

Krystyna Kuźniar, Maciej Zajac

Weryfikacja metody aproksymacji połączonych (CA) w zagadnieniu własnym prostego trójwymiarowego modelu konstrukcji

Wstęp

Ważnym etapem w analizie oddziaływań o charakterze dynamicznym na konstrukcję jest wyznaczenie jej częstotliwości drgań własnych. Potrzebne jest zatem rozwiązanie zagadnienia własnego [1, 7].

Dla prostych modeli matematycznych konstrukcji istnieje możliwość otrzymania poszukiwanych częstotliwości drgań własnych metodą analityczną [9]. W przypadku rzeczywistych obiektów o złożonej charakterystyce rozwiązania poszukuje się z wykorzystaniem metod numerycznych, wśród których powszechnie stosowana jest metoda elementów skończonych (MES) [12, 13].

Każda modernizacja konstrukcji powodująca zmianę sztywności lub masy wpływa na przesunięcie widma jej częstotliwości drgań własnych, a wyznaczenie nowych wartości tych charakterystyk dynamicznych wymaga nowych obliczeń – ponownego rozwiązania zagadnienia własnego z nowymi macierzami sztywności i mas.

Programy bazujące na algorytmach MES, dzięki nowoczesnym nakładkom graficznym, umożliwiają szybką korektę geometrii czy parametrów materiałowych wynikającą ze zmian wprowadzanych do modelu konstrukcji. Jednak w przypadku konieczności wielokrotnego powtarzania analizy dynamicznej modyfikowanego obiektu o znacznej liczbie stopni swobody jego modelu (np. w problemach optymalizacji czy projektowania różnych wariantów modyfikacji budynków), czas i kosztowność obliczeń, mimo szybkiego rozwoju technologicznego sprzętu komputerowego, mogą być znaczące.

Pewne możliwości redukcji tego wysiłku numerycznego związane są z wykorzystaniem tzw. metod reanalizy [2, 3, 6]. Pozwalają one na uproszczenie obliczeń poprzez uwzględnienie w nich informacji o konstrukcji przed modyfikacją. Dzięki temu przy wyznaczaniu wartości częstotliwości drgań własnych obiektu po wprowadzeniu zmian nie ma potrzeby rozwiązywania pełnego układu równań zagadnienia własnego.

Jedną z metod reanalizy proponowanych w literaturze jest hybrydowa metoda aproksymacji połączonych (ang. *Combine Approximations Method*, CA) [3, 4]. Łączy ona zalety aproksymacji lokalnej (rozwiniecie w dwumian) i globalnej (wykorzystanie wektorów bazowych).

W niniejszej pracy skuteczność metody CA w wyznaczaniu częstotliwości drgań własnych konstrukcji po modernizacji przetestowano na przykładzie prostego modelu trójwymiarowego o parametrach zbliżonych do rzeczywistych obiektów budowlanych, w którym modyfikacja powoduje wzrost liczby stopni swobody układu. Dokonano adaptacji algorytmu CA w przypadku modernizacji skutkującej zwiększeniem wymiaru macierzy sztywności i mas (wzmocnienie konstrukcji).

Algorytm metody połączonych aproksymacji

Metoda połączonych aproksymacji jest metodą przybliżoną, w której rozwiązywanie nowego problemu własnego konstrukcji po modyfikacji, a więc reanaliza zadania, odbywa się za pomocą zredukowanej liczby równań [2, 3, 5]. Wykorzystywane są tu wektory bazowe (aproksymacja globalna) otrzymane z rozwinięcia w szereg pewnego dwumianu (aproksymacja lokalna).

W wyniku modernizacji konstrukcji zmianie ulegają jej macierze sztywności i mas:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_M &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \\ \mathbf{M}_M &= \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie: \mathbf{K}, \mathbf{K}_M – macierze sztywności; \mathbf{M}, \mathbf{M}_M – macierze mas odpowiednio przed i po modyfikacji konstrukcji; $\Delta\mathbf{K}, \Delta\mathbf{M}$ – odpowiednio zmiana w macierzy sztywności i mas.

Nowy problem własny z uwzględnieniem tak zmienionych macierzy sztywności i mas można zapisać następująco:

$$\mathbf{K}_M \Phi_{Mi} = \lambda_{Mi} \mathbf{M}_M \Phi_{Mp} \quad i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

gdzie: macierze $\mathbf{K}_M, \mathbf{M}_M$ jak w (1); Φ_{Mi} – wektory własne, λ_{Mi} – wartości własne ($\lambda_{Mi} = \omega_{Mi}^2, \omega_{Mi} = 2\pi f_{Mi}$), f_{Mp} – częstotliwości drgań własnych konstrukcji po modyfikacji; p – liczba rozważanych postaci drgań.

Zatem uwzględniając wstępny stan obiektu, nowy problem własny konstrukcji po modyfikacji można zapisać w postaci:

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \Phi_{Mi} = \lambda_{Mi} (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) \Phi_{Mp} \quad i = 1, \dots, p, \quad (3)$$

Algorytm CA wymaga obliczenia macierzy wektorów bazowych \mathbf{r}_B , które mają bezpośredni wpływ na stabilność i dokładność obliczeń numerycznych:

$$\mathbf{r}_B = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s], \quad (4)$$

gdzie: \mathbf{r}_B – macierz wektorów bazowych; $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$ – wektory bazowe, s – liczba wektorów bazowych (znacznie mniejsza od liczby stopni swobody pełnego układu przed modyfikacją).

Równanie (5) definiuje pierwszy wektor bazowy:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}_M \Phi_i \quad (5)$$

gdzie Φ_i – wektor własny odpowiadający i -tej postaci drgań konstrukcji pierwotnej.

Kolejne wektory bazowe obliczane są z zależności (6) (z wykorzystaniem rozwinięcia w dwumian i oznaczenia $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K}$):

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{B} \mathbf{r}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, s. \quad (6)$$

Tak przygotowane macierze wektorów bazowych wykorzystuje się do obliczenia zredukowanych macierzy sztywności \mathbf{K}_R i mas \mathbf{M}_R :

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{K}_M \mathbf{r}_B \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{M}_M \mathbf{r}_B$$

W kolejnym kroku algorytmu CA analizowany jest zredukowany problem własny dla pierwszej (najniższej) wartości własnej:

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y}_1 = \lambda_{M1} \mathbf{M}_R \mathbf{y}_1, \quad (8)$$

gdzie: \mathbf{y}_1 – wektor szukanych współczynników, $\mathbf{y}_1^T = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$.

Odpowiedni wektor własny otrzymuje się w wyniku przemnożenia wektora współczynników \mathbf{y}_1 przez macierz wektorów bazowych \mathbf{r}_B :

$$\Phi_{Mi} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_B \mathbf{y}_1, \quad (9)$$

Analogiczna procedura jest używana w przypadku wyższych postaci drgań. Dodatkowo, aby zapewnić liniową niezależność wektorów, wykorzystuje się ortogonalizację metodą Grama-Schmidta [2]. Działanie takie eliminuje zjawisko zbieżności wyższych częstotliwości drgań własnych do innych niż swoje wartości. Innym stosowanym tu zabiegiem numerycznym jest przesunięcie widma wartości własnych [11].

W przypadku modyfikacji konstrukcji skutkującej zwiększeniem liczby stopni swobody w stosunku do liczby stopni swobody konstrukcji pierwotnej pojawiają się trudności z obliczeniem macierzy zmian $\Delta \mathbf{K}$ i $\Delta \mathbf{M}$ ze względu na różne wymiary odpowiednich macierzy mas i sztywności przed i po modyfikacji – por. (1).

Tak więc zwiększenie liczby stopni swobody układu w wyniku dodania do pierwotnej konstrukcji nowych elementów wymusza pewną modyfikację algorytmu klasycznej metody CA. Chodzi o utworzenie fikcyjnego układu pierwotnego (przed zmianą), dla którego rozmiary macierzy mas i sztywności będą takie same jak w przypadku modelu obiektu zmodernizowanego. Definiowane są pseudopoczątkowe (fikcyjne), „powiększone” macierze sztywności (\mathbf{K}_f) i mas (\mathbf{M}_f) dla konstrukcji początkowej, tak aby wymiary tych macierzy były takie same jak wymiary macierzy odpowiadających konstrukcji po modyfikacji [2, 6].

Na rys. 1 [6] przedstawiono schemat postępowania w celu przeprowadzenia wspomnianej modyfikacji algorytmu CA. Obiekt (A) i (C) to konstrukcje odpowiednio przed i po modyfikacji. Część (B) opisuje rzeczywiste zmiany w konstrukcji, które ze względu na różnicę wymiarów macierzy sztywności i mas obiektów (A) i (C) są trudne do zdefiniowania. Obiekt (E) odpowiada fikcyjnemu układowi pierwotnemu, a część (D) wyraża pseudo-powiększenie macierzy mas i sztywności konstrukcji przed modyfikacją.

Takie podejście pozwala na zapisanie równania (1) klasycznej metody CA w postaci:

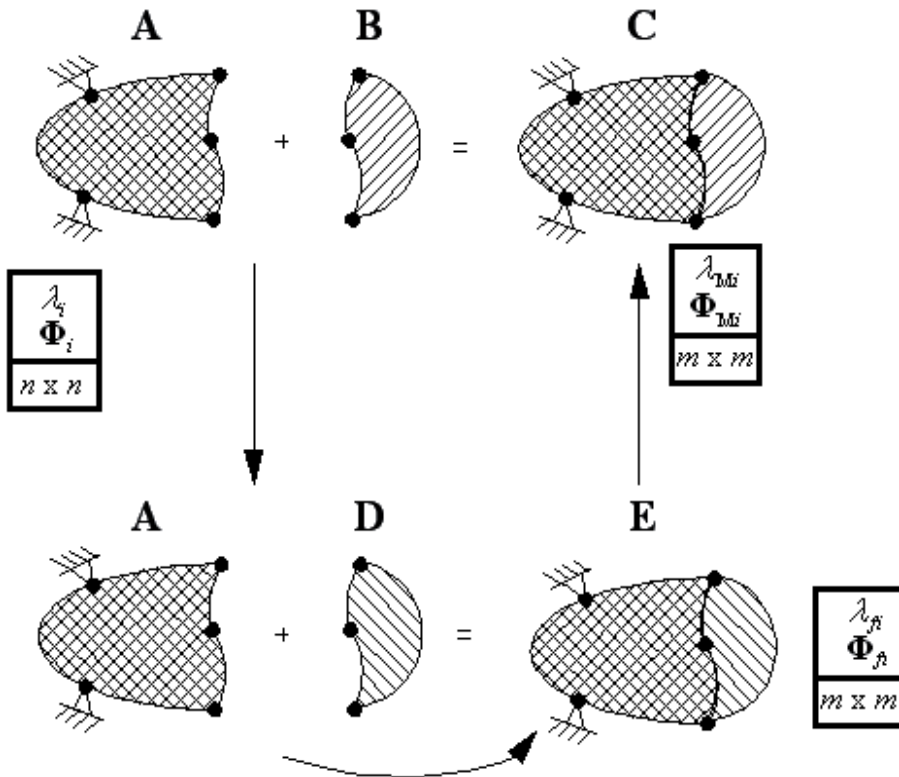
$$\begin{aligned}\mathbf{K}_M &= \mathbf{K}_f + \Delta\mathbf{K}_f \\ \mathbf{M}_M &= \mathbf{M}_f + \Delta\mathbf{M}_f,\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie: $\mathbf{K}_M, \mathbf{M}_M$ – macierze sztywności i mas po modyfikacji konstrukcji o wymiarze „ $m \times m$ ”, \mathbf{K}_f i \mathbf{M}_f – macierze sztywności i mas fikcyjnego układu pierwotnego o wymiarze „ $m \times m$ ”, $\Delta\mathbf{K}_f, \Delta\mathbf{M}_f$ – macierze zmian korespondujące z istniejącymi i nowymi stopniami swobody.

Zaproponowano utworzenie fikcyjnych początkowych macierzy sztywności \mathbf{K}_f i mas \mathbf{M}_f zgodnie z (11):

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \alpha\mathbf{K}_{M_{nb}} \\ \alpha\mathbf{K}_{M_{bn}} & \alpha\mathbf{K}_{M_{bb}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \alpha\mathbf{M}_{M_{nb}} \\ \alpha\mathbf{M}_{M_{bn}} & \alpha\mathbf{M}_{M_{bb}} \end{bmatrix}\tag{11}$$

gdzie: \mathbf{K}, \mathbf{M} – por. równanie (1), $\mathbf{K}_M, \mathbf{M}_M$ – por. równanie (10), b – różnica wymiarów macierzy \mathbf{K}_M i \mathbf{K} , α – parametr z przedziału (0,1) [2]. Wartość α zależy od wielkości zadania i wprowadzonych do konstrukcji modyfikacji.



Rys. 1. Schemat budowy fikcyjnego układu pierwotnego [6]

Zatem macierze fikcyjne składają się z elementów rzeczywistej, początkowej macierzy sztywności albo mas i są uzupełnione o elementy w dodatkowych wierszach i kolumnach. Elementy te powstają przez przemnożenie odpowiednich elementów macierzy po modyfikacji konstrukcji (w odpowiednich dodatkowych kolumnach i wierszach) przez stałą α .

Zwykle liczba dodanych stopni swobody (nawet przy wprowadzaniu dużych zmian w konstrukcji) jest stosunkowo mała w porównaniu z liczbą stopni swobody konstrukcji przed modyfikacją.

Po zdefiniowaniu macierzy K_f i ΔK_f oraz M_f i ΔM_f wraca się do klasycznego algorytmu CA zgodnie z równaniem (3).

Do obliczenia pierwszego wektora bazowego \mathbf{r}_1 zamiast niewiadomego wektora Φ_{Mi} podstawia się znany z analizy początkowej wektor Φ_i . W przypadku zastosowania fikcyjnego układu pierwotnego, wektor Φ_i musi zostać uzupełniony o wartości $(\Delta\Phi_i)$, których liczba jest równa różnicy wymiarów K_M i K . W celu uproszczenia procedury CA, w niniejszej pracy zaproponowano przyjęcie $\Delta\Phi_i$ jako wektora zerowego. Taki zabieg pozwala na redukcję obliczeń ze względu na brak konieczności wyznaczania zmian w macierzy mas.

Na rys. 2 schematycznie przedstawiono macierz wektorów własnych dla fikcyjnej konstrukcji pierwotnej. Zawiera ona wektory rzeczywistej struktury Φ_i , uzupełnione o nowe wartości oraz $\Delta\Phi_i$ wektory Φ_C skojarzone z fikcyjnymi stopniami swobody.

$$\{\Phi_{fi}\} = \begin{bmatrix} \{\Phi_i\} \\ \Delta\Phi_i \end{bmatrix} \Phi_C$$

Rys. 2. Pseudopoczątkowa macierz wektorów własnych

Opracowano własny program komputerowy w środowisku Matlab [8], umożliwiający import oraz konwersję macierzy sztywności i mas pozyskanych z programu metody elementów skończonych Ansys oraz własne oprogramowanie wykorzystujące algorytm CA do wyznaczania częstotliwości drgań własnych konstrukcji po modyfikacji zwiększającej liczbę stopni swobody jej modelu.

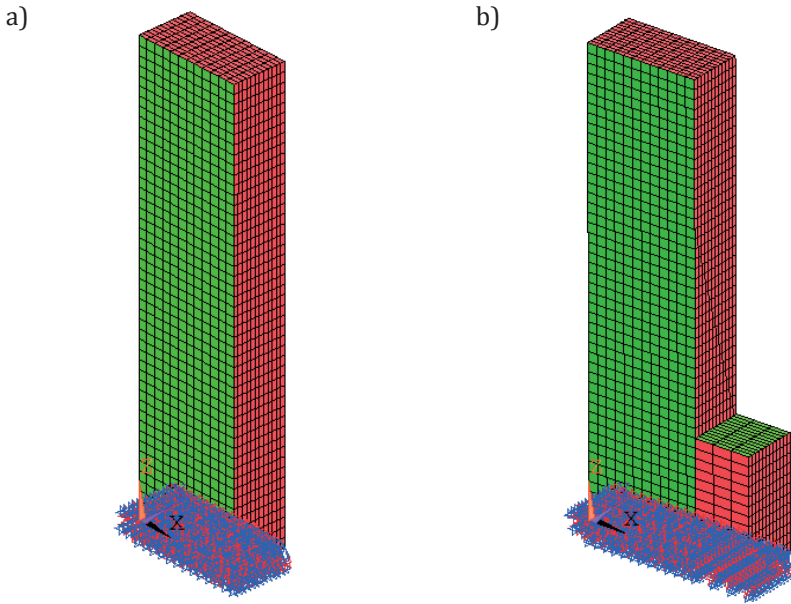
Wyniki obliczeń częstotliwości drgań własnych zmodyfikowanego prostego trójwymiarowego modelu konstrukcji

Uwagi wstępne

Skuteczność metody połączonych aproksymacji (CA) testowano w przypadku trójwymiarowego modelu konstrukcji. Analizowano zmianę częstotliwości drgań własnych obiektu wynikającą ze wzmocnienia poprzez wykonanie z jednej strony dobudówki. Rozważana konstrukcja przed wzmocnieniem ma wymiary 2 m x 1 m x 8 m i składa się z 4 kondygnacji o wysokości 2 m każda. Za grubość ścian i stropów przyjęto 15cm. Dobudówkę stanowi prostopadłościan o wymiarach 1 m x 1 m x 2 m. Użyto materiału o następujących parametrach: moduł Younga – $E = 20$ GPa, współczynnik Poissona – $\nu = 0,2$.

Zastosowano 2 różne typy elementów skończonych. Ściany i stropy zamodelowano przy użyciu 4-węzłowego elementu powłokowego „Shell63” o 6 stopniach swobody [10]. Natomiast uwzględnienie podatnego podłoża odbywa się poprzez zastosowanie sprężynek (element „Combin14”) na trzech translacyjnych (UX, UY, UZ) i dwóch rotacyjnych (ROTX, ROTY) stopniach swobody [10]. Niezależne obliczenia przeprowadzono przy założeniu regularnej oraz nieregularnej siatki elementów skończonych.

Na rys. 3a przedstawiono geometrię modelu A0 (liczba stopni swobody – 17742) konstrukcji przed modyfikacją, a na rys. 3b geometrię modelu A1 (liczba stopni swobody – 19332) konstrukcji po modyfikacji wraz z naniesioną regularną siatką elementów skończonych.



Rys. 3. Geometria analizowanych obiektów z naniesioną siatką elementów skończonych: a) przed wzmocnieniem (A0), b) po wzmocnieniu (A1)

Skuteczność metody połączonych aproksymacji oraz dokładność uzyskiwanych rezultatów oceniano poprzez porównywanie wartości częstotliwości drgań własnych wyznaczonych metodą CA (f_{iCA}) z odpowiednimi wartościami dokładnymi (f_{iMES}), tzn. otrzymanymi w wyniku rozwiązania pełnego zagadnienia własnego, a więc z pełnymi macierzami mas \mathbf{M}_M i macierzy sztywności \mathbf{K}_M zmodyfikowanej konstrukcji. W tym celu wyliczano ułamek r_i :

$$r_i = \frac{f_{iCA}}{f_{iMES}} \quad (12)$$

gdzie: f_{iCA} – wartość i -tej częstotliwości drgań własnych wyliczona metodą CA, f_{iMES} – wartość i -tej częstotliwości drgań własnych wyliczona z użyciem pełnej macierzy mas \mathbf{M}_M i macierzy sztywności \mathbf{K}_M zmodyfikowanej konstrukcji (traktowana jako wyznaczona dokładnie).

Dodatkowo określano błąd względny rozwiązania CA:

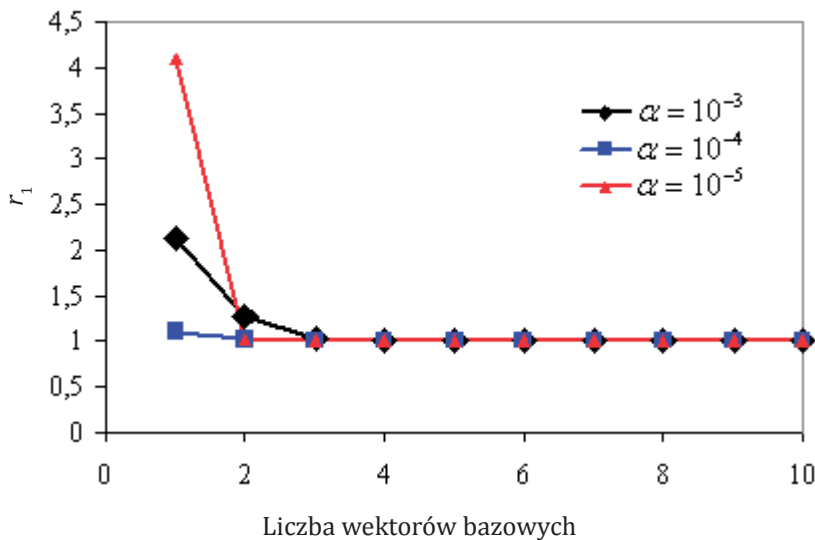
$$\text{Err}f_i = \frac{|f_{i\text{MES}} - f_{i\text{CA}}|}{f_{i\text{MES}}} \cdot 100\% \quad (13)$$

gdzie: $\text{Err}f_i$ – błąd względny wartości i -tej częstotliwości drgań własnych wyznaczonej za pomocą CA; $f_{i\text{CA}}, f_{i\text{MES}}$ – jak we wzorze (12).

Wyniki obliczeń dla modelu z regularną siatką elementów skończonych

Rys. 4 przedstawia wartości ułamka r_1 analizowanego modelu w zależności od liczby wektorów bazowych i parametru α . Z wykresu można odczytać, że niezależnie od wartości α użycie już trzech wektorów bazowych (redukcja zadania z 19332 do 3 równań) pozwala otrzymać ułamek r_1 bliski 1, a błąd względny $\text{Err}f_i$ nie przekracza 0,1%. Natomiast zastosowanie czterech wektorów daje wynik ścisły, tzn. wartość pierwszej częstotliwości drgań własnych pokrywa się z rozwiązaniem uzyskanym z układu pełnego przy użyciu metody elementów skończonych. Co ważne, rezultat nie ulega zmianie przy większej liczbie wektorów bazowych co potwierdza stabilność metody.

Na uwagę zasługuje również fakt, że w przypadku prostego modelu trójwymiarowego algorytm CA cechuje mała wrażliwość na wartości parametru α . Różnice odnotowuje się tylko przy użyciu jednego lub dwóch pierwszych wektorów bazowych.



Rys. 4. Wartość ułamka r_1 w zależności od liczby przyjętych wektorów bazowych oraz wartości parametru α

Wyniki obliczeń dla modelu z nieregularną siatką elementów skończonych

Regularna siatka elementów skończonych jest często wykorzystywana w obliczeniach MES. Jednak w bardzo wielu przypadkach, ze względu na np. skomplikowaną geometrię obiektu w niektórych obszarach, konieczne jest zastosowanie siatki nieregularnej, która może przyczynić się do pogorszenia wyników ze względu na kształt i rozmiar elementów skończonych.

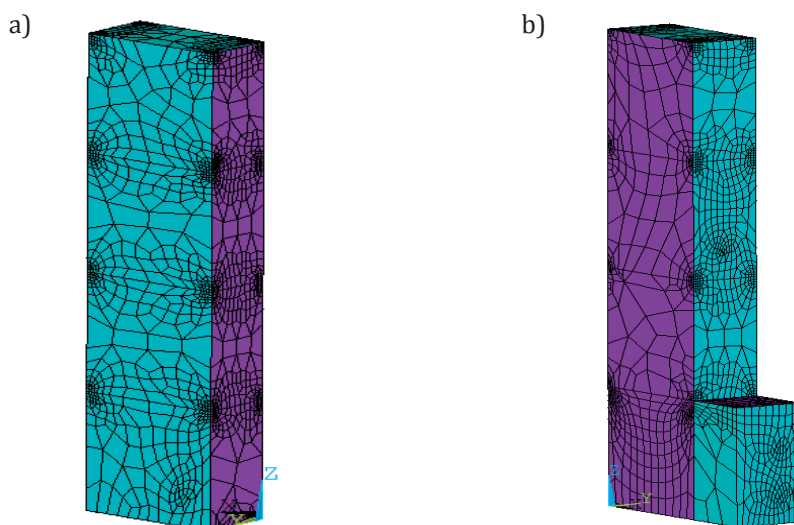
Aby sprawdzić, jaka może być zależność dokładności rozwiązania z użyciem metody CA od geometrii elementów skończonych, zmieniono w programie Ansys [10] metodę siatkowania i posłużono się siatką nieregularną. Założono, że liczba stopni swobody modelu z siatką regularną i nieregularną jest zbliżona.

Odpowiednie modele A2 i A3 z naniesioną nieregularną siatką elementów skończonych przedstawiono na rys. 5.

Otrzymane wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych modeli, wyznaczone z użyciem pełnego układu równań zagadnienia własnego, różnią się w zależności od przyjętej siatki: 9,91 Hz – regularna, 9,94 Hz – nieregularna.

W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń pierwszej częstotliwości drgań własnych obiektu otrzymane metodą aproksymacji połączonych w zależności od parametru α i liczby wektorów bazowych dla modelu A3.

Wynika z nich brak wpływu rodzaju wygenerowanej siatki na jakość rozwiązania CA. Podobnie jak w przypadku obiektu A1, zastosowanie już czterech wektorów bazowych przy $\alpha = 0,001$ pozwala osiągnąć wartość pierwszej częstotliwości drgań własnych taką jak z programu Ansys [10]. Wyniki wskazują, że przyjęcie parametru α równego lub mniejszego od 0,001 umożliwia uzyskanie satysfakcjonujących rezultatów przy mniejszej liczbie zastosowanych wektorów bazowych.



Rys. 5. Prosty model trójwymiarowy z naniesioną nieregularną siatką elementów skończonych: a) przed wzmocnieniem (A2), b) po wzmocnieniu (A3)

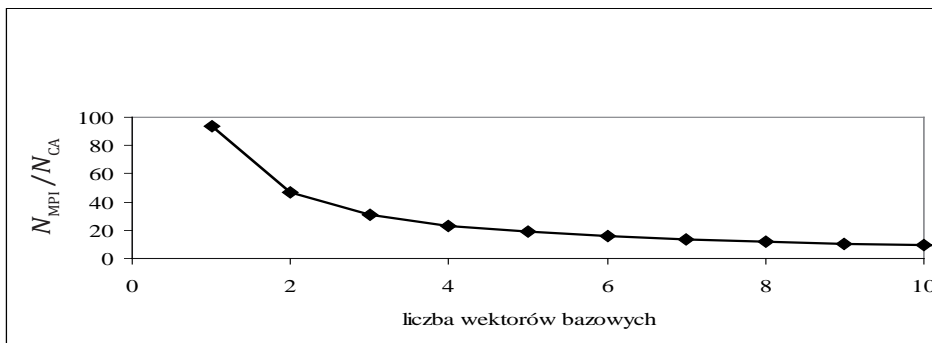
Tab. 1. Wartości pierwszej częstotliwości poziomych drgań własnych w zależności od liczby wektorów bazowych i parametru α metody CA, model A3

α	f_1 [Hz]							
	Liczba wektorów bazowych							
	1	2	3	4	5	6	7	10
0,01	37,76	36,92	10,61	10,01	9,98	9,95	9,94	9,94
0,001	10,39	10,38	9,97	9,94	9,94	9,94	9,94	9,94
0,0001	10,67	10,24	9,95	9,94	9,94	9,94	9,94	9,94

Wykorzystując wzory zamieszczone w pracy [4], policzono też „zyski” wynikające z zastosowania metody CA, a spowodowane ograniczeniem liczby operacji algebraicznych w stosunku do rozwiązania tego samego problemu metodą podprzestrzennych iteracji. Na rys. 6 pokazano wyniki takiego porównania przy założeniu, że do wyznaczenia jest jedna wartość własna, przeprowadza się jedną analizę, a liczba stopni swobody wynosi 19332. Pod uwagę wzięto różną liczbę użytych wektorów bazowych.

Wartość ułamka N_{MPI}/N_{CA} przedstawiono w zależności od liczby wektorów bazowych, gdzie N_{MPI} – liczba operacji algebraicznych metodą podprzestrzennych iteracji, natomiast N_{CA} – liczba operacji metodą połączonych aproksymacji.

Przykładowo z zamieszczonego na rys. 6 wykresu wynika, że przy użyciu 4 wektorów bazowych w założonym przypadku obliczeń ogranicza się liczbę niezbędnych operacji algebraicznych około 23 razy.



Rys. 6. Zależność ułamka N_{MPI}/N_{CA} od liczby wektorów bazowych użytych w metodzie CA

Wnioski

Zastosowanie metody połączonych aproksymacji pozwoliło na znaczną redukcję wymiarów problemu własnego, a więc wyraźne ograniczenie kosztu analizy numerycznej częstotliwości drgań własnych trójwymiarowego modelu konstrukcji

po modyfikacji. Już użycie 4 wektorów bazowych, czyli redukcja zadania z prawie 20 tysięcy równań do 4, umożliwiło otrzymanie wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych konstrukcji pokrywającej się z wynikiem uzyskanym dla układu pełnego. Przeprowadzone analizy wskazują na małą wrażliwość dokładności metody CA na dobór wartości parametru α , a także na rodzaj zastosowanej siatki elementów skończonych w przypadku prostych modeli trójwymiarowych. Potwierdza to stabilność metody CA nawet w odniesieniu do modyfikacji istotnie zwiększającej liczbę stopni swobody układu.

Literatura

- [1] Chmielewski T., Zembaty Z., *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1998.
- [2] Kirsch U., *Reanalysis of Structures. A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*, Springer Netherlands, 2008.
- [3] Kirsch U., Bogomolni M., Sheinman I., *Efficient Dynamic Reanalysis of Structures. Journal of Structural Engineering, ASCE*, 2007, 133, 3, 440–448, .
- [4] Kirsch U., Bogomolni M., Sheinman I., *Efficient procedures for repeated calculations of the structural response using combined approximations, Structural and Multidisciplinary Optimization* 2006, 32, pp. 435–446.
- [5] Kirsch U., Papalambros P.Y., *Exact and Accurate Reanalysis of Structures for Geometrical Changes, Engineering with Computers*, 2001, 17, 363–372, .
- [6] Level P., Gallo Y., Tison T., Ravalard Y., *On an extension of classical modal reanalysis algorithms: the improvement of initial models, Journal of Sound and Vibrations*, 1995, 186, 4, s. 551–560.
- [7] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
- [8] Manual Matlab 7.6.0.324, 2008.
- [9] Olszowski B., Radwańska M., *Mechanika budowli*, t. 2, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.
- [10] Release 11.0 *Documentation for Ansys*, 2007.
- [11] Zając M., *Analiza wpływu zmian konstrukcyjnych modernizowanych budynków ścianowych na częstotliwości ich drgań własnych* (rozprawa doktorska), Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej, Kraków 2013.
- [12] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977.
- [13] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Numerical Verification of Combined Approximations Method (CA) in the Case of Eigenvalue Reanalysis of the Modified Simple Three-dimensional Structure

Abstract

In the paper combined approximations (CA) hybrid method is proposed as an effective reanalysis approach for computation of natural frequencies of the modified simple three-dimensional structure. CA procedure is applied in the case of increasing number of degrees of freedom (DOF) in the model after modification. It is proved that the CA method gives a significant reduction of the computational effort (the reduction of the computational cost) by

decreasing the number of necessary numerical operations for evaluation of natural vibration frequencies of the modified structure with no greater decrease of the computation accuracy.

Key words: Combined approximations method, reanalysis of structure, natural frequencies of vibration

Krystyna Kuźniar
Maciej Zając
Instytut Techniki
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków, Polska