Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 60 Studia Philosophica V (2008)

Waldemar Korczyński

Propozycja modelowania poznania za pomocą teorii hipergrafów

Wytwory poznania można formułować w wielu językach i używać różnych formalizmów. Każdy formalizm bazuje na, często nie do końca uświadamianych, pojęciach w jakimś sensie „matematycznych”: *tyle jest w nauce nauki, ile w niej matematyki*. Nie mam tu na myśli aparatu logicznego, poszerzającego naszą wiedzę poprzez tworzenie nowych twierdzeń z tez znanych, przesłanek, ale mało eksponowaną – eksplikacyjną rolę matematyki jako dostarczyciela pewnych modeli. Przykłady takich modeli to rozmaite wykresy (por. tzw. nauki *ekonomiczne* i *społeczne*), mapy czy rysunki. Mniej znane są modele grafowe, a jeszcze mniej te oparte na teorii hipergrafów[1], które modelują wytwory poznania, jak i poznanie.

1. Struktura hipergrafów

Przez (zorientowany) hipergraf rozumieć można algebrę postaci

$$H = (A, V, (d_i)_{i\in I}),$$

gdzie A i V są zbiorami (hiper)*strzałek* i *wierzchołków*, a dla dowolnego $i\in I$ d_i: $A\to V$ jest funkcją, nazwijmy ją *funkcją i-tego wierzchołka*. Jeśli I jest zbiorem dwuelementowym, powiedzmy $I=\{0, 1\}$, to funkcję d_0 nazywa się zwykle *początkiem*, a funkcję d_1 *końcem*. Tak więc dla widzianej jako tzw. odcinek skierowany strzałki $\alpha\in A$ *początek*(α) i *koniec*(α) są dwoma wierzchołkami interpretowanymi wizualnie

[1] Hipergraf lepiej pasuje do wielu sytuacji niż np. będące jego szczególnym przypadkiem powszechnie stosowane tabele.

jako punkty zwane początkiem i końcem strzałki α. Na poniższym rysunku strzałka α przedstawiona jest jako (domknięty) odcinek, jej początek jest pierwszym punktem z lewej strony, a koniec ostatnim z prawej i oznaczonym symbolem „►".

Trochę mniej znane jest przedstawianie różnych figur, np. wielokątów jako (hiper) strzałek. Pomysł jest, oczywiście, ten sam: (zorientowana) figura wyznacza (ale niekoniecznie jest wyznaczona *przez*!) uporządkowany zbiór swych wierzchołków lub np. boków. Tak np. trójkąt α o wierzchołkach A, B i C zorientowany dodatnio ($A<B<C$) może być widziany jako obiekt (hiperstrzałka) α pewnego hipergrafu, powiedzmy *figury-płaszczyzny* = $(A, V, (d_i)_{i\in \mathrm{Nat}})$, takiego, że $d_0(\alpha)=A$, $d_1(\alpha)=B$ i $d_2(\alpha)=C$). Wartości pozostałych operacji na elemencie α są nieokreślone[2]. Podobnie przedstawić można ten trójkąt jako hiperstrzałkę α, dla której $d_0(\alpha)=AB$, $d_1(\alpha)=BC$ i $d_2(\alpha)=CA$. Hipergrafy widziane też mogą być jako tabele. Nazwy wierszy to (hiper)strzałki, nazwy kolumn odpowiadają operacjom hipergrafu a wpisywane do komórek tabeli elementy to wierzchołki. Takie rozumienie hipergrafów jest szczególnie częste wśród ludzi zajmujących się bazami danych. Hipergraf to po prostu (trochę inaczej zapisany) system informacyjny w sensie Pawlaka[3]. Dobrym modelem poznania wydają się właśnie tzw. hipergrafy wielowymiarowe (*higher hipergraphs*). Można je sobie wyobrażać jako uporządkowane (niekoniecznie dobrze, a nawet liniowo) zbiory hipergrafów mające tę dodatkową własność, że pewne strzałki są równocześnie wierzchołkami.

Zamiast długiego i formalnego opisu wielowymiarowych hipergrafów posłużymy się tu[4] bardziej intuicyjnym pojęciem tzw. n-grafów. Hipergrafy n-wymiarowe są ich prostym uogólnieniem. Przez n-graf rozumiemy dowolny ciąg zbiorów i funkcji postaci

$$V_0 \overset{d_0^0}{\underset{d_1^0}{\leftleftarrows}} A_0 = V_1 \overset{d_0^1}{\underset{d_1^1}{\leftleftarrows}} A_1 = V_2 \overset{d_0^2}{\underset{d_1^2}{\leftleftarrows}} \ldots \overset{d_0^{n-1}}{\underset{d_1^{n-1}}{\leftleftarrows}} A_{n-1} = V_n \overset{d_0^n}{\underset{d_1^n}{\leftleftarrows}} A_n$$

taki, że dla dowolnego $i \leq n$ trójka

$$V_i \overset{d_0^i}{\underset{d_1^i}{\leftleftarrows}} A_i$$

jest grafem. Jest to najprostsza chyba i najbardziej intuicyjna definicja n-grafów. Opiera się ona na prostej zasadzie: wierzchołki „pierwszego" grafu traktujemy jako strzałki grafu wcześniejszego (dopisywanie grafów po lewej stronie) lub strzałki ostatniego grafu traktujemy jako wierzchołki nowego grafu (dopisywanie po prawej

[2] Aby nie wychodzić poza „klasyczną" algebrę i nie wchodzić w rozważanie funkcji (operacji) częściowych, należałoby dołączyć do zbioru wierzchołków takiego hipergrafu element odpowiadający „nieokreśloności", tzw. *bottom element*, ale jest to zabieg techniczny i nie będziemy tu tego wątku rozwijać.

[3] Por. np J. Bartosik, *On an interpretation of globularity of higher graphs*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej – Elektryka", nr 42, Kielce 2005.

[4] W. Korczyński, *N-hipergrafy jako modele hierarchicznych systemów dynamicznych* –*9/7, [w:] *Modelowanie i optymalizacja. Metody i zastosowania*, red. J. Kasprzyk, J. Węglarz, Exit, Warszawa 2002.

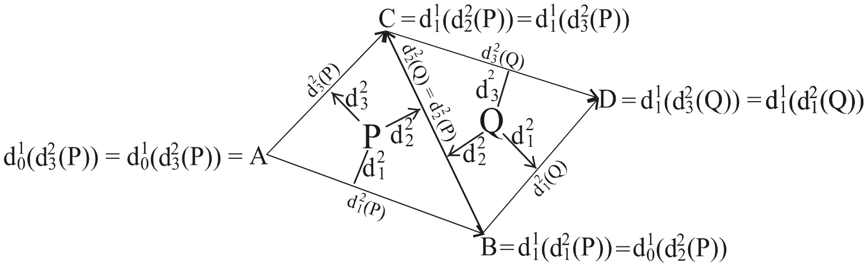
stronie). Można to rozumieć jako pewną **operację** „dopisywania grafu do n-grafu”. Definicję tę uogólnia się następująco:

– Zamiast dwuelementowego zbioru funkcji między kolejnymi zbiorami (zawsze od strzałek i-tego wymiaru do wierzchołków tegoż wymiaru) $D^i = \{d^i_0, d^i_1\}$ dopuszczamy dowolny zbiór F^i funkcji ze zbioru A_i do V_i.

– Zamiast ciągu dopuszczamy dowolny porządek częściowy.

Można pokazać[5], że każdy taki hipergraf wyższego rzędu jest izomorficzny z pewnym uogólnieniem n-wymiarowego wielościanu. Operacje tego hipergrafu przypisują każdej ścianie (co może być niejednoznaczne, gdy cały wielościan też traktujemy jako ścianę) zorientowanych części jej brzegów, np. trójkątowi przypisalibyśmy (trzema operacjami) jego zorientowane boki, każdemu z tych boków (dwoma operacjami) jego początek i koniec. Punktów już nie orientujemy.

Przykład. *Figurę R składającą się z dwóch trójkątów P=ABC i Q=BDC widzieć można jako 3 – graf następująco.*



Mamy tu $F_3 = \{d^3_1, d^3_2\}$, $F_2 = \{d^2_1, d^2_2, d^2_3\}$, $F_1 = \{d^1_1, d^1_2\}$, $F_0 = \{d^0\}$, gdzie wartości operacji d^i_j dane są tabelką:

	d^3_1	d^3_2	d^2_1	d^2_2	d^2_3	d^1_1	d^1_2	d^0
R	P	Q						
P			AB	CB	AC			
Q			BD	CB	CD			
AB						A	B	
CB						C	B	
BD						B	D	
CD						C	D	
AC						A	C	
A								A
B								B
C								C
D								D

[5] Por. W. Korczyński, *A note on an algebraic characterization of higher level hypergraphs and higher level partitions*, „Demonstratio Mathematica” 2006, vol. XXXIX, no 2.

Puste komórki tej tabeli odpowiadają „wartości nieokreślonej" lub, jeśli ktoś tak woli, błędowi.

Opis taki można, oczywiście, dowolnie „rozdrabniać"; można np. charakteryzować odcinki nie tylko przez ich końce, ale podać również jakąś ich miarę, np. długość. Odpowiadałoby to dopisaniu do zbioru F_1 jeszcze jednej operacji, tj. dołączeniu do tabeli dodatkowej kolumny.

2. Hipergraf jako model poznania obiektu i jego cech

Elementy uogólnionego hipergrafu możemy rozumieć jako *składowe* lub *atrybuty* (*wartości atrybutów*) poznawanego obiektu. Poznanie polegałoby teraz na próbie zobaczenia takiego obiektu w postaci wspomnianego grafu wielowymiarowego[6]. Należałoby zatem wyznaczyć nie tylko takie jego elementy, które są (na danym, ustalonym etapie poznania) tylko wierzchołkami, ale również te, które są strzałkami. Te pierwsze (tylko wierzchołki) odpowiadają temu, co na wspomnianym etapie poznania nazywa się *atomami*[7]. Nie mają one żadnych wyróżnialnych atrybutów i są identyfikowalne wyłącznie poprzez nazwę. Pozostałe elementy są obiektami charakteryzowanymi w naszym opisie nie tylko przez nazwę, ale również części bądź atrybuty[8]. Poznanie ma w tym przypadku niejako dwa wymiary:

1. Poszukiwanie nowych wierzchołków (które okażą się być może również strzałkami) naszego uogólnionego hipergrafu.

2. Szukanie „na tym samym poziomie" nowych związków (strzałek) między znanymi już wierzchołkami.

Działanie opisane w punkcie 1 odpowiadałoby poszukiwaniu nowych atomów[9]. Można powiedzieć, że jest to poznanie „w głąb". Patrząc na poznanie jako tworzenie gigantycznej bazy danych, można by to widzieć jako dopisanie do jej schematu nowego atrybutu, tj. uzupełnienie tabeli o nową kolumnę.

Poszukiwanie związków między obiektami już znanymi wymaga, aby były one wszystkie „równocześnie" dostępne. Trzeba zatem popatrzeć na wszystkie te obiekty

[6] Tzn. ciągowi „zagnieżdżonych" jedna w drugiej tabel (lub systemów informacyjnych).

[7] Warto tu wspomnieć, że jedna z podstawowych zasad dobrej konstrukcji (relacyjnej) bazy danych, to wymóg, by stosowna relacja była w tzw. pierwszej postaci normalnej, tzn. by do komórek tabeli wpisywać właśnie atomy.

[8] Czy i jak odróżnić część od atrybutu? Potrafimy powiedzieć tylko, że: dwa obiekty pozostają ze sobą w pewnym związku. Można sklasyfikować takie związki, oddzielając wyraźnie np. relację „bycia (materialną) częścią" od związku np. pokrewieństwa. Prowadzi to do pewnego specjalnego przypadku tzw. systemów Bertalanffy'ego (por. M. Mesarovic, *Matematyczna teoria systemów ogólnych*, [w:] G.J. Klir, *Ogólna teoria systemów*, WNT, Warszawa 1976). Podejście takie ma jednak tę wadę, że wykrycie nowego związku generuje konieczność natychmiastowej jego klasyfikacji, co może być i trudne, i niewygodne.

[9] Z faktu, że obiekt jawi się dziś jako niepodzielny, nie można wnosić, że będzie takim za sto lat.

niejako *z góry*. Ten typ poznania jest w tym sensie „przeciwnie (*ortogonalnie*) skierowany” do poznania „w głąb”. Jest niejako poznaniem „wszerz”.

3. Hipergraf jako model ograniczeń poznania

Występują ograniczenia poznania typu zasady Heisenberga, które mogą mieć interpretację w hipergrafie: niektóre strzałki naszego uogólnionego hipergrafu mają postać pary $\alpha=(a,p)$, gdzie a jest „normalnym” wierzchołkiem, a p pewną *liczbą* opisującą prawdopodobieństwo, że wykonanie na obiekcie („strzałce”) α operacji d_0 da w wyniku wartość a z prawdopodobieństwem b. Zamiast „zwykłych”, będących „normalnymi” funkcjami operacji hipergrafu, rozważalibyśmy zmienne losowe. Jak określić składanie tak rozumianych zmiennych losowych? Czy na przykład wartość funkcji d_i na obiekcie α (i-tego wierzchołka obiektu α) ma uwzględniać prawdopodobieństwo, z jakim został on wyznaczony? Jeśli tak, to czy ma ono wpływ tylko na drugą współrzędną tego wierzchołka (prawdopodobieństwo jego wyznaczenia), czy też również na samą wartość a. Jeśli więc np. operacją *prędkość* wyznaczyliśmy dla obiektu α wektor [1,2,3] z prawdopodobieństwem 0,5, tzn. jeśli

$$\textit{prędkość}(\alpha) = ([1,2,3];\ 0{,}5),$$

to czy operacja „pierwsza współrzędna”

$$pr_1\colon \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}, \quad pr_1(x,y,z) = z$$

ma być zwykłą funkcją, czy też być może również ta operacja powinna mieć postać

$$pr_1'\colon \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}\times[0,1], \quad pr_1'(x,y,z) = (x', p'),$$

dla pewnych x' i p'. Czy należy dopuścić rozważanie zmiennych losowych na dwóch sąsiadujących ze sobą poziomach opisu, czy też być może zażądać oddzielenia tych poziomów co najmniej jednym, zwykłym, nie zawierającym zmiennych losowych, poziomem opisu? Sygnalizuję tu wystąpienie problemu.

W tzw. interpretacji pomiarowej zasady Heisenberga *prędkość* i *położenie* związane są ze sobą w ten sposób, że dokładność wyznaczania prędkości jest odwrotnie proporcjonalna do dokładności wyznaczania położenia cząstki. Gdybyśmy chcieli za miarę tej precyzji przyjąć wspomniane wyżej prawdopodobieństwo, to można powiedzieć, że wierzchołki

$$\textit{prędkość}\ (\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}, p) \text{ oraz } \textit{położenie}(\alpha) = (\dot{\alpha}, \dot{p})$$

związane są taką zależnością, że „powiększanie” wielkości p powoduje zmniejszenie wielkości $\dot{p}$ i odwrotnie. Mamy tu pewną zależność między operacjami wspomnianego hipergrafu. Z formalnego punktu widzenia rozważamy więc nie „goły” wielowymiarowy hipergraf, lecz pewną **algebrę** (lub po prostu system relacyjny) zawierającą go jako tzw. redukt. Ten typ ograniczeń poznania jest z logicznego punktu widzenia w jakimś sensie „prymitywny”; nie ma właściwie dobrego sposobu, aby odróżnić go od „ograniczającego” dodawanie i mnożenie prawa rozdzielności dodawania i mnożenia, nie widać też, podobnie jak w tym ostatnim przypadku, sensowności czynienia takich prób[10].

Inny charakter mają **ograniczenia** wynikające z konieczności przemieszczania się „w pionie” wspomnianego hipergrafu, gdy – aby wyartykułować jakąś własność – należy „zmienić poziom rozważań”. Na tej zasadzie zbudowanych jest wiele antynomii podpadających w jakimś sensie pod schemat antynomii Russella. W tym przypadku chodzi nie tyle o sposób fizycznego poznawania świata, ile o sposób jego postrzegania. Niekiedy udaje się taki punkt widzenia zmienić i własności, które na pierwszy rzut oka wydają się definiowalne wyłącznie w językach rzędu wyższego niż pierwszy, okazują się możliwe do określenia w języku rzędu pierwszego. Odpowiadałoby to „rzutowaniu” ciągu strzałek między różnymi poziomami na pierwszy – hiperstrzałkę na poziomie logiki rzędu pierwszego.

Inne ograniczenie to ograniczenia specyfikacji. Wzbogacony o dodatkowe związki między operacjami hipergrafu system relacyjny może dopuszczać definiowanie obiektów (dokładniej mówiąc opisy obiektów), które są w jakimś sensie *sprzeczne* lub tylko *nieintuicyjne*. Dążenie do usunięcia tej sprzeczności prowadzi do powstania zupełnie innego modelu rzeczywistości niż oryginał zawierający tę sprzeczność. Przykładem może tu być powstanie mereologii S. Leśniewskiego, która nie pozwala na sensowne wyartykułowanie niektórych tzw. kontrowersyjnych własności zbiorów. Do tej samej klasy należy przypisywane S. Banachowi wyspecyfikowanie jednego z atrybutów wszechmocy Boga jako możliwości stworzenia takiego kamienia, którego On sam nie mógłby podnieść. Postawienie językowi wymagania, by nie można w nim było wyartykułować sprzecznych specyfikacji wydaje się bezsensowne; usuwając jedną (znaną) sprzeczność można popaść w inne sprzeczności lub kłopoty z intuicją[11].

Wydaje się, że wiele wspomnianych wyżej ograniczeń specyfikacyjnych ma swoje źródła w głęboko zakorzenionych wyobrażeniach, stereotypach. Są one często związane właśnie z przypisywaniem tzw. wartości rozmaitym, nie do końca określonym obiektom i bez głębszego – analitycznego – zrozumienia, czym jest wartość,

[10] Ten „nasz” punkt widzenia jest ludzkim, semantycznym punktem widzenia zagadnienia pomiaru, który zasada Heisenberga reprezentuje i którego domaga się, będąc tylko reprezentacją ogólniejszej zasady – odkrytej i nazwanej przez T. Grabińską zasadą kompensacji. Por. T. Grabińska, H. Hadryś, M. Zabierowski, *Relacja nieoznaczoności Heisenberga a wzorce pomiarowe*, „Z Zagadnień Filozofii Przyrodoznawstwa i Filozofii Przyrody” 2004, nr VI, s. 155–162.

[11] Historia pojęcia zbioru ma więcej niż 200 lat – jego intuicje pochodzą z filozofii greckiej. Identyfikowanie zbioru z własnościami tkwi tak głęboko w ludzkim doświadczeniu poznawczym, że jako nieusuwalne jest przyczyną budowania matematyki na pojęciu zbioru.

czyli to, co jest współcześnie nadużywane, a lepiej żeby zostało przypisane tylko zdaniom logicznym i w ekonomii.

Inny charakter mają ograniczenia „materialne" wynikające z natury przyrody. „Usuwanie" tych ograniczeń polega zwykle na jakiejś modyfikacji sposobu widzenia świata, czego nie chcą uznawać redakcje pism fizycznych trzymające się paradygmatów[12]. Prowadzi to często do zastąpienia opisu innym, „pojedynczo" – co do pojedynczych pojęć – bardziej zgodnym z naszą intuicją, ale ogólnie nie.

Ograniczenia poznania przedstawiać można na wiele sposobów. Przyjęcie zarysowanego schematu modelu poznania, pozwalającego rozważać je wspólnie, mogłoby pomóc w zrozumieniu roli języka w poznaniu i wyodrębnieniu różnych typów poznania, w tym poznania nieartykułowalnego w żadnym języku. Nie jest ono naukowe, ale kultura nie sprowadza się do nauki, a uświadomienie sobie płynnych, ale wyraźnych granic „naukowości" pozwoliłoby ograniczyć nadmiernie wybujałe oczekiwania od nauki. Przedstawiony model jest prosty, ale jego zaletą jest dobry stosunek intuicyjności do stopnia złożoności; użyta tu matematyka jest być może mało znana, ale elementarna[13].

4. Granice poznania naukowego

W nauce przecenia się tzw. zdrowy rozsądek. Obiektywizm podporządkowuje się językowi przeciętnego kibica, który nie chce nawet poznać elementarnych zasad teorii względności, światów równoległych (w drugim jego drużyna uzyskała inny wynik). W nauce zachodniej uwzględnia się istnienie wielu „zdrowych rozsądków" i czyni się z tej kolekcji (wadliwą[14]) teorię negocjacji. Richard Feynman powiedział, że nauka to *skrajny zdrowy rozsądek*, lecz nie sprecyzował, czym ów naukowy zdrowy rozsądek miałby być. Rozumiejąc teorię jako zbiór wypowiedzi wyartykułowanych w pewnym języku, pytanie o jej poprawność widzieć można jako pytanie o zgodność tych wypowiedzi z doświadczeniem, a to jest coś więcej niż tylko tzw. powszechnie znany postulat obiektywności[15], intersubiektywnej weryfikacji lub

[12] Np. w „Acta Physica Polonica" w latach 70. nie przyjmowano prac dowodzących błędu fizyków w obliczeniu wielokoskalowej gęstości masy, i to rzędu nie 50%, lecz ok. 1000% (na Zachodzie nazwano ten temat „materią ukrytą"), zasady Kopernika (na Zachodzie później powstał temat „inflacji"), uogólnienia teorii ciepła Boltzmanna.

[13] Powstaje tak pilna potrzeba budowania filozofii typu Szkoły Wrocławskiej – filozofii faktu, zdarzenia, zmiany. Np. u M. Zabierowskiego nawet prawdopodobieństwo *p* składa się z oceanu może-zon, czterech podstawowych rodzajów.

[14] Por. M. Zabierowski, *Ontologia negocjacji*, „Zeszyt Naukowy Wydz. Ekonomii i Zarządzania WSJOE" 2000, nr 3, s. 149–184.

[15] Por. N. Smyrak, *Przyczynek do rozważań nad obiektywnością poznania*, „Fundamenty – Studia Cosmologica Economica" 2005, nr 3, s. 40–41.

falsyfikacji (gdy np. wszyscy uważali, że Słońce się porusza), oraz jako pytanie o niesprzeczność tego zbioru wypowiedzi.

Nie stawia się pytania o zdrowy rozsądek, nie usiłuje konsekwentnie kojarzyć zdrowego rozsądku ani z rejestracją faktu-jako-niepoprzedzającego-teorię, ani ze spójnością teorii. Zdrowy rozsądek ma być wrodzony i tym, co pozwala jednostce przeżyć, funkcjonować w życiu, które w kulturze transakcji ma być programowo ulosowione[16]. Zdrowy rozsądek ułatwiający np. poruszanie się w biznesie czy polityce nie nadaje się do rozważania kwestii ekonomicznych czy do polemiki, ani pytań o moralną kondycję narodu poddanego naciskowi przez właścicieli. Badacz nie przekaże menedżerowi rezultatów swej pracy, ponieważ aczkolwiek język naturalny jest elastyczny, to nie widać jednolitego sposobu przekładania otrzymanych w nauce wyników na język naturalny. Dlatego próby popularyzowania nauki są *de facto* jej zniekształcaniem, mitologizowaniem. Czystym marketingiem są festiwale nauki, epatowanie widza wyrwanym z kontekstu rzadko spotykanym zjawiskiem, bez usiłowania zrozumienia, o co właściwie chodzi. Nauką nie może być to, co jest na takich festiwalach typowe – jest tam inaczej niż zwykle, coś tam błyska, huczy, jest inaczej niż na prywatce u Barbary.

W zasadzie nikt nie neguje ani roli nauki w tzw. postępie czy „rozwoju” ani konieczności przybliżania jej wyników zwykłym śmiertelnikom. Jednym z priorytetów unijnych programów edukacyjno-naukowych są rozmaite wersje hasła „społeczeństwo oparte na wiedzy”. Wydaje mi się jednak, że nie ma jak dotąd żadnej koncepcji godzenia zdrowego rozsądku naukowca ze zdrowym rozsądkiem szarego człowieka[17]. Programy te zdziałają niewiele, chyba że wiedzę rozumie się jako wiedzę praktyczną typu *know how*.

The proposition of modeling of cognition by means of hypergraph theory

Abstract

The theory of hypergraphs is presented as a tool representing empirical data (characteristics of the studied object). Such a knowledge representation can be analysed owing to operations defined in hypergraph structure. The analysis also concerns: a) limitations because of measurement, b) logical levels of object representation, and c) natural constraints. The hypergraph model of cognition allows to grasp the border-line between science and other types of knowledge.

[16] M. Zabierowski, *Problematyka rozwoju w wolnym rynku. Kosmologia i ‘podmioty gospodarcze’*, „Fundamenty” 2004, nr 1, s. 31–34.

[17] Umocnienie autorytetu nauki u laików ma znaczenie komercyjne; nie chodzi bynajmniej o przekazywanie naukowego sposobu myślenia.