

Dominik Rzepka

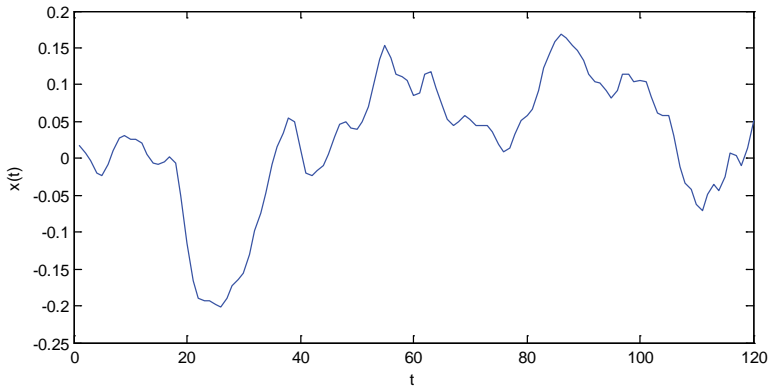
Twierdzenie o próbkowaniu z perspektywy przestrzeni Hilberta

Do czego potrzebne jest twierdzenie o próbkowaniu?

Świat wokół nas wypełniony jest zjawiskami, które można opisać za pomocą liczb. Prędkość samochodu, poziom oświetlenia, ciśnienie powietrza, temperatura, umiejscowienie w przestrzeni i wiele, wiele innych wielkości ma w danym momencie ściśle ustaloną wartość, którą – przy pomocy odpowiednich przyrządów pomiarowych – możemy odczytać. Jednocześnie większość z tych wielkości zmienia się w czasie. Tak więc dla każdego momentu czasowego t przyrząd zwróci pewną wartość mierzonej wielkości. Skoro każdemu momentowi czasowemu odpowiada liczba x , opisująca wynik pomiaru, to zbiór wszystkich wyników jest funkcją czasu $x(t)$. W inżynierii zmienna w czasie wartość (czyli funkcja czasu) nazywana jest często **sygnałem** [1].

Założmy, że chcemy dokładnie zapisać przebieg sygnału za pomocą cyfr w pamięci komputera. Zazwyczaj mierzone wartości (np. temperatura) są liczbami rzeczywistymi (przeważnie mają nieskończenie wiele cyfr po przecinku). Aby zapisać je w pamięci komputera należy zastosować pewne zaokrąglenie (nazywane kwantyzacją), ponieważ pamięć może pomieścić jedynie skończoną liczbę cyfr. Pozostaje jednak pytanie – ile takich zaokrąglonych próbek (wartości funkcji w punktach) trzeba zebrać, żeby opisać sygnał „wystarczająco dokładnie”. Inaczej mówiąc, należy zastanowić się, jak gęsto trzeba próbować, aby na podstawie tych właśnie próbek można było odtworzyć pierwotny sygnał. Jeżeli nie są dostępne żadne informacje o charakterze sygnału $x(t)$, to należałoby zapisać wszystkie wartości sygnału w każdym momencie czasowym, czyli nieskończenie wiele próbek, pobieranych nieskończenie często. Jest to niemożliwe, choćby dlatego, że dostępna jest tylko skończona ilość pamięci na komputerze. Na szczęście większość sygnałów ma swoje specyficzne właściwości, które umożliwiają przyjęcie pewnych założeń co do tempa ich zmienności w czasie, czy też częstotliwości. Np. częstotliwość zmian temperatury powietrza w pomieszczeniu jest zwykle znacznie mniejsza niż częstotliwość drgań cząsteczek powietrza wywołanych muzyką. Korzystając z wiedzy na temat zmienności danego rodzaju sygnału, można określić liczbę próbek potrzebnych

do kompletnego opisu sygnału. Do tego celu potrzebne jest właśnie twierdzenie Shannona o próbkowaniu [2].



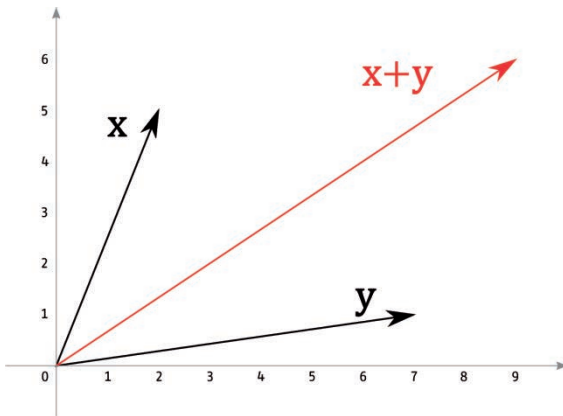
Rys. 1. Przykładowy sygnał – funkcja czasu $x(t)$

Różne rodzaje wektorów

Do rozwiązania danego problemu inżynierskiego konieczne jest jego precyzyjne sformułowanie. Dobrą metodą formalizacji jest przedstawienie problemu w formie graficznej i zapisanie jej w postaci matematycznej. W przypadku przetwarzania sygnałów analogowych mamy do czynienia z funkcjami o postaci $x(t)$, gdzie zarówno czas t , jak i wartość sygnału $x(t)$ są liczbami rzeczywistymi. Tak więc zbiór wartości funkcji $x(t)$ zawiera nieskończenie wiele liczb rzeczywistych (można powiedzieć, że t indeksuje wartości $x(t)$, tj. żeby określić konkretną wartość funkcji $x(t)$ należy wskazać ją za pomocą t). Można zapisać to jako

$$x(t), t \in \mathbb{R}$$

Rozważmy sytuację w której występują dwa sygnały $x(t)$, $y(t)$, których dodawanie chcemy przedstawić graficznie. Wykonanie takiej operacji nie jest możliwe w sposób ścisły, bo żeby przedstawić w całości którykolwiek z tych sygnałów, należałoby mieć nieskończenie długą oś t . Gdyby zadanie to dotyczyło dodawania wektorów (oznaczymy je jako $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$) w przestrzeni dwuwymiarowej, to byłoby ono w pełni realizowane. Przestrzenie liniowe \mathbb{R}^n , czyli złożone z n -wymiarowych wektorów zawierających liczby rzeczywiste nazywamy przestrzeniami euklidesowymi. Wektor dwuelementowy można przedstawić jako punkt w przestrzeni dwuwymiarowej.



Rys. 2. Suma wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$

Nasuwa się pytanie – czy dodawanie sygnałów w przestrzeni dwuwymiarowej podlega tym samym zasadom, co dodawanie sygnałów w przestrzeni, w której liczba wymiarów jest nieskończona? Poprzez analogię

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1, x_2, x_3] + [y_1, y_2, y_3] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$$

$$x(t), y(t), z(t), t \in \mathbb{R}: z(t) = x(t) + y(t)$$

można zauważyć, że zasady dodawania sygnałów są takie same w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów: sumuje się odpowiednie składowe dodawanych sygnałów. Wynika z tego ważny wniosek: sygnały $x(t), t \in \mathbb{R}$ można traktować analogicznie jak wektory o skończonej liczbie składowych.

Przestrzeń euklidesowa i przestrzeń Hilberta

Teoria przestrzeni euklidesowych \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 może być łatwo zilustrowana dzięki istnieniu trójwymiarowej przestrzeni fizycznej (otaczający świat), zawierającej również obiekty, które w pewnym uproszczeniu mogą być uznawane za dwuwymiarowe (np. kartka, ekran komputera). Nieskończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta \mathcal{H} , które mogą zawierać również funkcje (np. $x(t), t \in \mathbb{R}$), są rozszerzeniem koncepcji przestrzeni euklidesowych \mathbb{R}^n .

Przynależność wektora do pewnej przestrzeni wektorowej oznacza, że wektor ten ma pewne z góry znane właściwości. W szczególności wektory z przestrzeni \mathbb{R}^3

a) mają 3 składowe, np. $\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{z} = [2, -1, 5]$,

b) można dodawać lub mnożyć przez stałą liczbę a , tak aby spełniona była zależność

$$a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$$

(właściwość ta jest określana jako *liniowość* przestrzeni),

c) mają określoną *długość*, wyznaczaną na podstawie twierdzenia Pitagorasa, rozszerzonego do 3 wymiarów; długość wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ jest opisywana wzorem

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

d) można badać, na ile mają podobny kierunek; służy do tego iloczyn skalarny, definiowany jako

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

lub

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \cos \varphi \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

gdzie φ to kąt między wektorami. Warto zaznaczyć, że iloczyn skalarny jest „idealną” miarą podobieństwa kierunku wektorów, tylko jeśli oba wektory mają długość równą 1, czyli $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$.

Wszystkie te operacje w \mathbb{R}^3 mają swoje odpowiedniki w dowolnej przestrzeni \mathbb{R}^n . W przestrzeni \mathbb{R}^n składowe wektora są indeksowane liczbami całkowitymi. W przestrzeni Hilberta składowe „wektora” – czyli wartości funkcji $x(t)$ – są natomiast „indeksowane” zmienną rzeczywistą t . Tak więc o ile w przestrzeni euklidesowej uogólnienie sumowania realizowane jest za pomocą sumy wszystkich składowych, to w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} suma zastępowana jest przez całkę:

Operacja	Przestrzeń euklidesowa \mathbb{R}^n	Przestrzeń Hilberta \mathcal{H}
Liczba elementów składowych wektora	n	nieskończona
Dodawanie elementów przestrzeni	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$	$x(t) + y(t) = z(t)$
Norma (długość)	$\ \mathbf{x}\ = \sqrt{\sum_n x_n^2}$	$\ x(t)\ = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt}$
Iloczyn skalarny	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_n x_n y_n$	$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$

Uwaga do tabeli na str. 121! Wartości funkcji $x(t), y(t) \in \mathcal{H}$ mogą być również liczbami zespolonymi, stąd w iloczynie skalarnym konieczne jest zastosowanie sprzężenia funkcji $\overline{y(t)}$. Jeżeli $y(t) = a(t) + jb(t)$, to $\overline{y(t)} = a(t) - jb(t)$.

Wektor w bazie ortonormalnej

Baza przestrzeni to najmniejszy zbiór wektorów tej przestrzeni, przy pomocy których można przedstawić dowolny wektor tej przestrzeni za pomocą ich sumy ważonej [3, 4]. Bazą przestrzeni \mathbb{R}^2 są np. wektory

$$\mathbf{u}_1 = [1, 0], \mathbf{u}_2 = [0, 1]$$

i ponieważ dla każdego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ można znaleźć takie liczby c_1, c_2 aby spełnić równanie

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2.$$

Skąd wziąć te liczby? W przypadku tej akurat bazy każdy z wektorów $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ opisuje wyłącznie jedną składową wektora \mathbf{x} , a dodatkowo długość każdego z tych wektorów jest równa 1. Tak więc np. wektor $\mathbf{x} = [3, 1]$ będzie opisywany współczynnikami $c_1 = 3, c_2 = 1$. Można zauważyć, że współczynniki dla tej bazy można uzyskać, wykorzystując iloczyn skalarny

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \quad (1)$$

Równanie (1) jest prawdziwe dzięki właściwościom wektorów $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$. Obaj wektory są unormowane do 1, tj. $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$ i ponadto są wzajemnie prostopadłe (ortogonalne), dzięki czemu ich iloczyn skalarny wynosi $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$. Każdy z iloczynów skalarnych $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle$ i $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle$ pozwala otrzymać składową kierunku wektora \mathbf{x} . Dzięki ortogonalności wektorów $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ składowe te są wzajemnie niezależne. Tak więc każda baza złożona z wektorów \mathbf{y}_n unormowanych do 1 oraz wzajemnie prostopadłych, czyli **baza ortonormalna**

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m \rangle &= 0 & n \neq m \\ \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_m \rangle &= 1 & n = m \end{aligned}$$

może być używana do opisu dowolnego wektora z odpowiadającej jej przestrzeni w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \sum_n \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle \mathbf{y}_n.$$

Analogiczna sytuacja występuje w przypadku przestrzeni zawierającej funkcje. Żeby przedstawić pewną funkcję w bazie funkcji, trzeba najpierw zdefiniować bazę. Np. dla funkcji zdefiniowanych w przedziale $t \in [-\pi, \pi]$ bazą ortogonalną jest

zbiór funkcji $\{\sin(nt), \cos(nt)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie ortogonalności $x(t) \perp y(t)$, czyli

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt = 0 \leftrightarrow x(t) \perp y(t)$$

to dla dowolnych dwóch funkcji bazowych $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m$ spełnione są zależności

$$\begin{aligned} \sin(nt) &\perp \sin(mt) \\ \cos(nt) &\perp \cos(mt) \\ \cos(nt) &\perp \sin(mt) \end{aligned}$$

Sinus należy do funkcji nieparzystych, a cosinus do parzystych, tak więc aby można było przedstawić w bazie dowolną funkcję (zarówno parzystą, nieparzystą, jak i niebędącą ani parzystą, ani nieparzystą), baza musi zawierać zarówno sinusy, jak i cosinusy. Bazą funkcji w przedziale $t \in [-\pi, \pi]$ jest więc zbiór funkcji $\{e^{jnt}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (e to liczba Eulera, j to jednostka urojona), ponieważ:

- zawierają one w sobie sinus i cosinus, zgodnie z wzorem Eulera $e^{jnt} = \cos(nt) + j \sin(nt)$,
- umożliwiają reprezentowanie funkcji o wartościach zespolonych,
- ich norma w przedziale $t \in [-\pi, \pi]$ wynosi $\|e^{jnt}\| = 1$, a więc $\{e^{jnt}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzą zbiór funkcji ortonormalnych.

Zatem odpowiednik reprezentacji wektora w bazie ortonormalnej $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m$ dla funkcji $x(t): t \in [-\pi, \pi]$ przedstawia się następująco:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x(t), e^{jnt} \rangle e^{jnt}.$$

Rozpisując iloczyn skalarny

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnt} \tag{2}$$

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jnt} dt$$

otrzymujemy wzór na **szereg Fouriera**. Minus w e^{-jnt} we wzorze (2) wynika z zastosowania sprzężenia funkcji e^{jnt} .

Nieco inna sytuacja ma miejsce, gdy konieczna jest reprezentacja funkcji w przedziale $t \in (-\infty, +\infty)$. Do tego celu potrzebny jest zbiór funkcji ortonormalnych w tym właśnie przedziale. Zauważmy, że przedstawiona wcześniej ortogonalność między funkcjami harmonicznymi e^{jnt} zachodzi również w przypadku iloczynu skalarnego zdefiniowanego w granicach $(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = 0 \leftrightarrow x(t) \perp y(t)$$

Jednak tym razem, aby skompletować bazę ortogonalną, nie można ograniczyć się tylko do funkcji e^{jnt} z indeksem należącym do liczb **całkowitych** ($n \in \mathbb{Z}$), ponieważ byłyby to jedynie podzbiór wszystkich funkcji ortogonalnych. Zauważmy, że iloczyn skalarny

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jnt} e^{jmt} dt$$

jest równy zero dla wszystkich należących do liczb **rzeczywistych** (poza $n = m$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jnt} e^{jmt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(n+m)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin((n+m)t) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} \cos((n+m)t) dt = 0$$

(suma pól pod wykresem zarówno sinusa, jak i cosinusa jest równa 0, o ile argument tych funkcji nie jest równy 0).

Zatem aby użyć wszystkich ortogonalnych funkcji harmoniczych, potrzebne jest indeksowanie $n \in \mathbb{R}$. Tym samym zamiast współczynników c_n indeksowanych przez liczbę całkowitą $n \in \mathbb{Z}$ mamy „współczynniki” indeksowane liczbą rzeczywistą $n \in \mathbb{R}$, czyli funkcję $c(n)$. Ponieważ litera n jest najczęściej używana jako oznaczenie liczb całkowitych, a w proponowanym kontekście oznacza liczbę rzeczywistą, toteż oznaczenie $c(n)$ zastępuje się przez $X(\omega)$. Nowa postać wzoru $\mathbf{x} = \sum_{\pi} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle \mathbf{y}_n$ dla reprezentacji funkcji w przedziale $t \in (-\infty, +\infty)$ to

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle e^{j\omega t} d\omega$$

Rozpisując iloczyn skalarny

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

otrzymujemy wzór opisujący **transformację Fouriera**.

Poniższa tabela zawiera podsumowanie różnych przypadków reprezentacji elementów przestrzeni w bazach ortonormalnych.

	Przestrzeń euklidesowa dwuwymiarowa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$	Przestrzeń Hilberta $x(t): t \in [-\pi, \pi]$	Przestrzeń Hilberta $x(t): t \in (-\infty, +\infty)$
Przykładowa baza ortonormalna	$\mathbf{u}_1 = [1, 0], \mathbf{u}_2 = [0, 1]$	$u_n(t) = e^{jnt}, \quad n \in \mathbb{Z}$	$u_\omega(t) = e^{j\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}$
Współczynniki rozwinięcia elementu przestrzeni względem bazy (iloczyn skalarny)	$c_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{x} \mathbf{u}_n^T$	$c_n = \langle x(t), u_n(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jnt} dt$	$X(\omega) = \langle x(t), u_\omega(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
Rozwinięcie elementu przestrzeni względem bazy	$\mathbf{x} = \sum_{n \in \{1, 2\}} c_n \mathbf{u}_n$	$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n(t)$	$x(t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} X(\omega) u_\omega(t) d\omega$

Twierdzenie Shannona w ujęciu przestrzeni Hilberta

Założmy, że dany sygnał ma w dziedzinie częstotliwości niezerowe składowe tylko w przedziale $\omega \in [-\pi, \pi]$. Poza tym przedziałem $X(\omega) \neq 0$. Ponieważ w dziedzinie częstotliwości ω sygnał ten jest opisany w skończonym przedziale $\omega \in [-\pi, \pi]$, jego szereg Fouriera to

$$X(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j\omega t}$$

gdzie współczynniki są obliczone za pomocą iloczynu skalarnego

$$c_n = \langle X(\omega), e^{jn\omega} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{jn\omega} d\omega.$$

Dokonując transformacji Fouriera równań (2) i (3), otrzymamy:

Dziedzina częstotliwości ω	Dziedzina czasu t
$X(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega}$ $\omega \in [-\pi, \pi]$.	$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$
$c_n = \langle X(\omega), e^{jn\omega} \rangle$	$c_n = \langle x(t), \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \rangle$

Zauważmy, że równanie opisujące

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{jn\omega} d\omega$$

jest równoznaczne z definicją transformacji Fouriera

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

z podstawieniem $t = n$ i założeniem, że całkowanie odbywa się w przedziale $\in [-\pi, \pi]$ (bo poza tym przedziałem $X(\omega) = 0$). Tym samym podstawiając to do przetransformowanego szeregu Fouriera, otrzymujemy

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

Z powyższego wyprowadzenia można wysnuć kilka wniosków:

- wartość sygnału w punkcie jest wynikiem iloczynu skalarnego $\langle x(t), \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \rangle$,
- zestaw funkcji $\frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$, $n \in \mathbb{Z}$ jest bazą ortonormalną dla przestrzeni funkcji o pasmie ograniczonym do $\omega \in [-\pi, \pi]$,
- operacja próbkowania z matematycznego punktu widzenia to iloczyn skalarny sygnału i funkcji bazowych przestrzeni, do której należy sygnał,

Podsumowanie

Przestrzenie Hilberta umożliwiają wyprowadzenie wielu znanych narzędzi matematycznych w oparciu o analogię z intuicyjnym pojęciem euklidesowej przestrzeni wektorowej. W niniejszym artykule przedstawiono wyprowadzenie szeregów Fouriera oraz transformacji Fouriera, a także – syntezując oba przekształcenia – twierdzenia o próbkowaniu Shannona. Zaprezentowane podejście wykorzystuje jednorodny zestaw pojęciowy i umożliwia przedstawienie genezy tego fundamentalnego dla inżynierii elektrycznej twierdzenia.

Literatura

- [1] Szabatin J., *Podstawy teorii sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności WKŁ, 2012.
- [2] Shannon C.E., "Communication in the presence of noise", Proc. Institute of Radio Engineers, vol. 37, no 1, pp. 10–21, Jan. 1949.
- [3] Rudol K.: *Opracowanie na temat szeregów Fouriera ze wstępem na temat przestrzeni Hilberta*, <http://home.agh.edu.pl/~rudol/AFour.pdf>
- [4] Christensen O., *Frames and Bases: An Introductory Course*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer 2008.

Sampling Theorem in Hilbert Spaces

Abstract

Sampling theorem is a fundamental theorem used for digital signal processing of analogue signals. Its classic derivation relies on Fourier series and Fourier transform, used as independent mathematical tools. By using Hilbert space, it is possible to present all these tools as special cases of representation of vector in the orthonormal basis. Such representation can be easily understood using an analogy with the projection of vector onto the Cartesian plane. His approach allows relatively easy understanding of sampling and reconstruction of signal, thanks to using a vector space, the idea known from linear algebra course. The aim of this paper is to present this approach in a tutorial style.

Key words: Hilbert spaces, sampling theorem

Dominik Rzepka
Instytut Techniki
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków, Polska