ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 207 Prace Matematyczne XVI 1999

Eugeniusz Wachnicki

Sur une équation intégro–fonctionnelle

Abstract. In the present note we consider the equation

$$\frac{u(s)+u(t)}{2} = u\left(\frac{s+t}{2}\right)F\left(\frac{t-s}{2}\right) + \int_s^t u(\tau)G\left(\frac{t-s}{2} - \left|\tau - \frac{t+s}{2}\right|\right)d\tau,$$

where $s,t \in I$, $s \leqslant t$, F and G are given functions for which there exists a function g such that

$$F(r) = g(r) - 2\int_0^r g(\rho)G(r-\rho)\,d\rho,$$

I being an open interval of $\mathbb{R}$. We give the form of the general solution of this equation in the class of the absolutly locally integrable functions in I. The results obtained extend some of those given in [3] and [4].

1. Dans la note présente on étudie l'équation

$$\frac{u(s)+u(t)}{2} = u\left(\frac{s+t}{2}\right)F\left(\frac{t-s}{2}\right) + \int_s^t u(\tau)G\left(\frac{t-s}{2} - \left|\tau - \frac{t+s}{2}\right|\right)d\tau, \tag{1}$$

$s,t \in I$, $s \leqslant t$, F et G sont des fonctions données, définies dans l'intervalle $[0,\alpha)$, où α est la demi-longueur de l'intervalle I ($\alpha = +\infty$ si I est non-borné).

Dans la note [3] on considère le cas particulier de l'équation (1) avec $G \equiv 0$. L'équation (1) avec $G(t) = 0$ et $F(t) = \operatorname{ch}\lambda t$ ou $F(t) = \cos\lambda t$, $\lambda \geqslant 0$, ainsi que l'équation (1) dont $G(t) = -\frac{\lambda}{2}\operatorname{sh}\lambda t$ et $F(t) = \operatorname{ch}\lambda t$ ou bien $G(t) = \frac{\lambda}{2}\sin\lambda t$ et $F(t) = \cos\lambda t$, $\lambda \geqslant 0$, est étudiée dans [4]. On y donne dans ces cas la forme

AMS (1991) subject classification: 39B20.

général des solutions de cet équation dans la classe de fonctions continues. Pour $G(t) = 0$ et $F(t) = 1$ on obtient l'équation fonctionnelle de Jensen dont la forme de solutions générales est bien connue ([1]).

2. Avant tout on va chercher une condition pour les fonctions F et G sous laquelle il existe dans l'intervalle I une solution constante et non-nulle de l'équation (1). En supposant que $u(x) = c$ pour $x \in I$, $c \neq 0$, est une solution de (1) on obtient

$$c = cF\left(\frac{t-s}{2}\right) + c\int_s^t G\left(\frac{t-s}{2} - \left|\tau - \frac{s+t}{2}\right|\right) d\tau$$

et donc

$$1 = F\left(\frac{t-s}{2}\right) + \int_s^t G\left(\frac{t-s}{2} - \left|\tau - \frac{s+t}{2}\right|\right) d\tau.$$

Posons $x = \frac{s+t}{2}$, $r = \frac{t-s}{2}$. Alors

$$1 = F(r) + \int_{x-r}^{x+r} G(r - |\tau - x|)\, d\tau.$$

On remarque que

$$\int_{x-r}^{x+r} G(r - |\tau - x|)\, d\tau = 2\int_0^r G(\rho)\, d\rho.$$

Alors

$$1 = F(r) + 2\int_0^r G(\rho)\, d\rho. \tag{2}$$

L'égalité (2) nous dit que si la fonction G est une fonction localement intégrable dans $[0, \alpha)$ alors F est continue dans $[0, \alpha)$.

On va démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1

Si la fonction G est localement intégrable dans $[0, \alpha)$ et si la fonction F est continue en $[0, \alpha)$, et la condition (2) *est remplie, alors toute fonction affine, définie dans I est une solution de l'équation* (1).

Démonstration. Pour $x = \frac{s+t}{2}$, $r = \frac{t-s}{2}$, l'équation (1) s'écrit

$$u(x+r) + u(x-r) = 2u(x)F(r) + 2\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r - |\tau - x|)\, d\tau. \tag{3}$$

On a

$$\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r - |\tau - x|)\, d\tau = \int_0^r [u(x+\rho) + u(x-\rho)]G(r-\rho)\, d\rho$$

et l'équation (1) est équivalente à l'équation

$$u(x+r) + u(x-r) = 2u(x)F(r) + 2\int_0^r [u(x+\rho) + u(x-\rho)]G(r-\rho)\,d\rho. \quad (4)$$

Si $u(x) = \lambda x + \beta$ pour $x \in I$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$u(x+r) + u(x-r) = 2(\lambda x + \beta)$$

et

$$\int_0^r [u(x+\rho) + u(x-\rho)]G(r-\rho)\,d\rho = 2(\lambda x + \beta)\int_0^r G(r-\rho)\,d\rho.$$

Par conséquent, compte tenu de (2), la fonction affine u vérifie l'équation (4), donc elle vérifie aussi l'équation (1).

REMARQUE

En analysant cette démonstration on voit que si pour une fonction u l'équation de Jensen:

$$u(s) + u(t) = 2u\left(\frac{s+t}{2}\right), \quad s, t \in I,$$

est remplie alors la fonction u vérifie l'équation (1) sous la condition que (2) ait lieu.

THÉORÈME 2

Supposons que la fonction G est absolument localement intégrable dans $[0,\alpha)$ et que la fonction F est continue dans $[0,\alpha_0) \subset [0,\alpha)$ pour certain $\alpha_0 \in [0,\alpha)$, et de plus $\int_0^r F(\rho)\,d\rho \neq 0$ pour tout $r \in (0,\alpha_0)$. Alors toute solution de l'équation (1) *définie et absolument localement intégrable dans I est continue.*

Démonstration. Soit u une solution de (1) définie et absolument localement intégrable dans I. Soit $x_0 \in I$. Prenons $r_0 \in (0,\alpha)$ tel que $[x_0 - 2r_0, x_0 + 2r_0] \subset I$. Si $0 \leqslant r \leqslant r_0$ et $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, alors $[x-r, x+r] \subset I$. En posant $s = x + r$, $t = x - r$, l'équation (1) passe à (3) c.-à-d. à l'équation

$$u(x+r) + u(x-r) = 2u(x)F(r) + 2\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r - |\tau - x|)\,d\tau.$$

En intégrant la dernière égalité par rapport à r dans l'intervalle $[0,\rho]$ où $0 < \rho < \min(\alpha_0, r_0)$, on obtient

$$\int_0^\rho [u(x+r) + u(x-r)]\,dr = u(x)\int_0^\rho F(r)\,dr \\ + 2\int_0^\rho \left(\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r - |\tau - x|)\,d\tau\right) dr.$$

Puisque

$$\int_0^\rho [u(x+r)+u(x-r)]\,dr = \int_{x-\rho}^{x+\rho} u(\tau)\,d\tau$$

donc

$$\int_{x-\rho}^{x+\rho} u(\tau)\,d\tau = 2u(x)\int_0^\rho F(r)\,dr \\ + 2\int_0^\rho \left(\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r-|\tau-x|\,d\tau\right)\,dr.$$

Alors, en appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2c}\int_{x-\rho}^{x+\rho} u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{c}\int_0^\rho \left(\int_{x-r}^{x+r} u(\tau)G(r-|\tau-x|)\,d\tau\right)\,dr \\ &= \frac{1}{2c}\int_{x-\rho}^{x+\rho} u(\tau)\,d\tau - \frac{1}{c}\int_{x-\rho}^{x+\rho} \left(\int_{|\tau-x|}^{\rho} u(\tau)G(r-|\tau-x|)\,dr\right)\,d\tau. \end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = \frac{1}{2c}\int_{x-\rho}^{x+\rho} u(\tau)\left[1-2\int_0^{\rho-|\tau-x|} G(\sigma)\,d\sigma\right]\,d\tau \tag{5}$$

pour $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, où $c = \int_0^\rho F(r)\,dr$. Puisque G est une fonction localement intégrable donc la fonction

$$x \longmapsto 1-2\int_0^{\rho-|\tau-x|} G(\sigma)\,d\sigma, \quad x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$$

est continue. D'où et de (5) il résulte que u est une fonction continue dans $(x_0-\rho, x_0+\rho)$. Le nombre x_0 a été choisi arbitrairement dans I, alors f est continue dans I.

THÉORÈME 3

Si les fonctions F et G vérifient les hypothèses du théorème 2 et la condition (2) *ainsi que la condition*

$$\exists\, r_1 \in [0,\alpha)\ \exists\, M>0\ \forall \rho \in (0,r_1) : \ \frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho |G(t)|\,dt < M \tag{6}$$

est remplie, alors toute solution de (1) *définie et absolument localement intégrable dans I est de la forme*

$$u(x) = ax+b, \quad x \in I,\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Supposons que u est une solution de (1) définie et absolument localement intégrable dans I. La condition (2) implique que $F(0) = 1$. Alors il existe α_0 tel que $0 < \alpha_0 < \alpha$ et $\int_0^r F(\rho)\,d\rho > 0$ pour tout $r \in [0, \alpha_0)$. D'où et du théorème 2 il résulte la continuité de la fonction u dans I. Soient $x_0 \in I$, $0 < r < \min(\alpha_0, r_1)$ et $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Pour $x_0 + \rho = s$, $x_0 - \rho = t$, $0 \leqslant \rho \leqslant r$, l'équation (1) passe à l'équation suivante

$$u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) = 2u(x_0)F(\rho) + 2\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} u(\tau)G(\rho - |\tau - x_0|)\,d\tau.$$

De (2) on a

$$F(\rho) = 1 - \int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} G(\rho - |\tau - x_0|)\,d\tau.$$

Par conséquent

$$u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) - 2u(x_0) = 2\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} [u(\tau) - u(x_0)]G(\rho - |\tau - x_0|)\,d\tau$$

et ensuite

$$\frac{u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) - 2u(x_0)}{\rho^2} = \frac{2}{\rho^2}\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} [u(\tau) - u(x_0)]G(\rho - |\tau - x_0|)\,d\tau$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de u implique l'existence du nombre $\delta > 0$ tel que

$$|u(\tau) - u(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

pour $\tau \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) - 2u(x_0)}{\rho^2}\right| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2M\rho^2}\int_{x_0-\rho}^{x_0+\rho} |G(\rho - |\tau - x_0|)|\,d\tau \\ &= \frac{\varepsilon}{M\rho^2}\int_0^{\rho} |G(\tau)|\,d\tau \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

pour $0 < \rho < \min(\delta, \alpha_0, r_1)$. Il en résulte que la deuxième dérivée symétrique de la fonction u s'annule en x_0 et par conséquent elle s'annule dans l'intervalle I. Cela implique que u est affine.

Voici trois exemples des fonctions F et G verifiantes les conditions (2) et (6).

Exemple 1
$F(t) = \operatorname{ch} \lambda t$, $G(t) = -\frac{\lambda}{2}\operatorname{sh} \lambda t$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

$F(t) = \cos \lambda t$, $G(t) = \frac{\lambda}{2} \sin \lambda t$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 3

$F(t) = e^{at^2}$, $G(t) = -ate^{at^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Passons maintenant au cas plus général. Supposons que les fonctions F et G sont définies par l'égalité

$$F(r) = g(r) - 2 \int_0^r g(\rho) G(r - \rho)\, d\rho, \quad r \in [0, \alpha), \tag{7}$$

où g est une fonction définie dans $[0, \alpha)$. Le problème de l'existence de la fonction g quand les fonctions F et G sont données nous ramène à la question d'existence des solutions de l'équation intégrale de Volterra ([2], p. 77). Si $g(r) = 1$ pour $r \in [0, \alpha)$, la condition (7) passe à l'égalité (2).

On démontrera les théorèmes suivants:

Théorème 4

Supposons que les fonctions g et G sont continues dans l'intervalle $[0, \alpha)$ et $g(0) \neq 0$. Alors toute solution de l'équation (1) définie et absolument localement intégrable dans I est de classe C^2 dans I.

Démonstration. Soit u une solution de (1) définie et absolument localement intégrable dans I. Remarquons que l'égalité (7) et le fait que $g(0) \neq 0$ entraînent que la fonction F est continue dans $[0, \alpha)$ et $F(0) \neq 0$. Il en résulte que les suppositions du théorème 2 sont vérifiées, donc la fonction u étant la solution de (1) absolument localement intégrable dans I est continue dans I. En adoptant la notation de la démonstration du théorème 2, par l'analyse de la formule (5) on constate que la fonction u est de classe C^1 dans $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2c}[u(x+\rho) - u(x-\rho)] \\ &\quad - \frac{1}{c}\left[\int_x^{x+\rho} u(\tau) G(\rho + x - \tau)\, d\tau - \int_{x-\rho}^{x} u(\tau) G(\rho - x + \tau)\, d\tau\right] \\ &= \frac{1}{2c}[u(x+\rho) - u(x-\rho)] \\ &\quad - \frac{1}{c} \int_0^\rho [u(\rho - \tau + x) - u(\tau - \rho + x)] G(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

pour $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. La dernière égalité implique que u est de classe C^2 dans $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Puisque le nombre x_0 a été choisi arbitrairement dans I donc u est de classe C^2 dans I.

THÉORÈME 5

Supposons que les fonctions g et G sont continues dans $[0, \alpha)$ et que $g(0) = 1$. Supposons encore que la condition (6) *est remplie. Si l'équation* (1) *possède une solution non nulle qui est absolument localement intégrable dans I, alors il existe la limite suivante*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{g(r) - 1}{r^2}.$$

Démonstration. Soit u une solution non nulle et absolument localement intégrable dans I de l'équation (1). Du théorème précédent il résulte que u est de classe C^2 dans I. Considérons un point $x_0 \in I$ tel que $u(x_0) \neq 0$. Prenons $r_0 \in (0, \alpha)$ tel que $(x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subset I$. Pour $r \in [0, r_0)$, compte tenu de (4) et en appliquant (7) on a

$$\begin{aligned} &u(x_0 + r) + u(x_0 - r) \\ &\qquad = 2u(x_0)F(r) + 2\int_0^r [u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho)]G(r - \rho)\, d\rho \\ &\qquad = 2u(x_0)g(r) + 2\int_0^r [u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) - 2u(x_0)g(\rho)]G(r - \rho)\, d\rho \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} &\frac{u(x_0 + r) + u(x_0 - r) - 2u(x_0)}{r^2} \\ &\qquad = 2u(x_0)\frac{g(r) - 1}{r^2} \\ &\qquad\quad + \frac{2}{r^2}\int_0^r [u(x_0 + \rho) + u(x_0 - \rho) - 2u(x_0)]G(r - \rho)\, d\rho \\ &\qquad\quad + \frac{4u(x_0)}{r^2}\int_0^r [1 - g(\rho)]G(r - \rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de la fonction u et de la fonction g implique l'existence du nombre $\delta > 0$ tel que

$$|u(x_0 + \rho) - u(x_0 - \rho) - 2u(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{et} \quad |g(\rho) - 1| < \frac{\varepsilon}{8Mu(x_0)}$$

pour $0 < \rho < \delta$. D'où, compte tenu de (6), on a

$$\Big|\frac{2}{r^2}\int_0^r [u(x_0+\rho)+u(x_0-\rho)-2u(x_0)]G(r-\rho)\,d\rho$$
$$+\frac{4u(x_0)}{r^2}\int_0^r [1-g(\rho)]G(r-\rho)\,d\rho\Big| < \varepsilon$$

pour $0 < \rho < \delta$ et donc

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{2}{r^2}\int_0^r [u(x_0+\rho)+u(x_0-\rho)-2u(x_0)]G(r-\rho)\,d\rho$$
$$+\frac{4u(x_0)}{r^2}\int_0^r [1-g(\rho)]G(r-\rho)\,d\rho = 0.$$

Puisque u est de classe C^2 donc

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{u(x_0+r)+u(x_0-r)-2u(x_0)}{r^2} = u''(x_0).$$

D'où et de (8) il résulte que

$$\lim_{r\to 0^+} 2u(x_0)\frac{g(r)-1}{r^2} = u''(x_0).$$

Par conséquent

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{g(r)-1}{r^2} = \frac{u''(x_0)}{2u(x_0)},$$

ce qui termine la démonstration du théorème 5.

Théorème 6

Supposons que les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites et que

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{g(r)-1}{r^2} = \frac{\lambda}{2},$$

alors toute solution u de (1), définie et absolument localement intégrable dans I est de la forme

$$u(t) = \begin{cases} at+b & si \quad \lambda = 0,\\ ae^{\sqrt{\lambda}t}+be^{-\sqrt{\lambda}t} & si \quad \lambda > 0,\\ a\sin(\sqrt{-\lambda}t)+b\cos(\sqrt{-\lambda}t) & si \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{9}$$

De plus, si la solution u est non-nulle alors la fonction g est nécessairement de la forme

$$g(t) = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda = 0,\\ \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}t & si \quad \lambda > 0,\\ \cos(\sqrt{-\lambda}t) & si \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Démonstration. Soit u une solution de (1) définie et absolument localement intégrable dans I. Du théorème 4 il résulte que la fonction u est de classe C^2 dans I et elle vérifie l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &u(x+r)+u(x-r) \\ &\qquad = 2u(x)g(r) + 2\int_0^r [u(x+r)+u(x-r)-2u(x)g(r)]G(r-\rho)\,d\rho \end{aligned}$$

pour $x \in I$, $r \in (0, r_0) \subset [0, \alpha)$ où r_0 est un nombre strictement positif tel que $(x - r_0, x + r_0) \subset I$.

Il en vient

$$\begin{aligned} &\frac{u(x+r)+u(x-r)-2u(x)}{r^2} \\ &\quad = 2u(x)\frac{g(r)-1}{r^2} + \frac{2}{r^2}\int_0^r [u(x+\rho)+u(x-\rho)-2u(x)g(\rho)]G(r-\rho)\,d\rho. \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 5 et en passant à la limite quand $r \to 0^+$ on constate que

$$u''(x) = \lambda u(x)$$

pour $x \in I$. La derniére égalité nous ramène directement à la forme (9) de la fonction u. Directement de (9) et de l'unicité de solutions de l'équation de Volterra il résulte la forme (10) de la fonction g. La démonstration du théorème 6 est donc terminée.

Exemple 4

Pour illustrer le théorème 6 on va donner un exemple. Considerons l'équation

$$\begin{aligned} \frac{u(t)+u(s)}{2} &= u\left(\frac{t+s}{2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\left(\frac{t-s}{2}\right)^4\right) \\ &\quad + \int_s^t u(\tau)\left(\frac{t-s}{2} - \left|\tau - \frac{t+s}{2}\right|\right) d\tau \quad s,t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour cet équation $F(t) = 1 - \frac{1}{6}r^4$, $G(r) = r$. La condition (6) est vérifié et l'égalité (7) n'est remplie qu'avec $g(r) = r^2 + 1$. On voit donc que $g(0) = 1$ et $\lim_{r\to 0^+} \frac{g(r)-1}{r^2} = 1$. Alors $\lambda = 2$ et le théorème 6 nous dit que si l'équation (11) possède une solution u absolument localement intégrable dans $\mathbb{R}$ donc $u(x) = ae^{\sqrt{2}x} + be^{-\sqrt{2}x}$, $x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Et donc, la deuxième partie du théorème 2, implique que $a = b = 0$. On en deduit que l'équation (11) n'admet que la solution nulle comme la solution absolument localement intégrable dans $\mathbb{R}$.

Réferences

[1] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, PWN, Uniwersytet Śląski, Warszawa - Kraków - Katowice, 1985.

[2] A. Piskorek, *Równania całkowe*, WNT, Warszawa, 1980 (en polonais).

[3] Z. Powązka, *Sur une équation fonctionnelle associée à l'équation de Jensen*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **15** (1998), 119-128.

[4] E. Wachnicki, *Sur un développement de la valeur moyenne*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Matematyczne **14** (1997), 35-48.

Ecole Normale Supérieure
Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Pologne
E-mail: euwachni@wsp.krakow.pl