

# Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia Technica VII (2014)

*Miluše Vítečková, Antonín Víteček, Kazimierz Jaracz*

## Uproszczony dobór okresu próbkowania

### Wprowadzenie

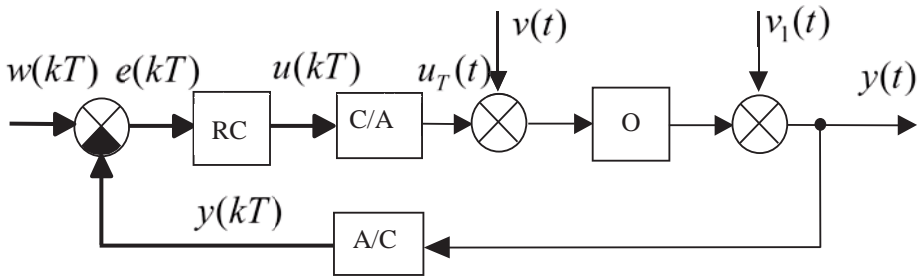
W układach regulacji z regulatorem cyfrowym okres próbkowania ma zasadniczy wpływ na jego stabilność, a przede wszystkim na jakość regulacji. Dlatego jego doborowi należy poświęcać dużo uwagi [1–11]. Dla regulacji dyskretnej (cyfrowej) błąd całkowity wynika zarówno z próbkowania (dyskretyzacji w czasie), jak i kwantowania (dyskretyzacji w pionie). Błąd kwantyzacji zależy od właściwości konkretnego przetwornika A/C i jest dla dokładności regulacji determinujący. Dlatego przetwornik A/C musi zostać tak dobrany, żeby błąd kwantyzacji był dostatecznie mały. W artykule zakłada się, że błąd kwantyzacji jest znikomo mały i w dalszym ciągu będzie pomijany. Z tego powodu pojęcia „dyskretny“ i „cyfrowy“ będą uważane za równoważne.

Okres próbkowania należy dobierać z dwóch punktów widzenia. Po pierwsze z punktu widzenia obniżenia jakości regulacji wynikającej z zastąpienia regulatora analogowego regulatorem cyfrowym. Po drugie z punktu widzenia możliwości zastosowania odpowiednich metod doboru nastaw regulatorów analogowych dla regulatorów cyfrowych [10–11].

### Obniżenie jakości regulacji

Rozważmy układ regulacji z regulatorem cyfrowym przedstawionym na rys. 1, gdzie: RC jest regulatorem cyfrowym, O – obiektem, C/A – przetwornikiem cyfrowo-analogowym, A/C – przetwornikiem analogowo-cyfrowym,  $w$  – wielkością zadaną,  $e$  – uchybem regulacji,  $u$  – wielkością nastawiającą,  $u_T$  – ekstrapolowaną wielkością nastawiającą. Ponadto  $y$  – wielkość regulowana,  $v$  oraz  $v_1$  – wielkości zakłócające,  $k$  – dyskretny czas względny,  $T$  – okres próbkowania.

Dla większej przejrzystości wielkości dyskretne (cyfrowe) na rys. 1, 2 zaznaczono linią grubą.



Rys. 1. Układ regulacji z regulatorem cyfrowym

Dla wyprowadzenia wielkości okresu próbkowania  $T$ , przy której obniżenie względne jakości regulacji dla regulacji cyfrowej nie będzie większe niż  $\delta$  (zwykle dobiera się 15%, tzn.  $\delta = 0,15$ ) w porównaniu z regulacją analogową, zastosowana zostanie metoda pożądanego modelu [9–10]. Metoda ta umożliwi drogą analityczną dobrać nastawy regulatora analogowego i cyfrowego, tak żeby w obu przypadkach został zapewniony krytyczny przebieg aperiodyczny.

Dla obiektów o transmitancjach

$$G_O(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_o s} \quad (1)$$

$$G_o(s) = \frac{k_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-T_o s} \quad T_1 \geq T_2 \quad (2)$$

metoda modelu pożądanego daje dla konwencjonalnych regulatorów analogowych PI oraz PID transmitancję układu zamkniętego

$$G_{wy}(s) = \frac{k_o^*}{s + k_o^*} e^{-T_d s}, \quad k_o^* = \frac{1}{e T_d} \quad (3)$$

oraz dla regulatorów cyfrowych PI oraz PID transmitancję układu zamkniętego

$$G_{wy}(z) = \frac{k_o^* T}{z - 1 + k_o^* T z^{-d}} z^{-d}, \quad d = \frac{T_d}{T}, \quad k_o^* = \frac{1}{(4 - e)T + e T_d} \quad (4)$$

gdzie:  $T_d$  – czas opóźnienia,  $T_1$  oraz  $T_2$  – stałe czasowe,  $k_1$  – wzmacnienie obiektu,  $d$  – dyskretne opóźnienie względne,  $k_o^*$  – wzmacnienie układu otwartego zapewniające krytyczny przebieg aperiodyczny.

Dla skoku jednostkowego wielkości zadanej  $w$  oraz dla krytycznego przebiegu aperiodycznego można łatwo określić wartości kryteriów całkowych dla układu zamkniętego z regulatorem analogowym oraz cyfrowym

$$I_A = \int_0^{\infty} e_w(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ [1 - G_{wy}(s)] \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{k_o^*} = eT_o \quad (5)$$

$$I_C = T \sum_{k=0}^{\infty} e_w(kT) = T \lim_{z \rightarrow 1} \left[ [1 - G_{wy}(z)] \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1}{k_o^*} = (4 - e)T + eT_o \quad (6)$$

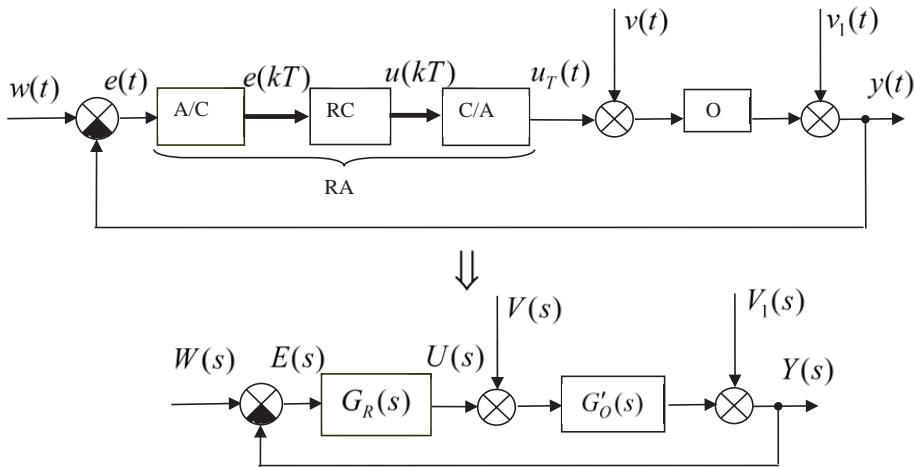
gdzie:  $e_w$  jest uchybem regulacji spowodowanym skokiem jednostkowym wielkości zadanej.

Dla względnego obniżenia jakości regulacji mniejszego niż 15% można pisać

$$\frac{I_C - I_A}{I_A} \leq \delta \Rightarrow \frac{(4 - e)T}{eT_o} \leq 0,15 \Rightarrow T \leq 0,3T_o \quad (7)$$

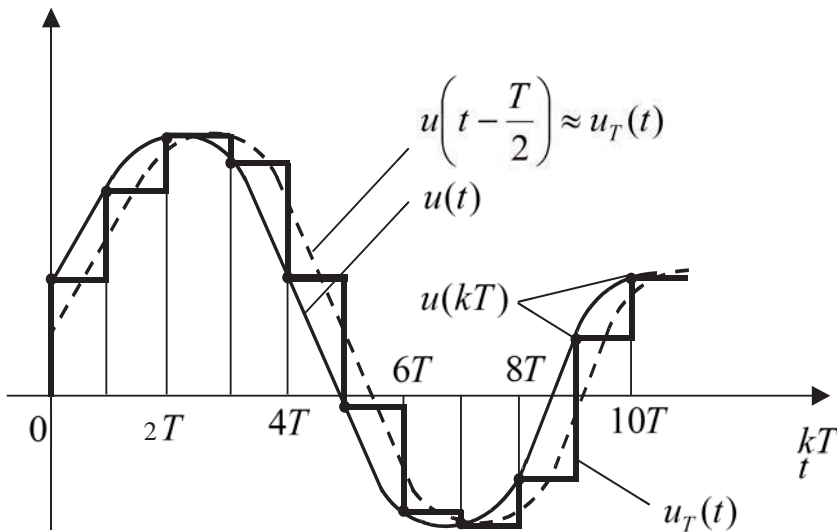
### Uproszczony dobór nastaw regulatorów cyfrowych

Po przesunięciu A/C przetwornika (rys. 1) przed regulator cyfrowy (rys. 2 powyżej), to regulator cyfrowy z obydwoma przetwornikami może być uważany w przybliżeniu za regulator analogowy (RA). W związku z tym dla syntezy układu regulacji z regulatorem cyfrowym można w przybliżeniu zastosować układ regulacji z regulatorem analogowym przedstawionym na rys. 2 (poniżej).



Rys. 2. Transformacja układu regulacji z regulatorem cyfrowym na układ regulacji z regulatorem analogowym

Przy założeniu, że zastosowany C/A przetwornik ma właściwości ekstrapolatora zerowego rzędu, to wielkość nastawiająca  $u_T(t)$  ma postać funkcji czasu, jak na rys. 3.



Rys. 3. Przebiegi wielkości nastawiających dla układu regulacji z regulatorem cyfrowym

Z przebiegu wielkości nastawiającej  $u_T(t)$  wynika, że dla dostatecznie małego okresu próbkowania  $T$  może ona zostać w przybliżeniu wyrażona jako  $u\left(t - \frac{T}{2}\right)$ . Dlatego układ regulacji z regulatorem cyfrowym może zostać zastąpiony przez układ regulacji z regulatorem analogowym z obiektem o transmitancji (dokładniej tę kwestię opisano w [10, 11])

$$G'_O(s) = G_O(s)e^{-\frac{T}{2}s} = G(s)e^{-T_o s}e^{-\frac{T}{2}s} = G(s)e^{-\left(T_o + \frac{T}{2}\right)s} \quad (8)$$

gdzie  $G(s)$  to część transmitancji obiektu niezawierająca opóźnień.

Zgodnie z metodą pożądanego modelu dla krytycznego przebiegu aperiodycznego oraz dla kryteriów całkowych ważne są zależności (5) oraz (6), z tym że w zależności (5) należy uważać wartość  $T_o + T/2$ , tzn.

$$I_A = e\left(T_o + \frac{T}{2}\right), \quad I_C = (4 - e)T + eT_o \quad (9)$$

Obniżenie względne jakości regulacji przy zastosowaniu uproszczonego doboru nastaw regulatora cyfrowego dane jest zależnością

$$\frac{I_A - I_C}{I_C} = \frac{\frac{3}{2}e - 4}{4 - e + e\frac{T_o}{T}} \quad (10)$$

Np. dla obniżenia względnego jakości regulacji o 1% przy uproszczonym doborze nastaw regulatora cyfrowego na podstawie zależności (10) otrzyma się  $T < 0,42T_o$ .

## Podsumowanie

Chociaż niektóre uwagi i obliczenia zostały wykonane dla konkretnych obiektów i regulatorów oraz dla konkretnego kryterium całkowitej jakości regulacji, to w oparciu o doświadczenia autorów rozważania i wyniki można uogólnić, wyprawdając ważny wniosek, że dla obiektów, których właściwości mogą zostać aproksymowane transmitancjami o postaciach (1) oraz (2) okres próbkowania  $T$  powinien spełniać nierówności

$$T < 0,3T_o \quad \text{oraz} \quad T < 0,3T_1 \quad \text{dla} \quad T_1 < 8T_o \quad (11)$$

Druga nierówność wynika z faktu, że bezwładność reprezentowana przez stałą czasową może być w przybliżeniu zastąpiona przez opóźnienie. Szczegółowo ten problem rozpatrywany jest w [10, 11]. Trzecia nierówność zapewnia kompromisową szybkość odpowiedzi na zakłócenie działające na wejściu obiektu [10]. Przy spełnieniu warunków (11) można oczekiwać, że obniżenie jakości regulacji z powodu zastosowania regulatora cyfrowego, jak i uproszczonego doboru jego nastaw, będzie w praktyce do przyjęcia. Nierówności (11) należy rozumieć jako graniczne dla obiektów pierwszego i drugiego rzędu z opóźnieniem. Dla obiektów wyższego rzędu można zastosować dłuższy okres próbkowania  $T$ .

## Wnioski

Artykuł dotyczy doboru okresu próbkowania w układach regulacji z konwencjonalnymi regulatorami cyfrowymi PI oraz PID. Dobór okresu próbkowania analizowany jest pod względem obniżenia jakości regulacji przy zastąpieniu regulatora analogowego przez regulator cyfrowy tego samego typu oraz z punktu widzenia uproszczonego doboru jego nastaw. Wynikiem są bardzo proste zależności umożliwiające dobór okresu próbkowania na podstawie transmitancji obiektu regulacji oraz możliwości zastosowania większości metod dla doboru nastaw dla odpowiednich konwencjonalnych regulatorów analogowych.

Artykuł powstał w ramach projektu GAR nr 101/12/2520.

## Literatura

- [1] Åström, K.J., Wittenmark, B., *Computer-Controlled Systems*. 3<sup>rd</sup> Edition. Prentice Hall: Tsinghua University Press, 1997, s. 569.
- [2] Brzózka, J., *Regulatory cyfrowe w automatyce*. Wydawnictwo MIKOM, Warszawa 2002, s. 258.
- [3] Fadali, M.S., *Digital Control Engineering. Analysis and Design*. Burlington: Academic Press Elsevier, 2009, s. 523.

- [4] Landau, I.D., Zito, G., *Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation*. Springer – Verlag, London 2006, s. 484.
- [5] Moudgalya, K.M., *Digital Control*. John Wiley & Sons, „Chichester” 2007, s. 543.
- [6] Oprzędkiewicz, K., *Dobór okresu próbkowania dla obiektów liniowych I i II rzędu z jednym zerem transmitancji*, „Automatyka”, z. 2, t. 14, 2010, s. 167–180.
- [7] Pivoňka, P., *Číslicová řídicí technika*, FEKT VUT v Brně, Brno 2003, s. 151.
- [8] Sawicki, J., Piątek, K., *Wstęp do teorii sterowania cyfrowego*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2004, s. 201.
- [9] Vítečková, M., Jaracz, K., *Metoda doboru nastaw regulatorów przy požádanym modelu matematycznym układu regulacji*. Studia Technica I, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków 2006, s. 129–135.
- [10] Vítečková, M., Víteček, A., *Vybrané metody seřizování regulátorů*, FS VŠB-TU, Ostrava 2011, s. 230.
- [11] Vítečková, M., Víteček, A., *Volba vzorkovací periody*. In: *Sborník příspěvků workshopu, „Automatizácia a riadenie v teórii a praxi ARTEP 2013”*. 20.2.–22.2.2013, Stará Lesná, Slovensko, s. 70/1–70/14.

## Simplified Selection of the Sampling Period

### Abstract

The paper is devoted to the selection of the sampling period for the conventional PI and PID digital controller tuning. Simple criteria for its selection are described.

**Key words:** sampling period, digital controller, controller tuning, control performance

Miluše Vítečková, Antonín Víteček  
Fakulta strojní, 7.patro, budova A  
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava  
17. listopadu 15/2172  
708 33 Ostrava-Poruba

Kazimierz Jaracz  
Instytut Techniki  
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN  
ul. Podchorążych 2  
30-084 Kraków, Polska