamma \to \Gamma$ pour $x \in S$, une opération $\cdot : S \times S \to S$ telle que* (1) *a lieu si et seulement si* (42) *est remplie. Il existe pour cette famille $\mathcal{F}$ une opération $\cdot : S \times S \to S$ telle que $(S, \cdot)$ forme un groupe et* (1) *a lieu si et seulement si* (43) *et* (44) *sont satisfaites.*

En effet on a démontré aussi la proposition suivante:

PROPOSITION

*Soit $\rho$ une relation d'équivalence sur un ensemble $S$ et $*$ une opération sur $S/\rho$ telle que $(S/\rho, *)$ forme un groupe. Il existe une opération $\cdot : S \times S \to S$ telle que $(S, \cdot)$ forme un groupe et $*$ est indiquée par $\cdot$ si et seulement si les classes d'équivalence de $\rho$ ont la même puissance.*

Au sujet de la condition (43) voir [11], où on a démontré en outre, le théorème suivant:

*Si la famille $\mathcal{F}$ des fonctions qui transforment un ensemble $\Gamma$ dans $\Gamma$ forme un groupe par rapport à la superposition, alors chaque $f$ de $\mathcal{F}$ admet la même contre-domaine, $f$ est une bijection sur ce contre-domaine et la condition suivante est remplie*

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma\ [f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha_2) \implies f_2(\alpha_1) = f_2(\alpha_2)],$$

*c. à d. les familles des niveaux de chaques fonctions de $\mathcal{F}$ sont les mêmes.*

## Travaux cités


[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications,* Mathematics in Science and Engineering **19**, Academic Press, New York – London, 1966.

[2] J. Aczél, S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte,* Monografie Matematyczne **39**, PWN, Warszawa, 1960.

[3] A. T. Bharucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications,* McGraw-Hill Series in Probability and Statistics, McGraw-Hill Book, New York – Toronto – London, 1960.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Livre II, *Algébre*, Chaptire I, *Structures algébriques,* Hermann, Paris, 1951.

[5] G. Frege, *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes begründen*, Verlag Friedrich Frommann, Jena, 1874.

[6] D. Gronau, *A historical remark on the translation equation and iteration theory,* Aequationes Math. **51** (1996), 151.

[7] D. Gronau, *Gottlob Frege, a pioneer in iteration theory,* dans: Iteration Theory (ECIT 94) (Opava), Grazer Math. Ber. **334**, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1997, 105-119.

[8] A. Grząślewicz, *On the solution of the equation $F_1(F_2(x,\beta),\alpha) = F_3(x, \alpha \cdot \beta)$,* Wyż. Szkoła Ped. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **8** (1977), 61-78.

[9] Z. Moszner, *The translation equation and its application,* Demonstratio Math. **6** (1973), 309-327.

[10] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible,* Aequationes Math. **9** (1973), 46-59.

[11] Z. Moszner, *Sur les groupes de fonctions,* Ann. Polon. Math. **37** (1980), 175-178.

[12] Z. Moszner, *Sur les fonctions des niveaux invariants,* Opuscula Math. **14** (1994), 143-151.

[13] Z. Moszner, *General theory of the translation equation,* Aequationes Math. **50** (1995), 17-37.

[14] J. Tabor, *Struktura ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidach Brandta i Ehresmanna oraz rozkłady niezmiennicze tych grupoidów, (La structure de la solution générale de l'équation de translation sur les groupoïdes de Brandt et de Ehresmann est les décompositions invariantes de ces groupoïdes),* Wyż. Szkoła Ped. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt. (par erreur 5) **6** (1970), 107-153.

*Ecole Normale Supérieure*
*Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*Pologne*
*e-mail:* zmoszner@wsp.krakow.pl