Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 59 Studia ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia II (2008)

Lucia Ilucová

O prawdopodobieństwie geometrycznym

Abstract. Similarly like classical probability, the origin of the geometric probability is also connected with gambles. Nowadays it solves problems that are common for the real life but also the problems of many scientific branches. In the paper there are briefly presented the historical facts about development of the geometric probability with the accent on its founder Ĭ Comte de Buffon and a solution of one alternative of his tile problem.

1. Wprowadzenie

Prawdopodobieństwo zdarzenia jest kojarzone przez ludzi z grami hazardowymi (z zakładami) i jest rozumiane jako stosunek liczby wyników sprzyjających do liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, z którym zdarzenie się wiąże. Takie „klasyczne" podejście do prawdopodobieństwa jest stosowane do rozwiązywania problemów związanych z doświadczeniami losowymi, których zbiór wszystkich wyników jest skończony i wszystkie te wyniki są jednakowo prawdopodobne (zob. [6]).

Pojęcie *prawdopodobieństwa geometrycznego* jest prawie nieznane dla większości ludzi, dlatego że nie ma go w programie szkolnego rachunku prawdopodobieństwa. Tymczasem świat, który nas otacza, jest pełen zdarzeń losowych typu geometrycznego i prawdopodobieństwo geometryczne jest podstawowym narzędziem ich opisu i zrozumienia.

Do studiowania prawdopodobieństwa geometrycznego niezbędne jest zebranie pewnych podstawowych własności obiektów geometrycznych (punktów, prostych, płaszczyzn, okręgów, kul itd.), podstawowych pojęć jako obiektów oddziaływujących (sondy) i obiektów, na których działamy oraz dróg i sposobów, za pomocą których mogą być określone probabilistyczne wyobrażenia o wzajemnych oddziaływaniach tych geometrycznych obiektów.

2. Prawdopodobieństwo geometryczne w naturalnych aktywnościach

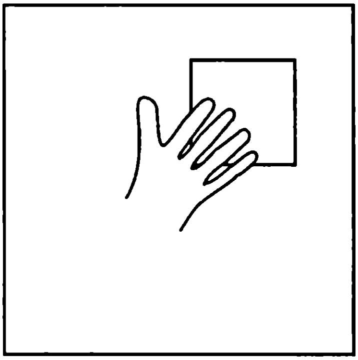
Rozważmy następujące sytuacje:

1. *W grze z udziałem dwóch graczy rzuca się monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to zwycięża jeden z graczy, jeśli zaś reszka, to drugi.*

2. *W ciemnym pomieszczeniu człowiek usiłuje ręką znaleźć na ścianie wyłącznik światła; są dwa wyniki: znajdzie wyłącznik albo nie.*

3. *Lew poszukuje pożywienia na swoim terytorium. Albo zaspokoi swój głód, albo nie?*

4. *Chłopiec rzuca mały kamyk do pojemnika z wodą (rys. 1). Od czego zależy to, czy kamyk wpadnie do pojemnika czy nie?*

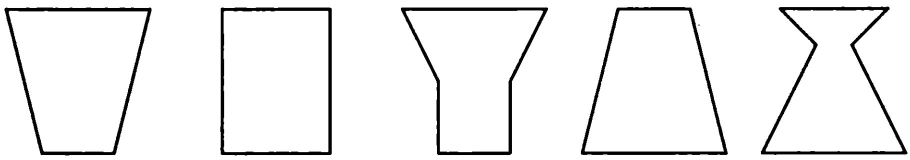


Rysunek 1. Współdziałanie (interakcja) ludzkiej ręki z wyłącznikiem na ścianie

Wszystkie wspomniane sytuacje są podobne z uwagi na liczbę możliwych wyników. Są tylko dwa wyniki: **sukces** bądź **porażka**. Liczba zmiennych w drugiej, trzeciej i czwartej sytuacji jest jednak większa niż w pierwszej i te zmienne są różnego typu. Chodzi o:
— podstawową przestrzeń, w której przebiega aktywność (ściana pomieszczenia, terytorium, na którym żyje lew, naczynie),
— obserwowany obiekt (wyłącznik światła, pożywienie lwa, otwór naczynia),
— obiekt wykonujący czynności (ręka człowieka, lew, kamyki).

Wspomniane problemy należą do zakresu prawdopodobieństwa geometrycznego. Jego ogólnym przedmiotem jest badanie *przestrzennych zdarzeń*; zdarzenie rozumiane jest jako fakt, że w części przestrzeni jest coś, co można opisać takimi geometrycznymi charakterystykami, jak objętość, pole, długość i kształt.

Istnieją dwa typy zdarzeń przestrzennych: zdarzenia *indywidualne* (*pojedyńcze*) i zdarzenia *kolektywne* (*zbiorowe*). Przykładem zdarzeń pierwszego typu mogą być wady części maszyn albo patologiczne zmiany organów chorego (np. nerki, płuca). Przykładem drugiego typu są wzmacniające cząstki albo dziury w tkaninach, drzewa w lesie, przystanki tramwajowe w mieście, turyści w pewnym regionie itd. W tych przypadkach są ważne nie tylko wielkości składowych obiektów, ale także ich przestrzenne rozmieszczenie oraz wzajemne oddziaływanie (wpływ prądów wodnych i rodzaju gleby na przestrzenne rozmieszczenie określonych drzew, zależność obsługi komunikacyjnej od gęstości zaludnienia miasta, przestrzenne rozmieszczenie zanieczyszczeń w tkaninach). Istnieją również sytuacje, które są zwyczajnymi problemami probabilistycznymi, pomimo ich geometrycznej natury. Jest takim na przykład *problem przypadkowego spotkania*[1], który jest dwuwymiarowy (jednym z wymiarów jest czas).



Rysunek 2. Przykłady wypukłych i wklęsłych naczyń. Sukces wpadania kamienia do naczynia nie zależy od jego objętości, a tylko od dwuwymiarowego przekroju jego otworu

Badanie zdarzeń zazwyczaj odbywa się na podstawie pobranej *geometrycznej próbki.* Sprowadza się do analizy projekcji obiektów na podprzestrzeń liniową (płaszczyznę, prostą) i przecięć z odpowiednio wybranymi zbiorami – sondami – znanych własności. Sonda może być zerowymiarowa (punkt), jednowymiarowa (odcinek prostej lub krzywej, prosta), dwuwymiarowa (badane okno, płaszczyzna) albo trójwymiarowa (ograniczona część przestrzeni). Trójwymiarowy obiekt jest następnie reprezentowany przez swoje dwywymiarowe, jednowymiarowe i zerowymiarowe próbki.

3. Podstawowe podejścia

Prawdopodobieństwo klasyczne pozwala rozwiązywać problemy dotyczące sytuacji, w których jest skończony zbiór jednakowo prawdopodobnych wyników. Klasyczne prawdopodobieństwo zdarzenia jest określone jako iloraz liczby wyników sprzyjających zdarzeniu i liczby wszystkich możliwych wyników. Prawdopodobieństwo geometryczne także porównuje wyniki sprzyjające zdarzeniu z wszystkimi możliwymi wynikami. Typowe problemy związane z prawdopodobieństwem geometrycznym dotyczą wzajemnego oddziaływania obiektów geometrycznych (zbiorów) i ich prawdopodobieństwa. Najistotniejsze są tu następujące sytuacje:

Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, $B \subset A$ i C jest sondą (punktem, prostą, odcinkiem itd.), to wówczas możemy zdefiniować warunkowe prawdopodobieństwa $P(C \uparrow B | C \uparrow A)$ albo $P(C \uparrow B | C \subset A)$.
Rozważmy odcinek A o długości 1 podzielony na dwie części – A_1 o długości 0.2

[1] *Meeting problem*: Dwie osoby A i B umówiły się na spotkanie w danym miejscu. Niestety zapomniały o dokładnym czasie spotkania, pamiętały jedynie o tym, że ma to być między godziną ósmą a dziewiątą wieczór. Obie wybiorą swój czas przybycia w tym przedziale czasowym i każda czeka 10 minut (albo do dziewiątej, jeśli któraś z nich przyszła pierwsza) na przyjście tej drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do spotkania dojdzie?

i A_2 o długości 0.8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że punkt rzucony losowo na odcinek A trafi do jego części A_1, a jakie że do części A_2?

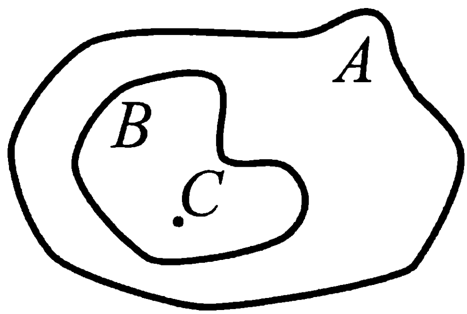
W określeniu prawdopodobieństwa geometrycznego musimy uwzględniać długości odcinków, co wynika z następujących faktów:
Jeżeli A jest dziedziną sondy C (punkt, prosta itd.), a B jest podzbiorem zbioru A, to prawdopodobieństwo, że sonda C zawierająca się w A obejmie także B, jest równa

$$P(A \uparrow B|C \uparrow A) = \frac{m(C \uparrow B)}{m(C \uparrow A)},$$

gdzie $m(C \uparrow A)$ i $m(C \uparrow B)$ są „zawierające" („zasahujuce") albo „kinematyczne miary" przecięć $C \uparrow A$ i $C \uparrow B$ (por. [7]). W przypadku sondy punktowej (rys. 3) to prawdopodobieństwo jest równe

$$P(C \uparrow B|C \uparrow A) = \frac{\nu(B)}{\nu(A)}, \tag{1}$$

gdzie ν jest miarą zbioru (długością, polem, objętością, ogólnie: miarą Lebesgue'a).



Rysunek 3. Dziedzina A, jej podzbiór B i punktowa sonda C

Zasadniczym problemem prawdopodobieństwa geometrycznego jest poprawna parametryzacja zadania, która jest odpowiednim ilościowym opisem wzajemnych pozycji trafiającej albo mijającej (sonda C) i trafianego albo mijanego (obiekt B) zbioru. Aby uzyskać jednoznaczne wyniki, ta parametryzacja musi być niezmiennicza względem grupy przekształceń euklidesowskich zawierających translacje o wektor (zmiana początku), obroty (prostokątna transformacja współrzędnych) i symetrie osiowe. Tę własność muszą mieć także odpowiednie miary zbiorów A, B, C, $C \uparrow B$, $C \uparrow A$ itd. Te miary muszą być zarazem nieujemne, monotoniczne albo ciągłe i addytywne. Takimi miarami są na przykład długość (długość odcinka na prostej albo łuku krzywej), pole powierzchni (pole płaskiej figury, powierzchnia bryły), objętość, a także długości krzywej. W ten sposób prawdopodobieństwo geometryczne jest zdefiniowane jako iloraz miary zbioru przypadków sprzyjających i miary zbioru wszystkich możliwych przypadków, przy czym obie te miary muszą być tego samego typu (długość albo pole itd.). Oznacza to, że jeśli miarą zbioru sprzyjających przypadków Ω' jest długość $L(\Omega')$, a miarą zbioru Ω wszystkich możliwych przypadków jest objętość $S(\Omega)$, to prawdopodobieństwo geometryczne $P(\Omega') = 0$. Na przykład, prawdopodobieństwo, że punkt leży na krzywej B o dowolnej długości i zawartej w kwadracie A jest równe zero i – co oczywiste – jest niezależne od tego, czy rozważane zbiory są otwarte czy domknięte (pole kwadratu się nie zmienia, gdy go rozważamy bez brzegu).

4. Prawdopodobieństwo geometryczne w historii

Prawdopodobieństwo geometryczne i przestrzenna statystyka rozwijały się wolniej i z większymi trudnościami niż prawdopodobieństwo klasyczne i statystyka zdarzeń, które dają się opisywać liczbowo.

Początków rachunku prawdopodobieństwa jako wiedzy empirycznej można się doszukać w grach, z których najstarsza dotyczy rzutów kostkami. „Doktryna przypadku" jako matematycznej dyscypliny datuje się od korespondencji między Pierre'em Fermatem a Blaise'em Pascalem (1645), w której rozwiązywali problem sprawiedliwego podziału stawki w grze przed jej zakończeniem. Ta korespondencja została opublikowana w roku 1664 i za pierwsze znane naukowe rozważania o prawdopodobieństwie jest uważany esej *De Ratiociniis in Ludo Alea* Christiana Huygensa (opublikowany w roku 1657). Poważne dysputy o prawdopodobieństwie przedstawiono w sławnej pracy *Ars Conjectandi* Jakoba Bernoullego opublikowanej pośmiertnie w 1713 w *Essay d'Analyse sut les Jeux de Hayard* (1708, 1713) przez Pierre'a Rémonda de Montmorta, a szczególnie w pracy *The Doctrine of Chances* (1718) Abrahama de Moivre.

Początki prawdopodobieństwa geometrycznego były związane z grami. Za twórcę prawdopodobieństwa geometrycznego uznawany jest francuski uczony de Buffon. Jego podanie z roku 1733 o przyjęcie do Académie Royale des Sciences w Paryżu zostało poparte artykułem *Mémoire sur le Jeu de franc-carreau*, który pomógł mu uzyskać członkowstwo akademii na stanowisku młodszego członka. W roku 1777 Buffon włączył ten artykuł do swej pracy *Supplément á l'Historie Naturelle.* Tam proponuje on i rozwiązuje (nie zawsze poprawnie) cztery problemy sformułowane w kontekście gier losowych:

— *zadanie o igle,*
— *zadanie o siatce,*
— *zadanie o kostce,*
— *zadanie o pokrywaniu kafelkami.*

• Pierwszy problem, zwany *zadaniem Buffona o igle* (*Buffon's needle problem*), jest uważany za podstawowy problem prawdopodobieństwa geometrycznego. W tym problemie chodzi o prawdopodobieństwo, że pręt S o długości s rzucony losowo na podłogę pokrytą deskami o szerokości d ($d > s$) przetnie prostą rozdzielającą deski. W istocie chodzi tu nie o igłę, ale o „nieskończenie cienki pręt", a więc o odcinek jako obiekt świata matematycznej abstrakcji oraz nie o deski, ale o pęk $\mathcal{D}$ prostych równoległych i odległych wzajemnie od siebie o d ($d > s$). Matematyczne zadanie dotyczy więc prawdopodobieństwa, że rzucony losowo odcinek przetnie jedną z prostych tego pęku.

W rozwiązaniu zadania $P(S \uparrow D) = \frac{2\pi s}{d}$ pojawia się po raz pierwszy liczba π jako miara wszystkich kierunków pręta rzuconych losowo na podłogę pokrytą deskami. Jeśli znane są początkowe zmienne (długości pręta s, szerokośść drewnianej deski d), to opisany eksperyment Buffona można wykorzystać do oszacowania liczby π.

• W *zadaniu o siatce* (*grid problem*) jest mowa o pręcie o długości s rzucanym na prostokątną siatkę, przy czym chodzi o znalezienie prawdopodobieństwa, że pręt przetnie co najmniej jeden z boków prostokąta[2].

• *Problem kostki* (*cube problem*) wiąże się z rzucaniem sześcianu na prostokątną siatkę i dotyczy prawdopodobieństwa, że sześcian (faktycznie, jedna z jego kwadratowych ścian) przetnie boki prostokąta. Więcej szczegółów dotyczących *zadania o pokrywaniu dachówkami* podamy w dalszej części pracy.

• W 1865 angielski matematyk James Joseph Sylvester sformułował problem znajdowania prawdopodobieństwa, że cztery losowo wybrane punkty wnętrza figury wypukłej utworzą wypukły czworokąt. Problem ten znany jest jako *Sylvester paradox Four-Point Problem.* Rozwiązanie zadania zależy od kształtu figury, prawdopodobieństwo to jest maksymalne w przypadku elipsy (0.71), a minimalne w przypadku trójkąta (0.67).

• Kolejnym problemem w historii prawdopodobieństwa geometrycznego jest tzw. *paradoks Bertranda* (*Bertrand's paradox* albo *Bertrand's problem*). Nazwa pochodzi od francuskiego matematyka Josepha Louisa Bertranda, który opublikował ten paradoks w 1889. Problem dotyczy prawdopodobieństwa, że „losowo wybrana cięciwa" okręgu będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.

Są trzy różne rozwiązania problemu Bertranda ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$), w zależności od interpretacji zwrotu „losowo wybrana cięciwa". Potrzeba jednoznacznej parametryzacji była w owym czasie rozumiana jako paradoks. Jest oczywiste, że tylko jedna odpowiedź spełnia warunki niezmienniczości i poprawna odpowiedź to $\frac{1}{2}$, parametryzacja kolejnych dwóch możliwych (a błędnych) rozwiązań nie

[2]Rozwiązanie tego zadania zaproponowane przez Buffona było błędne; poprawne rozwiązanie podał później Pierre Simon de Laplace w swojej pracy *Théorie Analytique des Probabilités*, opublikowanej w roku 1812 bez jakichkolwiek odniesień do Buffona.

jest niezmiennicza względem grupy przekształceń euklidesowych.

Szczegółowe informacje o zadaniu Buffona o igle (np. uogólnienie problemu ze względu na długość igły) można znaleźć w [10].

W dziewiętnastym wieku nastąpił znaczny postęp w rozwoju pojęcia prawdopodobieństwa geometrycznego (ukierunkowany na istotę rozważanych zbiorów) na poziomie intuicyjnym.

Paradoks Bertranda ujawnił konieczność rozstrzygnięcia problemu liczby „właściwych" miar. W roku 1877 Henri Poincaré, zgodnie z programem z Erlangen Felixa Kleina zasugerował, że „właściwe" miary dla problemów probabilistycznych muszą być niezmiennicze względem przekształceń euklidesowych.

W początku drugiej połowy dwudziestego wieku zaczęła się rozwijać geometria różniczkowa[3], która sformułowała problem liczby „poprawnych" i właściwych miar. Znanymi twórcami geometrii różniczkowej i jej wykorzystania do prawdopodobieństwa geometrycznego są Wilhelm J. E. Blaschke i Louis A. Santaló. Ich wkład i wyniki są wykorzystane do problemu miar niezmienniczych i stosownych gęstości. Więcej informacji o geometrii różniczkowej można znaleźć w publikacjach: [1], [3] i [7].

Prawdopodobieństwo geometryczne w swoich początkach było związane z grami; jednak bardzo wcześnie zaczęto je używać do rozwiązywania problemów praktycznych związanych z krystalografią, z metalografią, biologią, ekologią itp.

5. Zadanie Buffona o parkiecie

Ze wspomnianych historycznych problemów związanych z prawdopodobieństwem geometrycznym omówimy *zadanie Buffona o parkiecie* i zaprezentujemy rozwiązanie jednej z jego wersji.

• *Zadanie Buffona o parkiecie* (*Buffon's tile problem, Buffon's coin problem*, albo *Buffon's problem of squares*) jest jednym z ciekawszych zadań dotyczących prawdopodobieństwa geometrycznego. Problem dotyczy szans graczy w (ulubionej przez arystokrację w okresie Renesansu) grze *franc-carreau*, w której rzucało się monetą na podłogę pokrytą identycznymi płytkami (kafelkami). Jeden z graczy zwycięża, gdy moneta padnie na płytkę (moneta nie przetnie szpar między płytkami), drugi gracz zwycięża, gdy moneta legnie na dwóch kafelkach (moneta przetnie zbiór szpar między płytkami).

W pracy *Mémoire sur le Jeu de franc-carreau* Buffon rozważał płytki w kształcie kwadratu, trójkąta równobocznego, rombu i sześciokąta foremnego[4] (rys. 4) i podał właściwe prawdopodobieństwo dwóch zdarzeń:

---

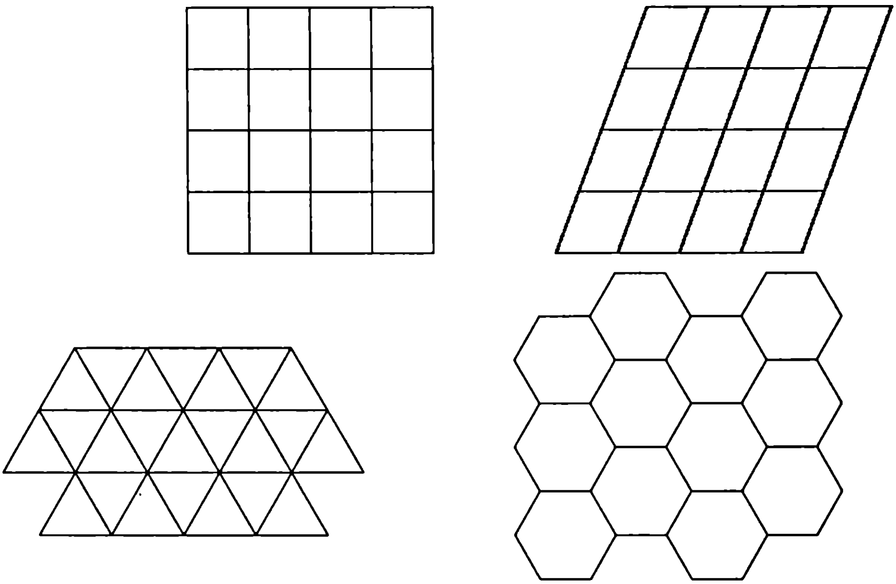
[3] *Geometria różniczkowa* (integral geometry) jest teorią niezmienniczych miar obiektów geometrycznych, które są podzbiorami przestrzeni euklidesowej (np. punktów, prostych, brył).

[4] Płytką może być każdy wielokąt pokrywający płaszczyznę bez luk i przecięć.

brzeg monety ∂C przetnie system szpar,

brzeg monety ∂C przetnie brzeg płytki ∂T,

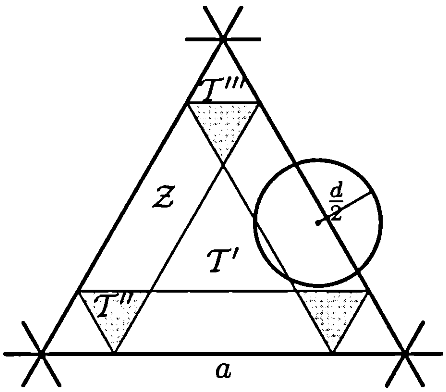
$\partial C \cap \partial T = \emptyset$ albo $\partial C \cap \partial T \neq \emptyset$ (por. [4]).



Rysunek 4. Płytki podłogi w pracy Buffona *Mémoire sur le jeu de franc-carreau*

Jest oczywiste, że można szczegółowiej opisywać i analizować przypadki przecięcia się zbioru szpar z monetą.

• Rozważmy przykład podłogi, której płytki są trójkątami równobocznymi. Załóżmy, że okrągła moneta o średnicy d będzie rzucana na podłogę wypełnioną równobocznymi trójkątami T o boku a i polu $v(T) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, przy czym $a > d$, a szpary między płytkami (brzeg płytek) są odcinkami. Niech $q = \frac{d}{a}$. Zgodnie z przyjętymi w §3 założeniami, dziedziną jest trójkąt T (∂T jest jego brzegiem) a poszczególnymi jego częściami są podzbiory T", T'', T''' i Z (por. rys. 5). Położenie monety (sondy) C jest określone (sparametryzowane) położeniem jej środka; ∂C jest brzegiem sondy (por. [9]). Zamiast dwóch rezultatów ze wspomnianego artykułu Buffona — „przecięcie" (trafienie) albo „nieprzecięcie" (nietrafienie) — możemy rozważać pięć sytuacji w zależności od liczby punktów przecięcia ($\partial C \cap \partial T$), oznaczonej znakiem $\#$.



Rysunek 5. Podział równobocznego trójkąta

1) Środek monety S leży we wnętrzu trójkąta równobocznego T, ale brzeg monety ∂C nie przecina brzegu trójkąta ($\partial \cap \partial T = \emptyset$), jeśli środek monety leży we wnętrzu równobocznego trójkąta T' o boku $(a - \sqrt{3}d)$; jego pole wynosi $\nu(T') = \frac{\sqrt{3}(a-\sqrt{3}d)^2}{4}$. Korzystając z równania (1) dostajemy, że prawdopodobieństwo tej sytuacji jest równe

$$P(0) = P(\#(\partial C \cap \partial T) = 0) = \frac{\nu(T')}{\nu(T)} = \frac{(a-\sqrt{3}d)^2}{a^2} = (1 - \sqrt{3}q)^2.$$

2) Przecięcie brzegu monety i brzegu trójkąta jest zbiorem dwóch punktów, jeśli środek monety S leży w jednym z trzech trapezów Z o podstawach $(a - \frac{2\sqrt{3}d}{3})$, $(a - \sqrt{3}d)$ i wysokości $\frac{d}{2}$; całkowite ich pole jest równe

$$3\nu(Z) = (6a - 5\sqrt{3}d)\tfrac{d}{4}.$$

Prawdopodobieństwo tej sytuacji jest równe

$$P(2) = P(\#(\partial C \cap \partial T) = 2) = (2\sqrt{3}a - 5d)\tfrac{d}{a^2} = (2\sqrt{3} - 5q)q.$$

3) Przecięciem brzegu monety i brzegu trójkąta są dokładnie cztery punkty, jeśli środek monety S leży w jednym z trzech zaciemnionych (na rys. 5) trójkątów równobocznych T'' o wysokości $\frac{d}{2}$; suma pól tych trójkątów jest równa

$$3\nu(T'') = \tfrac{\sqrt{3}d^2}{4}.$$

Prawdopodobieństwo tej sytuacji jest równe

$$P(4) = P(\#(\partial C \cap \partial T) = 4) = \tfrac{d^2}{a^2} = q^2.$$

4) Przecięcie brzegu monety i brzegu trójkąta jest zbiorem dokładnie sześciu punktów, jeśli środek monety S leży w jednym z trzech równobocznych trójkątów T''', do których należy jeden z wierzchołków trójkąta T i mających wysokość $\frac{d}{2}$; suma ich pól jest równa $3\nu(T''') = \frac{\sqrt{3}d^2}{4}$. Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi

$$P(6) = P(\#(\partial C \cap \partial T) = 6) = \tfrac{d^2}{a^2} = q^2.$$

5) Moneta styka się z brzegiem trójkąta tylko w jednym punkcie, jeśli środek monety S leży na brzegu równobocznego trójkąta T'. Prawdopodobieństwo tej sytuacji jest równe

$$P(1) = P(\#(\partial C \cap \partial T) = 1) = \tfrac{\nu(\partial T')}{\nu(T)} = 0.$$

Jest oczywiste, że rozwiązanie tego problemu jest oparte na powtórnym wykorzystaniu równania (1). Dla wartości $q = 0.2$ (tj. średnica monety jest pięć razy mniejsza niż bok płytki), stosunki prawdopodobieństw odpowiednich sytuacji są następujące:

$$P(0) : P(1) : P(2) : P(4) : P(6) = 0.43 : 0 : 0.49 : 0.04 : 0.04.$$

W grze *franc-carreau* szanse gracza, który zwycięża, gdy po upadku moneta będzie leżeć w jednej płytce, są mniejsze ($P(0) = 0.43$) niż szansa gracza, który zwycięża, gdy moneta przetnie szparę między płytkami ($1 - P(0) = 0.57$).

W przypadku gry, w której rzuca się monetę na płytki kwadratowe, liczba punktów przecięcia się monety z płytkami wynosi: 0, 1, 2, 3 albo 4, stosunki prawdopodobieństw odpowiednich sytuacji (gdy $q = 0.2$) są następujące:

$$\begin{aligned} P(0) : P(1) : P(2) : P(3) : P(4) &= (1-q)^2 : 0 : 2q(1-q) : 0 : q^2 \\ &= 0.64 : 0 : 0.32 : 0 : 0.04. \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo tego, że moneta upadnie na płytkę (nie przetnie żadnej szpary) jest większe ($P(0) = 0.64$) niż prawdopodobieństwo, że moneta przetnie płytkę ($1 - P(0) = 0.36$). Podobne rozumowanie można zastosować w przypadku płytek mających kształt innych wielokątów (np. prawidłowe i nieprawidłowe figury pokrywające płaszczyznę bez szczelin i bez nakładania się na siebie, prostokąt o wysokości h i szerokości w itd.).

6. Estymacja pola zbioru i długości krzywej

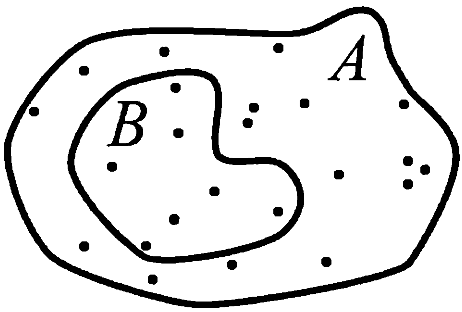
Rozwiązanie zadania Buffona o parkiecie można wykorzystać do oszacowania pola figury płaskiej.

Rozważmy następującą, bardziej ogólną sytuację, w której punktowa sonda C jest rzucana na zbiór A o znanym polu $\nu(A)$, zawierający inny (niekoniecznie ciągły) zbiór $B \subset A$ (rysunek 6). Jeśli rzucimy losowo N punktów na zbiór A, z których n trafi do zbioru B, to możemy aproksymować

$$P(\#(C \uparrow B | C \uparrow A) = 0) = \tfrac{\nu(B)}{\nu(A)}$$

za pomocą ilorazu $\frac{n}{N}$. Otrzymujemy więc oszacowanie

$$[\nu(B)] = (\tfrac{n}{N})\nu(A).$$



Rysunek 6. Oszacowanie pola figury B

Punkty rozmieszczane równomiernie losowo w przestrzeni mają tendencję do skupiania się, co zwiększa wariancję oceny. Z tego powodu często używa się równomiernej kwadratowej kraty. Jeśli a jest bokiem kwadratu (stała kratowa) i n jest liczbą punktów kraty zawierających zbiór B, to dostajemy oszacowanie

$$[\nu(B)] = na^2.$$

Uogólnienie zadania Buffona o igle można wykorzystać do szacowania długości krzywej $[L]$. Pierwotny problem dotyczy sytuacji, w której pręt S (odcinek) o długości s jest rzucany losowo na zbiór $\mathcal{D}$ prostych równoległych i równoodległych od siebie, gdzie d jest ich odległością, przy czym $s < d$. Głównym obiektem zainteresowania jest sytuacja, gdy pręt (odcinek) S przetnie prostą z rodziny $\mathcal{D}$. Prawdopodobieństwo, że tak się stanie jest równe $P(S \uparrow D) = \frac{2s}{\pi d}$. Poprzez rzucanie losowo N odcinków, z których n obejmie system $\mathcal{D}$, możemy aproksymować $P(S \uparrow D)$ za pomocą ilorazu $\frac{n}{N}$. Oznaczając $\frac{1}{d}$ jako intensywność (natężenie) długości L_A systemu $\mathcal{D}$ (średnia długość linii tworzących system $\mathcal{D}$ na jednostce powierzchni) możemy traktować $L_A = \frac{\pi n}{2Ns}$ jako oszacowanie intensywności L_A. Problem można zmienić tak, że dowolna krzywa $\mathcal{L}$ o długości L zostaje zastąpiona N odcinkami o długości l (wówczas $L = Nl$) a system $\mathcal{D}$ jest sondą, n jest liczbą punktów przecięcia $(\#(D \cap L))$. Wtedy oszacowaniem długości krzywej L jest

$$[L] = \frac{\pi dn}{2} = \frac{\pi N_L}{2}. \tag{2}$$

Zadanie Buffona o igle można uogólnić na przestrzeń trójwymiarową przez zastąpienie systemu $\mathcal{D}$ równoległych prostych systemem równoległych płaszczyzn w celu oszacowania długości krzywej przestrzennej $\mathcal{L}$, albo zastąpieniem krzywej $\mathcal{L}$ powierzchnią $\mathcal{F}$ w celu uzyskania oszacowania pola powierzchni $A(\mathcal{F})$ przez wymierzanie przecięcia $\mathcal{L} \cap \mathcal{F}$ (zob. [11] oraz [8]).

7. Zakończenie

Jak pokazano w artykule, prawdopodobieństwo geometryczne pozwala także rozwiązywać problemy, które nie mają charakrteru probabilistycznego, choć w rzeczywistości takimi są. Podstawowe problemy tej dziedziny były prezentowane w swojej najprostszej formie i wspomniano o ich możliwych uproszczeniach. Uogólnienie zadania Buffona o parkiecie może być wykorzystane do szacowania pola dowolnej figury na płaszczyźnie; zadanie Buffona o igle zaś może być uogólnione na dwa systemy krzywych na płaszczyźnie oraz dla krzywych przestrzennych i powierzchni.

Podziękowanie
Praca powstała w ramach Agency Grant Czech Republic GAČR nr 201/03/0946 i grantu AV 0Z 10190503. Dziękuję RNDr. I. Saxlowi DrSc za komentarze i uwagi.

Appendix
Comte de Buffon (1707-1788), właściwe nazwisko Georges Louis Leclerc, był francuskim naturalistą, którego działalność wpłynęła na przyszłe pokolenia naukowców. Imię *Buffon* pochodzi od małej wioski Buffon niedaleko Montbardu, która należała do jego rodziny. Na początku Buffon, spełniając życzenia swego ojca, zaczął studiować prawo, jednakże bardziej interesował się matematyką i w roku 1728 zaczął studiować matematykę, medycyną i botanikę. Przetłumaczył, między innymi, pracę Newtona *Method of Fluxions and infinite series* (w r. 1740). W roku 1733 Buffon opublikował pracę *Mémoire sur le jeu de franccarreau*, w której wprowadził do teorii prawdopodobieństwa rachunek różniczkowy i całkowy. Ta praca pomogła mu w wyborach do Académie Royale de Sciences w 1734.

W roku 1739 Buffon został mianowany dozorcą królewskiego ogrodu botanicznego (*Jardin du Roi*) w Paryżu. Podczas następnych pięciu dekad ten ogród botaniczny podwoił swoje zasoby i przekształcił się w znaczące naukowo muzeum i centrum badań.

Za cel swego życia Buffon uznał publikację 50-tomowej encyklopedii *Histoire naturelle, générale et particuliére.* Za jego życia ukazało się jednak tylko 36 tomów (1749-1788), które zawierały całą wiedzę o świecie przyrody (biologię, geologię, antropologię i ich fuzje, zob. [5]).

Literatura

[1] Blaschke W., *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Deutsch. Verlag Wiss. Berlin 1955.

[2] Hadwiger H., *Altes und Naues über konvexe Körper*, Birkhäuser, Basel 1955.

[3] Kendall M., Moran P., *Geometričeskije verojatnosti*, Nauka, Moskva 1972.

[4] Mathai A. M., *An Introduction to Geometrical Probability*, Statistical Distributions and Models with Applications, Taylor&Francis 2000.

[5] O'Connor J. J., Robertson E. F., *Georges Louis Leclerc Comte de Buffon*, www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Buffon.htmk (aktualne w dniu 15.11.2005).

[6] Płocki A., *Pravdepodobnost' okolo nás. Stochastika v ulohach a problemoch*, Katolicka Univerzita Ružomberok 2004.

[7] Santaló L. A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Adison-Wesley, Massachusetts 1976.

[8] Saxl I., *Stereology of Object with Internal Structure*, Academia, Prague&Elsevier, Amsterdam 1989.

[9] Saxl I., *Geometrická pravděpodobnost*, in: J. Antoch, D. Hlubinka, I. Saxl (eds.), *Pravděpodobnost a statistika na středni škole*, MATFYZPRES Praha 2005.

[10] Solomon H., *Geometric Probability*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1979.

[11] Weibel E., *Stereological Methods*, Vol. 2. Academic Press, London 1980.

Karlova univerzita
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Praha
Česká republika

Matematický ústav Akadémie věd České republiky
Praha
Česká republika

E-mail: ilucova@gmail.com